SZAKDOLGOZAT

Dirichlet cellák és paralleloéderek

Németh Tibor

Témavezető: Dr. G. Horváth Ákos
docens
BME Matematika Intézet,
Geometria Tanszék

BME
2011

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**
1.1. Alapvető definíciók 4

2. Extremális testek, Dirichlet – Voronoi cellák **6**
2.1. Extremális testek 6
2.2. Dirichlet – Voronoi cellák esete 12

3. Paralleloéderek **16**
3.1. Voronoi sejtése, tétele 17
3.2. Venkov és McMullen tétele 22

4. Problémák, alkalmazások **30**
4.1. A legsűrűbb gömbelhelyezés 30
4.2. Adatkvantálás 30
4.3. Numerikus integrálás kérdése 31
4.4. Legközelebbi rácspont probléma 31

1. fejezet

Bevezetés

A Dirichlet – Voronoi cella Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet [7] német, és Georgy Feodosevich Voronoi [24], [25] ukrán származású, orosz matematikus után kapta nevét. Az Euklideszi-tér egy partícionálására adtak egy geometriai példát. Dirichlet 1850-ben, Voronoi 1908-ban adott ki ehhez kapcsolódóan cikket. Voronoi azt a problémát vizsgálta, hogy egy n-dimenziós poliéder, melynek egy rács vektorai által eltolt példányai kitöltik a teret, milyen tulajdonságokkal rendelkezik.

Ezzel párhuzamosan a litván születésű, német matematikus Hermann Minkowski [21], [22] az egy adott rácshoz tartozó, maximális térfogatú konvex poliédereket vizsgálta, melyek nem tartalmaznak az origón kívül rácspontot. Később belátta, hogy a két probléma ugyanazt a megoldást adja.

Peter McMullen [20] és Boris Alekseevich Venkov [23] orosz matematikus a 20. század közepén foglakozott a problémával, és újabb szükséges és elégséges feltételeket láttak be az ilyen tulajdonságú poliéderekkel kapcsolatban. A téma bőséges irodalmát feldolgozzák a következő átfogó művek: [3], [4], [17], [18].

Dolgozatomban sorra veszem az elért eredményeket, és bemutatok pár fontos alkalmazást, máig nyitott problémákat és sejtéseket a Dirichlet – Voronoi cellákkal és paralleloéderekkel kapcsolatban.

1.1. Alapvető definíciók

Első lépésként a dolgozatban található alapvető fogalmakat definiálom. A jelöléseim: nyomtatott nagybetűk a testek és pontok, kisbetűk a skalárok és vektorok. A vektorok egy fix koordinátarendszerhez vonatkoztatva mint helyvektorok az Euklideszi-tér pontjait is jelölik.

1.1.1. Definíció (Minkowski összeg). *A K és L test Minkowski összege az összes olyan $x = u + v$ vektorból áll, ahol $u \in K$ és $v \in L$ teljesül. A K test centrikus szimmetrizáltja a $\mathscr{D}(K) = K + (-K)$ Minkowski összeg.*

Könnyen látható, hogy $\mathscr{D}(K)$ origóra szimmetrikus, valamint ha a K test konvex, akkor $\mathscr{D}(K)$ is az.

1.1.2. Definíció (rács). *Jelöljük $\mathbb{Z}$-vel az egész számok gyűrűjét. Legyen továbbá $[e_1, \ldots, e_n]$ az E^n n-dimenziós Euklideszi-tér n lineárisan független vektora. Ezen vektorok által kifeszített n-rács a $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E^n$ vektorok halmaza, ahol $x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i = 1, \ldots, n$ esetén. A Λ rács bázisa minden olyan független vektorrendszer, melynek egészegyütthatós lineáris kombinációi éppen a Λ rácsot adják.*

1.1.3. Definíció (duális rács). *Egy L rács duális rácsa azon u' vektorokból álló L' rács, melyekre teljesül, hogy minden $u \in L$ esetén az $< u, u' >$ skalárszorzat egész szám. Belátható, hogy ha az L rács egy bázisa $[e_1, ..., e_n]$, akkor az L' duális rács bázisa $[f_1, ..., f_n]$, ahol*

$$< e_i, f_j >= \begin{cases} 1 & \textit{ha } i = j \\ 0 & \textit{egyébként} \end{cases}$$

1.1.4. Definíció (minimális vektor). *Az m vektort minimális vektornak nevezzük, ha az L egyik legrövidebb nemnulla vektora (Egy vektor hosszán a szokásos Euklideszi hosszt értjük.)*

1.1.5. Definíció ((valódi) belső pont). *Egy pont egy d-dimenziós P poliéder (valódi) belső pontja, ha van olyan d-dimenziós δ-sugarú környezete, melynek minden pontja a P poliéderhez tartozik. Jelölése:* $\mathrm{int}P$.

1.1.6. Definíció (relatív belső pont). *Egy pont egy $k \leq d$-dimenziós $L \subseteq P$ lap relatív belső pontja, ha az L lap belső pontja az affin burkára,* aff *L-re vonatkoztatva. Jelölése:* $\mathrm{relint}L$.

1.1.7. Definíció (határpont). *A P poliéder határpontjai azok a pontok, melyek nem belső pontok.*

1.1.8. Definíció (D – V cella). *Legyen L egy diszkrét pontokból álló halmaz az n-dimenziós Euklideszi-téren, E^n-en. L Dirichlet – Voronoi kitöltése egy konvex halmazokkal való kitöltés, ahol*

$$D(z) = \{y \in E^n \mid \forall x \in L\text{-re: } |y - z| \leq |y - x|\} \quad z \in L.$$

Tehát $D(z)$ azokból az $y \in E^n$ pontokból áll, melyek z-től (D középpontja) vett távolsága nem nagyobb, mint L bármely más pontjától vett távolsága. A $D(z)$ halmazt z cellájának hívjuk, ahol $|\cdot|$ függvény a szokásos Euklideszi norma E^n-en. Ha L egy rács, ezek a cellák eltolt másolataik az origó középpontú $D(o)$ cellának.

1.1.9. Definíció (elhelyezés, lefedés, kitöltés). *Testek egy rendszere az E^n elhelyezését adja, ha nincs közös belső pontjuk.*
Egy ilyen rendszer fedés, ha minden E^n-beli pont valamelyik eleméhez hozzá tartozik. A fedés k-szoros, ha minden E^n-beli pont legalább k testhez tartozik.
Az egyszeres fedéseket, amelyek elhelyezések is egyben, a tér kitöltésének vagy csempézésének nevezzük. Ha ezen rendszer elemei egy adott poliéder etolt példányaiból állnak, akkor azt mondjuk, hogy a test eltolt példányaival töltöttük ki a teret. A D – V cella eltolt példányokkal való kitöltésre példa.

2. fejezet

Extremális testek, Dirichlet – Voronoi cellák

Mostantól feltesszük, hogy L egy rács. A definícióból látható, hogy L invariáns egy rácsvektorral való eltolásra, és egy rácspontra vagy egy rácsvektor felezőpontjára vonatkozó tükrözésre nézve. Ebből tehát következik, hogy bármely két Dirichlet – Voronoi cella megkapható egymásból eltolással, sőt, bármely cella és az $(n-1)$-dimenziós lapjai középpontosan szimmetrikus konvex testek.

Igazolható, hogy a $D(x)$-szel jelölt, x középpontú D – V cella félterek véges metszeteként meghatározott poliéder, mely félterek mind tartalmazzák az x középpontot, és a $D(x)$ cellát az x pontot a rácspontokkal összekötő felezőhipersíkok határolják. A $D(x)$ cellák együttese ($\forall x \in L$-re) úgynevezett *kitöltését* adják az E^n térnek. Ez azt jelenti, hogy az uniójuk lefedi a teret, és a metszetük a határpontokat leszámítva üres. Ez a kitöltés *lap-lap kitöltés*, tehát egy $D(x)$ csempe bármely $(n-1)$-dimenziós lapja egy másik csempe $(n-1)$-dimenziós lapja is. A továbbiakban D-vel jelöljük a rács D – V celláját ha az félre nem érthető.

D térfogata megegyezik L valamely bázisának bázisvektorai által kifeszített parallelepipedon térfogatával. Egy fontos osztálya a rács kitöltésének a *primitív kitöltés*: egy n-dimenziós kitöltés primitív, ha egy csempe bármely csúcsa még pontosan n másik csempéhez tartozik.

2.1. Extremális testek

Ahogy a bevezetőben említettem, az extremális testeket először Minkowski vizsgálta. Az alábbi tételek az ő nevéhez köthetőek, bizonyítással együtt közlöm őket. A fejezetben L egy tetszőleges rácsot, Y pedig azt a rácsot jelöli, melynek rácspontja az összes egész koordinátájú pont, így tehát az Y rácsra vonatkozó D – V cella térfogata $V(D) = 1$. Ha

külön nem említem, akkor a fejezetben rácson az Y rácsot értem.

2.1.1. Tétel (Minkowski). *Ha $K \in E^n$ egy korlátos, origóra szimmetrikus konvex test $v(K) > 2^n V(D)$ térfogattal, akkor legalább egy origótól különböző rácspontot tartalmaz.*

Bizonyítás: Legyen L' a $2L$ rács [minden L-beli rácsvektor helyett csak az ő kétszeresét veszem bele az L' rácsba], D' pedig az L' rács Dirichlet – Voronoi cellája. Írjuk fel K pontjait $x + u$ alakban, ahol $x \in D', u \in L'$. Ezt meg tudjuk tenni, mivel a Dirichlet – Voronoi cella eltolt példányai kitöltik a teret.

Mivel $v(K) > 2^n v(D) = v(D')$, létezik olyan $x \in D'$ pont, melyre $x + u \in K$ és $x + v \in K$; ahol $u \neq v \in L'$. A K test origóra szimmetrikus és konvex, ezért K tartalmazza a $-(x+v)$ pontot is, így tartalmazza az $\frac{1}{2}(x+u)+\frac{1}{2}(-(x+v)) = \frac{1}{2}(u-v)$ pontot is. Mivel az $u - v$ vektor L'-beli rácsvektor, ezért az $\frac{1}{2}(u - v)$ vektor L-beli rácsvektor, és $u \neq v$ miatt nem az origó. ■

Definiálok egy speciális testcsaládot:

2.1.2. Definíció (Extremális test). *Legyen K egy korlátos, origóra szimmetrikus konvex E^n-beli test $V(K) = 2^n V(D)$ térfogattal. Ekkor K lezártja $\bar{K}$ tartalmaz legalább egy $u \neq o$ rácspontot. De megeshet, hogy K belsejében nincs az origótól különböző rácspont, pl. az Y rács esetén ha K az $|x_i| < 1$ $(i = 1, ..., n)$ által definiált kocka. Az ilyen K testet extremálisnak hívjuk. A definícióban kihasználtuk az előtte szereplő tételt.*

Bevezetünk egy relációt, melyet a későbbi bizonyításokban használunk:

2.1.3. Definíció. *Legyen L egy rács, $x, y \in E^n$. Azt mondjuk, hogy $x \equiv y \pmod{L}$, ha $x - y \in L$. Könnyen látható, hogy a fenti reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív.*

Minkowski kimondott számos tulajdonságot, melyeket az extremális testeknek teljesíteniük kell:

2.1.4. Tétel (Minkowski 1.tétele). *Legyen K egy (korlátos) origóra szimmetrikus konvex test, és tekintsük az Y rácsot. Ekkor K extremális akkor és csak akkor, ha a következő 2 tulajdonság fennáll:*

a) Az E^n teret lefedik az $\frac{1}{2}K + u \quad (u \in Y)$ testek.

b) Bármely $x \in E^n$ pont legfeljebb egy $\frac{1}{2}\,\mathrm{int}K + u$ testhez tartozik.

A fenti két tulajdonság röviden azt jelenti, hogy a határoló pontokat leszámítva az $\frac{1}{2}K + u$ testek egyszeresen fedik az E^n teret.

Belátható az alábbi tétel a tér k-szoros fedésére:

2.1.5. Tétel (Minkowski 2.tétele). *Tegyük fel, hogy k egy pozitív egész, M pedig olyan korlátos, mérhető halmaza E^n-nek, melyre $\mathrm{int}M$ és $\bar{M}$ azonos mértékű. Ekkor a következő két állítás ekvivalens:*

1. *Az M halmaz térfogata $V(M) = k$ és $\mathrm{int}M$ nem tartalmaz $k+1$ elemű ponthalmazt, melyek kongruensek mod Y.*

2. *Minden $x \in E^n$ pont legalább k db $\bar{M} + u$ testhez tartozik és legfeljebb k db $\mathrm{int}M + u$ testhez (Más szavakkal, a határoló pontokat leszámítva az $M + u$ testek pontosan k-szorosan fedik le az E^n teret)*

Bizonyítás (Minkowski 2.tétele): Jelölje P a $0 \leq x_i < 1 \ \ (\forall i = 1, ..., n)$ kockát, legyen χ és $\bar{\chi}$ az M illetve $\bar{M}$ test karakterisztikus függvénye, és legyen

$$\varphi(x) = \sum_{u \in Y} \chi(x + u), \quad \bar{\varphi}(x) = \sum_{u \in Y} \bar{\chi}(x + u) \quad (x \in E^n).$$

A feltétel, miszerint $\mathrm{int}M$ nem tartalmaz $k+1$ kongruens pontot és az a feltétel, hogy $\nexists x \in E^n$ pont, mely k-nál több $\mathrm{int}M + u$ alakú testhez tartozik ekvivalensek, mivel:
Ha $\exists x \in E^n$ pont, mely legalább $k + 1$ db $\mathrm{int}M + u$ alakú testhez tartozik, tehát $x \in \{M + u_1, ..., M + u_{k+1}\}$, akkor $\{x - u_1, ..., x - u_{k+1}\} \in M$. (Ekkor persze $x - u_1, ..., x - u_{k+1}$ kongruensek.)
Fordítva, ha $\{x + u_1, ..., x + u_{k+1}\} \in M$, akkor $x \in M - u_1, ..., M - u_{k+1}$, egyaránt fennáll.
Tehát a két feltétel ekvivalens és az alábbi egyenlőtlenséggel fejezhető ki:

$$\varphi(x) \leq k \qquad \forall x \in E^n \tag{2.1}$$

Be kell látnunk, hogy ha (2.1) fennáll, akkor a $V(M) = k$ egyenlőség ekvivalens a tételbeli 2. pont első állításával. Először tegyük fel, hogy $V(M) = k$. Ekkor

$$\int_P \varphi(x)\mathrm{dx} = \int_{E^n} \chi(x)\mathrm{dx} = V(M) = k. \tag{2.2}$$

Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan $x^0 \in P$ pont, mely legfeljebb $k - 1$ db $\bar{M} + u$ testhez tartozik. Mivel M korlátos, és az Y rács diszkrét, így az x^0 pont távolsága pozitív azon $\bar{M} + u$ testek uniójától, melyek nem tartalmazzák x^0-t. Így $\varphi(x) \leq k - 1$ valamely $|x - x^0| < \epsilon$ gömb pontjaira. Ez ellentmond a (2.2) feltevéssel. Tehát minden P-beli, így minden E^n-beli pont legalább k db $\bar{M} + u$ testhez tartozik.

Most tegyük fel, hogy bármely $x \in E^n$ pont legalább k db $\bar{M} + u$ testhez tartozik. Ekkor $\bar{\varphi}(x) \geq k \ \forall x$-re. Ebből, és a (2.1) egyenlőtlenségből következik, hogy $V(M) = k$, mert

$$V(M) = \int_P \bar{\varphi}(x)\mathrm{dx} = \int_P \varphi(x)\mathrm{dx}$$

Ezzel beláttuk a tételt. ■

Bizonyítás (Minkowski 1. tétele): Legyen $M = \frac{1}{2}K$. Ekkor $V(K) = 2^n V(M)$ és $K = \mathscr{D}(M)$. K extremális akkor és csak akkor, ha $V(M) = 1$ és $\mathrm{int}M$ nem tartalmaz két különböző x és y pontokat, melyekre $x - y \in Y$. Ekkor Minkowski 2. tételéből következik az állítás ($k = 1$ esetén). ■

Látható, hogy egy konvex test, amely kielégíti az a) és b) tulajdonságokat szükségképpen korlátos, mivel a térfogata véges.

Az alábbi két tételt bizonyítás nélkül említjük:

2.1.6. Tétel (Blichfeld). [17] *Legyen k egy pozitív egész szám, és legyen M egy korlátos halmaz E^n-en, $V(M) > k$ mértékkel. Ekkor létezik olyan z vektor, hogy $M + z$ legalább $k+1$ rácspontot tartalmazzon. Másszóval M tartalmaz $k+1$ pontot, melyek kongruensek modulo Y.*

2.1.7. Tétel (Brunn – Minkowski). [17] *Ha H_0 és H_1 két zárt, korlátos halmaz és $H_\vartheta = \vartheta H_1 + (1-\vartheta)H_0$ $(0 \le \vartheta \le 1)$, akkor a $\{V(H_\vartheta)\}^{1/n}$ függvény konkáv ϑ-ban; precízebben:*

$$\{V(H_\vartheta)\}^{1/n} \ge \vartheta\{V(H_1)\}^{1/n} + (1-\vartheta)\{V(H_0)\}^{1/n}.$$

Továbbá, ha $0 < \vartheta < 1$, akkor a fenti összefüggésben egyenlőség akkor és csak akkor áll fent, ha H_0 és H_1 homotetikus vagy két párhuzamos hipersíkba esnek.

2.1.8. Tétel (Minkowski 3. tétele). *Legyen K egy (korlátos) konvex test mely kielégíti a Minkowski 1. tételében szereplő a) és b) tulajdonságokat. Ekkor K-nak van középpontja.*

Bizonyítás: Legyen $K^* = \frac{1}{2}\mathscr{D}(K)$. Ekkor K^* origóra szimmetrikus és konvex.
Tegyük fel, hogy van két különböző u, v rácspont, hogy az $\frac{1}{2}K^* + u$ és $\frac{1}{2}K^* + v$ testeknek van közös belső pontjuk: x. Ekkor léteznek $y, y', z, z' \in \frac{1}{2}\mathrm{int}K$ pontok, hogy

$$x = \frac{1}{2}(y - y') + u, \qquad x = \frac{1}{2}(z - z') + v.$$

$\frac{1}{2}\,\mathrm{int}K$ konvexitása miatt:

$$x + \frac{1}{2}(y' + z') = \frac{1}{2}(y + z') + u \in \frac{1}{2}\mathrm{int}K + u,$$
$$x + \frac{1}{2}(y' + z') = \frac{1}{2}(y' + z) + v \in \frac{1}{2}\mathrm{int}K + v.$$

Így az $\frac{1}{2}\,\mathrm{int}K + u$ és $\frac{1}{2}\,\mathrm{int}K + v$ testeknek van közös pontjuk, ami ellentmond a tételbeli b) feltételnek. Tehát az $\frac{1}{2}K^* + u, u \in Y$ testeknek nincs közös belső pontjuk.

Blichfeld tételéből következik, hogy $V(K^*) \leq 2^n$, mivel (ahogy a Minkowski tétel bizonyításában láttuk) az, hogy egy test nem tartalmaz olyan x pontot, melyre az $x + u$ ($u \in Y$) pontok legalább $k + 1$ (jelen esetben $k = 1$) $M + u$ testhez tartoznak ekvivalens azzal, hogy az M test nem tartalmaz $k + 1$ kongruens pontot. Tehát az $\frac{1}{2}K^*$ test nem tartalmaz 2 egymással kongruens pontot, így térfogata ≤ 1, így a K^* testé $V(K^*) \leq 2^n$.

K extremális (Minkowski tétele alapján), így térfogata $V(K) = 2^n$. Alkalmazva a Brunn – Minkowski tételt, és felhasználva Blichfeld tételéből kapott eredményünket kapjuk, hogy $V(K^*) = 2^n$. Valóban:

$$2 \geq \{V(K^*)\}^{1/n} = \{V(\tfrac{1}{2}\mathscr{D}(K))\}^{1/n} = \{V(\tfrac{1}{2}(K+(-K))\}^{1/n} \overset{(B-M)}{\geq} \{\tfrac{1}{2}v(K)\}^{1/n} + \\ + \{\tfrac{1}{2}v(-K)\}^{1/n} = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\{v(K)\}^{1/n} = 2$$

Így K és K^* homotetikus ezért K és K^* kongruens. Így K-nak van középpontja. ■

2.1.9. Megjegyzés. *K egy eltolása nem befolyásolja az a) és b) tulajdonságokat. Emiatt K középpontja bármely pont lehet a térben, valamint a Minkowski 1. és 3. tétele alapján ha egy konvex test kielégíti a)-t és b)-t akkor az szükségképpen egy extremális test eltoltja.*

2.1.10. Megjegyzés. *Ha K extremális (így tehát poliéder), akkor minden ($(n-1)$ - dimenziós) lapjának belsejébe esik rácspont. Ha valamely F lapja ugyanis nem tartalmazna belső pontként egy origótól különböző rácspontot, akkor F és $-F$ szimmetrikus kis eltolásával egy nagyobb, origóra szimmetrikus konvex testet kapnánk, ami szintén nem tartalmaz origótól különböző rácspontot a belsejében, ez ellentmond K extremalitásának.*

2.1.11. Tétel. *Legyen K egy korlátos, origóra szimmetrikus konvex test, amely belsejében nincs az origótól különböző rácspont. Ekkor K-t tartalmazza egy origóra szimmetrikus konvex poliéder K_1, melynek szintén nincs origótól különböző rácspontja. Ha K extremális, akkor K maga egy (origóra szimmetrikus) poliéder.*

Bizonyítás: Minden $u \neq o$ rácsponthoz meghatározunk egy $\alpha > 0$ számot úgy, hogy αu K határára essen. Állítsunk egy érintősíkot az αu pontba, jelöljük $S(u)$-val azon hipersíkok által határolt sávot, melyek párhuzamosak ezzel az érintősíkkal, és átmennek az u illetve $-u$ pontokon. Ezt megtehetjük úgy, hogy minden $u \neq o$ pontra $S(u)$ és $S(-u)$ egybeessen. Legyen K_1 az összes ilyen $S(u)$ sáv metszete. Ekkor K_1 tartalmazza K-t, továbbá K_1 origóra szimmetrikus és konvex, és K_1 nem tartalmaz origótól különböző belső rácspontot.

Most bebizonyítjuk, hogy K_1 poliéder. Léteznek olyan pozitív ρ és σ számok, hogy K tartalmazza az $|x| \leq \rho$ gömböt, és minden K' konvex test, mely tartalmazza ezt a gömböt és térfogata $V(K') \leq 2^n$, az $|x| \leq \sigma$ gömbben van. Így tehát K és K_1 az utóbbi gömbben van. Egy K-t érintő sík origótól vett távolsága $\geq \rho$.

Legyen $u' = \alpha u$, m a K u'-beli határpontjába állított érintősík origótól vett távolsága, n pedig az ezzel párhuzamos, u-n átmenő érintősík origótól vett távolsága. Hasonlósági okokból $\frac{n}{m} = \frac{|u|}{|u'|}$. Ekkor $m \geq \rho$, mivel K tartalmazza a ρ sugarú gömböt. A σ sugarú gömb tartalmazza K-t, igy $|u'| \leq \sigma$. $\sigma \geq n$, mivel a σ sugarú gömb tartalmazza K_1-et. Tehát ezt kapjuk:

$$\sigma \geq n = \frac{n}{m} \cdot m = \frac{|u|}{|u'|} \cdot m \geq \frac{|u|}{\sigma} \cdot \rho.$$

Ennélfogva a hipersíkoknak, melyek bármelyik $S(u)$-t meghatározzák, origótól vett távolsága (előzőekben n) $\geq (\frac{|u|}{\rho})\sigma$. Ebből adódóan K_1 azon $S(u)$ sávok metszete, melyekre $(\frac{|u|}{\sigma})\rho \leq \sigma$, azaz $|u| \leq \frac{\sigma^2}{\rho}$. Az ilyen u pontok száma véges. Így K_1 poliéder. Ha $V(K) = 2^n$, akkor $V(K_1) = 2^n$ szintén (mivel tartalmazza K-t és nem tartalmaz belső rácspontot), tehát K_1=$\bar{K}$. Ezzel beláttuk a tételt. ■

Minkowski további állításai az extremális testekről az alábbi tételben vannak összefoglalva:

2.1.12. Tétel (Minkowski). *Legyen K egy origóra szimmetrikus extremális konvex test. Ekkor:*

1. *Legfeljebb $2(2^n - 1)$ rácspont esik K lapjainak belsejébe.*
2. *K-nak legfeljebb $2(2^n - 1)$ lapja van.*
3. *K határán legalább $2(2^n - 1)$ rácspont van.*

Bizonyítás: Legyen $u^1, u^2 \in Y$ K lapjain levő belső pontok, és tegyük fel, hogy $u^2 \neq \pm u^1$. Ekkor $\frac{1}{2}(u^2 - u^1)$ K-nak egy origótól különböző belső pontja, így ez a pont nem rácspont, azaz $u^2 \not\equiv u^1 \pmod 2$

Osszuk fel a rácspontok halmazát $\bmod 2$ maradékosztályokba. Az előbb bizonyítottuk, hogy minden maradékosztály legfeljebb egy pontpárt tartalmaz, $\pm u$-t, úgy, hogy u egy adott F lap belső pontja. Természetesen, ha u az F lap egy belső pontja, akkor $-u$ a $-F$ lap belső pontja lesz. Az origót tartalmazó maradékosztály nem tartalmaz K határán lévő rácspontot. Ezekből 1. következik, mivel 2^n maradékosztály van, és minden maradékosztály legfeljebb két, lap belsejében lévő pontot tartalmaz, kivéve az, amelyik az origót tartalmazza, mert az nem tartalmaz egyáltalán lap belsején lévő rácspontot. Az

1. állításból és az előző megjegyzésből, miszerint minden ($n-1$-dimenziós) lap tartalmaz legalább egy o-tól különböző rácspontot adódik a 2. állítás. Vegyünk egy tetszőleges $u \not\equiv o \pmod 2$ rácspontot. Ekkor Minkowski 1. tétele alapján létezik olyan v rácspont, melyre $\frac{1}{2}u + v \in \frac{1}{2}\bar{K}$, azaz $u + 2v \in \bar{K}$. Mivel ez a pont egy rácspont, K extremalitása miatt ez mindenképp K határára kell, hogy essen. Innen látható, hogy 3. fennáll. ■

2.2. Dirichlet – Voronoi cellák esete

Általános esetben nem tudunk többet mondani, mint a fenti állítások. Vegyük azt a speciális esetet, hogy a K extremális test a rácshoz tartozó D – V cella nagyítottja: $2D$. Voronoi bevezette a *meghatározó vektor* fogalmát. Egy x rácsvektort meghatározó vektornak hívunk, ha valóban szükséges a D cella meghatározásához. Ez azt jelenti, hogy az x középpontját tartalmazó, és x-re merőleges hipersík a D cellát $(n-1)$-dimenziós lapjában metszi. Voronoi megmutatta a meghatározó vektorok alábbi karakterizációját:

2.2.1. Tétel. *Az $x \in L$ rácsvektor meghatározó vektor akkor és csak akkor, ha egyedi minimális normájú eleme az $x + 2L$ mellékosztálynak. Itt az 'egyedi' azt a tulajdonságot jelenti, hogy ha y egy minimális normájú eleme $x + 2L$-nek, akkor az megegyezik x-el vagy $-x$-szel.*

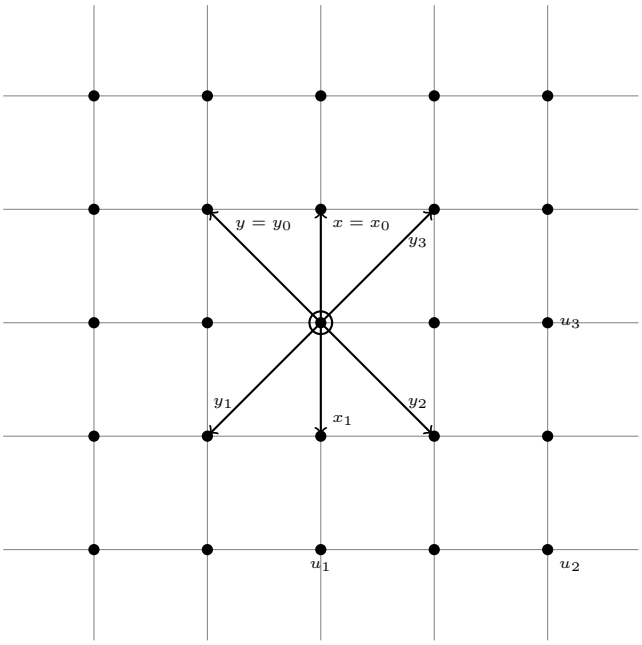
Ez az eredmény azt mondja ki, hogy $\pm x$ egy egyedi minimum párja a mellékosztályának, akkor és csak akkor, ha a végpontjaik $2D$-nek egymással szemközti $(n-1)$-dimenziós lapjának belső pontjai. Az alábbi ábra szemlélteti az állítást, ahol x meghatározó vektor, y viszont nem az, mivel pl. $y_1 = u_1 + y$, és y_1 minimális normájú eleme $y + 2L$-nek, de $y_1 \neq \pm y$.
G. Horváth Ákos fogalmazta meg az alábbi általánosítást:

2.2.2. Tétel ([12]). *Ha egy x rácsvektor a $2D$ test egy $(n-k)$-dimenziós lapjának valódi belső pontja (valamely $k = 1, ..., n-1$ esetén) akkor ő az $x + 2L$ mellékosztály minimum vektora. Fordítva, ha az*

$$\mathcal{M}_x := \{m \in L \mid m \text{ az } x + 2L \text{ mellékosztály minimum vektora } \}$$

halmaz rangja k, akkor $\mathcal{M}_x$ elemei $2D$-nek néhány (páronként diszjunkt) $(n-k)$-dimenziós lapjának belsejében vannak. Továbbá, a $k = n$ esetben az x rácsvektor akkor és csak akkor csúcsa a $2D$ testnek, ha x minimum vektora a $x + 2L$ mellékosztálynak, valamint $\mathcal{M}_x$ rangja n.

Itt egy vektorhalmaz rangja a dimenzióját jelenti.



2.1. ábra. minimális normájú elemek

Bizonyítás: Ha x $2D$ egy $(n-k)$-dimenziós lapjának relatív belsejébe esik, akkor az $\frac{1}{2}x$ pont a D D – V cella megfelelő $(n-k)$-dimenziós lapjának belsejében van. Legyen y az $L\backslash\{0\}$ egy tetszőleges eleme, ekkor az alábbi

$$H_y := \{\alpha \in E^n \mid y \cdot \alpha \leq \frac{1}{2} y \cdot y\}$$

zárt féltér tartalmazza az $\frac{1}{2}x$ pontot, tehát $x \cdot y \leq y \cdot y$. Véve az $x - 2y$ elem normáját kapjuk, hogy:

$$N(x-2y) = N(x) + 4N(y) - 4x \cdot y \geq N(x)$$

ami bizonyítja az állítás első részét.

Legyen x a mellékosztályának legrövidebb eleme. Ekkor minden $y \in L\backslash\{0\}$ rácsvektorra az

$$N(x-2y) = N(x) + 4N(y) - 4x \cdot y \geq N(x)$$

egyenlőtlenségből következik, hogy az $\frac{1}{2}x$ vektor a

$$H_y := \{\alpha \in E^n \mid y \cdot \alpha \leq \frac{1}{2} y \cdot y\}, \quad \forall y \in L\backslash\{0\}$$

féltérekbe esik, ami azt jelenti, hogy D határán van. Ebben az esetben van olyan Π $(n-l)$-dimenziós lapja D-nek, melynek az $\frac{1}{2}x$ pont $(1 \leq l \leq n)$ relatív belső pontja. Mivel D

azon érintőhipersíkjai, melyek tartalmazzák az $\frac{1}{2}x$ pontot, tartalmazzák a Π lapot is, így láthatjuk, hogy az olyan $y \in L$ rácsvektorokhoz tartozó hipersíkok metszetei, mely y rácsvektorokra $N(x-2y) = N(x)$ fennáll, tartalmazzák Π-t is. Így a $\cap\{\mathrm{bd}(H_y) \mid y \in \mathcal{M}_x\}$ lap dimenziója legalább $(n-l)$.

Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{M}_x$ rangja (ami k a feltevés szerint) legfeljebb l, azaz $k \leq l$. Másrészről megmutatjuk, hogy $k \geq l$. Ugyanis D-nek létezik legalább l darab független $(n-1)$-dimenziós laphipersíkja $\mathrm{bd}(H_{y_i})$, $i = 1, ..., \sigma$, ami D-nek egy $(n-l)$-dimenziós lapját tartalmazza. De ezekről az y_i meghatározó vektorokról tudjuk, hogy $x - 2y_i \in \mathcal{M}_x$, így $k = \mathrm{rang}(\mathcal{M}_x) \geq l$. Tehát $k = l$. Ha $x - 2y \in \mathcal{M}_x$, akkor $N(2x-y) = N(x) = \min\{N(x-2y-2z) \mid z \in L\}$, ahonnan $x - 2y \in \mathrm{bd}(2D)$. Következésképp $x - 2y$-ra megismételhetjük az x-re vonatkozó megfigyeléseket, amivel bebizonyíthatjuk az állítás második felét, kivéve az $(n-k)$-dimenziós lapok különbözőségét, amelyek relatív belső pontként tartalmazzák $\mathcal{M}_x$ különböző elemeit. Legyen például $x \neq x - 2y \in \mathcal{M}_x$, $\frac{1}{2}x \in \mathrm{relint}\Pi$, $\frac{1}{2}x - y \in \mathrm{relint}\Pi^*$, ahol Π és Π^* D-nek $(n-k)$-dimenziós lapjai. Az eddig bebizonyított tények alapján kapjuk, hogy $\mathrm{aff}\Pi$ (illetve $\mathrm{aff}\Pi^*$) az $\frac{1}{2}x$-et (illetve $\frac{1}{2}x - y$)-t tartalmazó $\cap\{\mathrm{bd}(H_y) \mid y \in \mathcal{M}_x\}$ eltoltjai. Továbbá $\cap\{\mathrm{bd}(H_y) \mid y \in \mathcal{M}_x\}$ merőleges y-ra, ezért $\Pi \neq \Pi^*$. ■

A következő tétel egy algebrai összefüggést ad a $2D$ test határán lévő pontokra:

2.2.3. Tétel ([12]). *Legyen az x rácsvektor $2D$ valamely Π $(n-k)$-dimenziós lapjának relatív belső pontja. (ahol $1 \leq k \leq n$). Ekkor $2D$-nek létezik q db $(n-1)$-dimenziós lapja (jelöljük Π_1,...Π_q -val), melyek mind tartalmazzák a Π lapot úgy, hogy a meghatározó vektorainak $(y_1, ..., y_q)$ összege x, azaz*

$$x = y_1 + ... + y_q.$$

Ezeknek az $(n-1)$-dimenziós lapoknak a száma nem nagyobb k-nál. A fenti y_i meghatározó vektorok ortogonálisak egymásra, szóval

$$x^2 = y_1^2 + ... + y_q^2.$$

Bizonyítás: Megjegyezzük, hogy ha az x rácspont $2D$ egy Π $(n-k)$-dimenziós lapjának relatív belső pontja, akkor minden $y \neq x$ meghatározó vektorra, amely $2D$ egy olyan $(n-1)$-dimenziós lapjához tartozik, mely tartalmazza a Π lapot, az $x - y$ vektor belső pontja $2D$ egy $(n-l)$-dimenziós lapjának, ahol $l \leq k$. Valójában az $x - y$ vektor a megfelelő x és $x - 2y$ végpontú szakasz felezőpontja. Itt $|x| = |x - 2y|$, így $x - 2y \in \mathcal{M}_x$. Pontosabban

$$|x| = |y + (x-y)| = |y - (x-y)| = |x - 2y|,$$

mivel x és y is az y normálvektorú hipersíkba esik. Az előző tétel bizonyításából láthatjuk, hogy ezek az x és $x - y$ végpontok relatív belső pontjai a két párhuzamos, $(n-k)$-dimenziós Π illetve Π^* lap egyikének. ($\mathrm{aff}\,\Pi^* = \mathrm{aff}(\Pi - 2y)$). De $x - y$ nem a nullvektor, így nem esik a $2D$ test belsejébe (mivel a $2D$ test extremális), ezért relatív belső pontja $2D$ egy $(n-l)$-dimenziós Π^1 lapjának, ahol $l < k$. Így egy tetszőleges, a fenti tulajdonságokkal rendelkező y_1 meghatározó vektorra $x = y_1 + (x - y_1)$, ahol az $x - y_1$ vektor egy $(n-k)$-nál nagyobb dimenziós Π^1 lap relatív belső pontja. Az eredeti Π lapot tartalmazza ez a Π^1 lap, így egy olyan $(n-1)$-dimenziós lap, mely tartalmazza a Π^1 lapot, szükségképpen tartalmazza a Π lapot is. Legyen Π_2 egy ilyen $(n-1)$-dimenziós lap, és legyen Π_1 az az $(n-1)$-dimenziós lap, melyhez az y_1 meghatározó vektor tartozik. Ha y_2 az új Π_2 lap meghatározó vektora, akkor az $x - y_1$ rácsvektor felbontható y_2 illetve $(x - y_1) - y_2$ vektorok összegére. Itt az $(x - y_1) - y_2$ vektor relatív belső pontja egy olyan Π^2 lapnak, mely tartalmazza a Π^1 lapot és nála magasabb dimenziós. Így a tételben szereplő állítást indukciót használva könnyű belátni ilyen felbontásokkal.

A meghatározó vektorok merőlegességét a következőképp láthatjuk be. A Π_2 $(n-1)$-dimenziós lap tartalmazza a Π^1 lapot, így tartalmazza az y_1-gyel párhuzamos, x és $x - 2y$ végpontú szakaszt is. Így a Π_2 lap normálvektora, y_2 merőleges y_1-re. A fenti konstrukció következő lépésében definiálunk egy Π^2 $(n-1)$-dimenziós lapot, mely tartalmazza a Π^1 lapot, így tartalmazza a fent említett szakaszt is. Az új Π^2 lap affin burka tartalmazza a Π^1 és $\Pi^1 - 2y_2$ halmazok affin burkát. Ebből a definícióból látható, hogy a Π^2 lapot(így a Π^1 lapot is) tartalmazó Π_3 tartalmazza az y_2-vel párhuzamos, $x - y_1$ és $(x - y_1) - 2y_2$ végpontú szakaszt (és az y_1-gyel párhuzamos, x és $x - 2y_1$ végpontú szakaszt is). Tehát ennek a Π_3 $(n-1)$-dimenziós lapnak a y_3 normálvektora merőleges az y_1 és y_2 vektorokra. Ezután indukcióval következik az y_i vektorok páronkénti merőlegessége. ■

3. fejezet

Paralleloéderek

A paralleloéder fogalmát Voronoi vezette be, ő tanulmányozta őket. Vegyük ismét az előző fejezetbeli Y rácsot. Egy P poliédert paralleloédernek hívunk, ha $\forall u \in Y$-re a $P + u$ testek hézagmentesen, és a határpontokat leszámítva egyrétűen fedik az E^n teret. A dolgozatban említett tételek alapján egy paralleloédernek mindig van középpontja, és egy P poliéder akkor és csak akkor paralleloéder, ha $2P$ extremális.

Egy P paralleloédert *primitívnek* hívunk, ha minden $(n-1)$-dimenziós lapja egybeesik egy másik $P + u$ test $(n-1)$-dimenziós lapjával, és P minden c csúcsa pontosan $(n+1)$ darab élére esik a $P+u$ $(\forall u \in Y)$ testeknek. Két test: $P+u$, $P+u'$ *kapcsolódó*, ha van közös lapjuk. Mivel két kapcsolódó testnek nem lehet egy adott közös csúcsból induló összes éle közös, a P-beli c csúcsot tartalmazó $n+1$ él nem lehet mind P-beli. Úgyhogy a c csúcs P-nek pontosan n éléhez tartozik (melyek nem mind egy hipersík esnek); bármely $n-1$ él ebből az n élből kifeszít egy $(n-1)$-dimenziós kúpot, és ezen $n-1$ él P valamely lapjának élei, az ez által a lap által határolt kapcsolódó paralleloéder szükségképpen tartalmazza a c-be futó $(n+1)$-edik élt. Tehát a következő helyzet áll fent: a c csúcsba futó $n+1$ élből semelyik n sem esik egy hipersíkba, és bármely n meghatároz egy, az $n+1$ darab, c csúcsot tartalmazó paralleloéderből 1-et magába foglaló kúpot; ez az $n+1$ darab paralleloéder páronként kapcsolódó.

Legyen $Q(x)$ egy pozitív definit kvadratikus forma és P jelölje azon x pontok halmazát, melyre

$$Q(x) \leq Q(x-u) \quad \forall u \in Y.$$

Ekkor P azon x pontok halmaza, melyre o a 'legközelebbi' rácspont az $f = Q^{\frac{1}{2}}$ konvex távolságfüggvény által meghatározott metrikában, emiatt ezt Y-nak f-re vagy Q-ra megkötött *méhsejtjének* hívjuk. Megmutatjuk, hogy ekkor P paralleloéder.

Ha $u \neq o$ egy fix rácspont, akkor $Q(x) = Q(x-u)$ egy hipersíkot határoz meg. Ekkor $Q(x) \leq Q(x-u)$ egy (ezáltal a hipersík által határolt) félteret határoz meg. Így P

félterek metszete, tehát P konvex. Mitöbb, P szimmetrikus. Továbbá $\exists\epsilon > 0$ szám, hogy az $u \in Y$ pontok körüli $K_\epsilon(u) : Q(x-u) \leq \epsilon$ ellipszoidok diszjunktak; egy ilyen ϵ-ra P tartalmazza a $K_\epsilon(o)$ ellipszoidot. Így P egy origóra szimmetrikus konvex test. Mivel nem tartalmazhat $u \neq o$ rácspontokat, így véges a térfogata (Minkowski tétele alapján), így szükségképpen korlátos.
Minden u-ra, a $P+u$ testet a

$$Q(x-u) \leq Q(x-u') \qquad \forall u' \in Y$$

összefüggés határozza meg. Innentől látható, hogy E^n-t a $P+u$ testek -a határpontokat leszámítva- egyszeresen fedik. Így P paralleloéder.

3.1. Voronoi sejtése, tétele

Voronoi a következő híres sejtést fogalmazta meg:

Minden paralleloéder valamely L rács Dirichlet – Voronoi cellájának affin képe.

Máig nyitott kérdés általános n esetén, $n \leq 5$ dimenzióra belátták, hogy igaz. Az alábbi adatok Deza és Grishukhin cikkéből [6] származnak:
Az $n = 2$ esetben a 2 paralleloéder: a szimmetrikus hatszög (primitív), és a parallelogramma (nem-primitív) nagyon régről ismert. 1885-ben Fedorov leírta $n = 3$ esetben mind az 5 paralleloédert (ebből 1 primitív). Delone [5] 51 darab 4-dimenziós paralleloédert számlált, később Shtogrin megtalálta az utolsó, hiányzó 52.-et. Ryshkov és Baranovski 221 darab 5-dimenziós, primitív paralleloédert talált. Engel, számítógép segítségével 179372 darab 5-dimenziós paralleloédert talált, ebből 222 primitív. Az alábbi gyengébb állítást viszont bebizonyított Voronoi:

3.1.1. Tétel (Voronoi). *Minden origó középpontú primitív paralleloéder valamilyen pozitív kvadratikus formához tartozó rács Dirichlet – Voronoi cellája.*

Bizonyítás: Legyen P_0 egy primitív paralleloéder az $F_1, ..., F_{2s}$ $(n-1)$-dimenziós lapokkal, ahol $F_{k+s} = -F_k$ ($\forall k = 1, .., s$ esetén). A $P_0 + u$ ($\forall u \in Y$) testek közül P_k legyen az $F_k (k = 1, ..., 2s)$ lapot tartalmazó $\neq P_0$ paralleloéder. $H_{0,k}$ jelölje az F_k lap által határolt, P_0-t tartalmazó félteret. Írjuk fel ezt a félteret az alábbi egyenlőtlenséggel:

$$\alpha_k + a^k \cdot x \geq 0, \tag{3.1}$$

ahol α_k egy valós szám, a^k pedig egy F_k-ra merőleges vektor ($k = 1, ..., 2s$), ahol a merőlegesség azt jelenti, hogy a kiegészítő (1-dimenziós) altér eleme. Általánosabban, ha a P_k és P_l testek ($0 \leq k \leq 2s, 0 \leq l \leq 2s, k \neq l$) kapcsolódóak, akkor $H_{k,l}$ jelölje a P_k és

P_l testek közös lapja által határolt, P_k-t tartalmazó félteret. A bizonyítás első lépéseként normalizáljuk a (3.1) egyenlőtlenséget.

1. állítás: *Léteznek $\tau_1, ..., \tau_{2s}$ pozitív számok úgy, hogy ha a P_k és P_l testek (ahol $0 \leq k \leq 2s,\ 0 \leq l \leq 2s,\ k \neq l$) kapcsolódóak, akkor a $H_{k,l}$ féltérek felírhatóak a*

$$(\tau_l a^l - \tau_k a^k) \cdot (x - b) \geq 0 \tag{3.2}$$

egyenlőtlenséggel, ahol $\tau_0 = 1$, $a^0 = o$, b pedig egy $H_{k,l}$ határán lévő tetszőleges pont.

Tekintsünk egy rögzített P_0-beli csúcsot, c-t. Feltehetjük, hogy ez a $P_0, P_1, ..., P_n$ testek közös pontja, tehát c az $F_1, ..., F_n$ $(n-1)$-dimenziós lapok közös pontja is egyben, és közös határpontja a $H_{0,1}, ..., H_{0,n}$ féltereknek. Így az ezeket a féltereket definiáló (3.1) egyenlőtlenség felírható $a^k \cdot (x - c) \geq 0$ alakban. Jelölje E_m a P_k (ahol $k = 0, 1, ..., n;\ k \neq m$) paralleloéderek közös élét ($m = 0, 1, ...n$ esetén). Az E_m élek mind a c csúcsban végződnek. Mivel $m = 1, ..., n$ esetén az E_m él az F_k ($k = 1, ..., n;\ k \neq m$) lapok éle, így a $H_{0,k}$ félterek határaira esik, ezért kielégíti az alábbi

$$a^k \cdot (x - c) = 0 \quad (\text{ahol } k = 1, ..., n;\ k \neq m) \tag{3.3}$$

egyenlőségeket.

Az E_0 él a $P_1, ..., P_n$ testek közös éle, így a P_0 belsejétől távol esik. Így, mivel az $H_{0,1}, ..., H_{0,n}$ féltér tartalmazza $\operatorname{int} P_0$-t, léteznek olyan $\tau_1, ..., \tau_n$ pozitív számok, melyekre teljesülnek az alábbi

$$\tau_1 a^1 \cdot (x - c) = \tau_2 a^2 \cdot (x - c) = ... = \tau_n a^n \cdot (x - c). \tag{3.4}$$

egyenlőségek. Ekkor nyilván a $(\tau_1, ..., \tau_n)$ számok egy pozitív szorzó erejéig egyértelműek lesznek.

Vegyünk két indexet: k-t és l-t úgy, hogy $0 \leq k \leq n,\ 0 \leq l \leq n,\ k \neq l$. Az előzőek alapján az $n - 1$ darab E_m él ($m \neq k, l$) mind kielégíti az alábbi

$$\tau_k a^k \cdot (x - c) = \tau_l a^l \cdot (x - c) \tag{3.5}$$

egyenlőséget, ami akkor is igaz, ha k, l vagy m közül az egyik 0, a $\tau_0 = 1$, $a^0 = o$ paraméterekkel. Így (3.5) a fenti $n - 1$ db E_m élt tartalmazó hipersík egyenlete, azaz a P_k testet a P_l testtől elkülönítő hipersíké. Továbbá, ha $k, l > 0$ teljesül, akkor az F_l lapot tartalmazó hipersík metszi a P_k testet, így P_k azon x pontokat tartalmazza, melyekre $a^l \cdot (x - c) = 0$, és $a^k \cdot (x - c) < 0$. Ebből adódóan a $H_{k,l}$ féltér megadható a $(\tau_l a^l - \tau_k a^k) \cdot (x - c) \geq 0$ egyenlőtlenséggel. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az állításunk igaz a c-t körülvevő $P_0, P_1, ..., P_n$ testekre. Hasonló összefüggés áll fenn a $P_0, P_{k_1}, ..., P_{k_n}$ testekre,

melyek körülveszik P_0 bármely c' csúcsát, a megfelelő $\tau_{k_1}, ..., \tau_{k_n}$ pozitív számokkal. Vezessünk be egy jelölést: $(\tau_k|\tau_l)$, ha τ_k és τ_l pozitív számok, és a $H_{k,l}$ féltér megadható a $(\tau_l a^l - \tau_k a^k) \cdot (x - b) \geq 0$ egyenlőtlenséggel, ahol b a $H_{k,l}$ féltér határpontja (ahol $1 \leq k \leq 2s,\ 1 \leq l \leq 2s;\ k \neq l$). Ekkor az eddig belátott eredményekből adódik a következő két megállapítás:

1. Ha F_k és F_l a P_0 test két szomszédos $(n-1)$-dimenziós lapja és $\tau_k > 0$, akkor létezik egy τ_l pozitív szám, melyre $(\tau_k|\tau_l)$,

2. Ha F_k, F_l, F_m a P_0 test három szomszédos $(n-1)$-dimenziós lapja és τ_k, τ_l, τ_m pozitív számok, melyekre ha $(\tau_k|\tau_l)$ és $(\tau_l|\tau_m)$, akkor $(\tau_k|\tau_m)$.

Ezeket a megállapításokat fogjuk most felhasználni. Legyen $\tau_1 > 0$ tetszőleges. Legyen F_k a P_0 test egy tetszőleges lapja, és C jelöljön egy F_k kezdetű F_1 végű láncot. Ha elkezdjük τ_1-gyel, és alkalmazzuk az 1. megállapítást páronként minden C szerint egymást követő lapon, akkor végül kapunk egy τ_k pozitív számot. P_0 felszíne egyszeresen összefüggő, azaz bármely zárt, lapokból álló lánc összerakható zárt 3-as láncokból. A 2. megállapításból következik, hogy τ_k nem függ a C lánc megválasztásától. Így egy fix τ_1 számból kiindulva a leírt eljárás elvezetett egyértelmű $\tau_2, ..., \tau_{2s} > 0$ számokhoz. $(\tau_k|\tau_l)$ reláció definíciója alapján így bármely $H_{k,l}$ féltér felírható a megfelelő (3.2)-es egyenlőtlenséggel (ahol $k, l > 0$; és az F_k, F_l lapok szomszédosak). Ez akkor is igaz, ha $k = 0$ vagy $l = 0$, $a^0 = o$ választással. Ezzel az 1. állítást beláttuk.

A (3.1) egyenlőtlenségben $k = 1, ..., 2s$ esetén az α_k szám és az a^k pont egy pozitív β_k szorzó erejéig meghatározott. Ezért az α_k számok és az a^k pontok választhatóakóak úgy, hogy az 1. állítás fennálljon $\tau_1 = ... = \tau_{2s} = 1$ esetén. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a (3.1) egyenlőtlenségek *kanonikusak* P_0-ra, és $u \in Y$-ra az

$$\alpha_k + a^k \cdot (x - u) \geq 0 \quad (k = 1, ..., 2s \text{ esetén})$$

egyenlőtlenségek *kanonikusak* $P_0 + u$-ra.
2. állítás: *Ha a* (3.1) *egyenlőtlenségek kanonikusak, akkor*:

1. $a^{k+s} = -a^k \quad (k = 1, ..., s \text{ esetén})$

2. *Létezik olyan egyértékű* $\varphi(u)(u \in Y)$ *függvény, ami kielégíti a következő két feltételt:* 1) $\varphi(o) = 0$; 2) $\varphi(u + u^k) = \varphi(u) + a^k \cdot b$, ahol b tetszőleges pontja a $P_0 + u$ és $P_0 + u + u^k$ testek közös, $F_k + u$ lapjának. $(\forall u \in Y;\ k = 1, ..., 2s$ esetén)

Először az állítás 1. pontját látjuk be. Tudjuk, hogy $a^{1+s} = -\alpha a^1$ valamilyen $\alpha > 0$ számra, mivel az F_1 és F_{1+s} lapok szemköztiek. Legyen $k' = k \pm s$ $(k = 1, ..., 2s$ esetén),

ahol úgy választjuk ki az előjelet, hogy $1 \leq k' \leq 2s$ teljesüljön. Válasszunk egy tetszőleges $l > 1$ indexet úgy, hogy az F_1 és F_l lapoknak legyen közös csúcsuk (így tehát P_1 és P_l kapcsolódóak). Legyen $u \in Y$ rácspont, az $m \leq 2s$ számot pedig határozzák meg a $P_1 = P_0 + u$, és $P_l = P_m + u$ egyenletek. Ekkor az $F_m + u$ lap a P_1 és P_l testek közös lapja. Sőt, P_{1+s} és $P_{l'}$ kapcsolódóak, és közös lapjuk a $-(F_m+u) = F_{m'} - u$ lap. Ez a lap párhuzamos P_1 és P_l közös $(n-1)$-dimenziós lapjával $F_m + u$-val. A hipotézisünk miatt az $a^l - a^1$ vektor és az $a^{l'} - a^{1+s}$ vektor merőleges ezekre a lapokra. Mivel $a^{1+s} = -\alpha a^1$, így $a^{l'} = -\alpha a^l$. Ismételgetve az eljárást megkapjuk, hogy $a^{k'} = -\alpha a^k$ minden k-ra. Következésképp $a^1 = -\alpha a^{1+s} = \alpha^2 a^1$. Tehát $\alpha = 1$, ezzel beláttuk az 1. pontot.

Vegyük bármely három, közös c csúcsot tartalmazó paralleloédert: $P_0 + u^1, P_0 + u^2, P_0 + u^3$. $P_0 + u^1$ és $P_0 + u^2$ közös $(n-1)$-dimenziós lapja legyen $F_k + u^1 = F_{k'} + u^2$, $P_0 + u^1$ és $P_0 + u^3$ közös $(n-1)$-dimenziós lapja $F_l + u^1 = F_{l'} + u^3$, $P_0 + u^2$ és $P_0 + u^3$ közös $(n-1)$-dimenziós lapja pedig $F_m + u^2 = F_{m'} + u^3$ (itt is $k' = k \pm s,\ l' = l \pm s,\ m' = m \pm s$). Ekkor az $F_m + u^2$ lap a $H_{k,l} + u^1$ féltér határán fekszik; így az 1. állítás és a hipotézisünk alapján

$$a^l - a^k = \beta a^m, \quad \text{valamely } \beta > 0 \text{ esetén.}$$

Hasonlóan, $F_l + u^1$ a $H_{k',m} + u^2$ határára esik; így

$$a^m - a^{k'} = \gamma a^l, \quad \text{valamely } \gamma > 0 \text{ esetén.}$$

Mivel $a^{k'} = -a^k$, a fenti relációkból adódik, hogy $\beta = \gamma = 1$, így $a^l - a^k = a^m$. Vegyük az $\{u, v\} = \{u^1, u^2\}, \{u^1, u^3\}, \{u^2, u^3\}$ párokat, így eljutottunk a következő relációhoz, ami alapján a φ függvényt előállítjuk:

$$\varphi(u^2) = \varphi(u^1) + a^k \cdot c, \quad \varphi(u^3) = \varphi(u^1) + a^l \cdot c, \quad \varphi(u^3) = \varphi(u^2) + a^m \cdot c.$$

A kapott eredmények alapján ezek a relációk összeegyeztethetőek. Ekkor abból az egyszerű tényből, hogy az E^n tér egyszeresen összefüggő következik, hogy létezik egyértékű φ függvény, amely kielégíti 1)-t és 2)-t. Ezzel bebizonyítottuk a 2. állítást.

A 2. állításból levezetünk egy új relációt az a^k vektorok között. Legyen $P_k = P_0 + u^k$ ($k = 1, ..., 2s$ esetén), és legyen k, l két $\leq 2s$ index, melyre $u^l \neq \pm u^k$, azaz $l \neq k$ és $l \neq k \pm s$. Tekintsük paralleloéderek zárt láncát: $P_0, P_0 + u^k, P_0 + u^k + u^l, P_0 + u^l, P_0$. A közös lapok sorban tartalmazzák az $\frac{1}{2}u^k, u^k + \frac{1}{2}u^l, u^l + \frac{1}{2}u^k, \frac{1}{2}u^l$ pontokat. A 2. állítás 2. pontja miatt

$$\varphi(u^k + u^l) = \varphi(u^k) + a^l \cdot (u^k + \frac{1}{2}u^l) = \frac{1}{2}a^k \cdot u^k + a^l \cdot (u^k + \frac{1}{2}u^l),$$

$$\varphi(u^k + u^l) = \varphi(u^l) + a^k \cdot (u^l + \frac{1}{2}u^k) = \frac{1}{2}a^l \cdot u^l + a^k \cdot (u^l + \frac{1}{2}u^k),$$

Továbbá

$$a^k \cdot u^l = a^l \cdot u^k \quad (P_0 + u^k = P_k \;\; k = 1, ..., 2s \text{ esetén}). \tag{3.6}$$

A reláció triviálisan igaz $l = k$ vagy $l = k \pm s$ esetén. Így fennáll minden k, l párra, ahol $1 \leq k \leq 2s$, $1 \leq l \leq 2s$. Az utolsó reláció alapján származtathatunk egy explicit megadást a φ függvényre. Először kiválasztunk n pontot az u^k pontokból. Tekintsünk egy tetszőleges u rácspontot. Összeköthetjük P_0-t és $P_0 + u$-t paralleloéderek láncával: $P_0 + u^{(0)}, P_0 + u^{(1)}, ..., P_0 + u^{(p)}$, ahol $u^{(0)} = o$, $u^{(p)} = u$ és $u^{(r)} - u^{(r-1)}$ az $u^1, .., u^{2s}$ pontok egyike, $r = 1, ..., p$ esetén. Tehát az Y rácsot kigenerálják az $u^1, ..., u^{2s}$ pontok. Így kiválaszthatunk n darab indexet: $k_1, ..., k_n$ úgy, hogy az $u^{k_1}, ..., u^{k_n}$ pontok függetlenek. Tekintsünk újból egy tetszőleges u rácspontot. Ez a rácspont felírható az alábbi

$$u = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u^{k_i} \tag{3.7}$$

alakban, valamilyen $\xi_i = \xi_i(u)$ racionális együtthatókkal. Társítjuk az u ponthoz az

$$a = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a^{k_i} = \xi_i(u) a^{k_i} \tag{3.8}$$

pontot. A (3.6) egyenlőség következtében

$$a \cdot u^k = a^k \cdot u$$

minden u, a párra és $k = 1, ..., 2s$ indexekre. Ez alapján az egyenlőség alapján $k = 1, ..., 2s$ esetén

$$(a + a^k) \cdot (u + u^k) - a \cdot u = a^k \cdot u^k + a \cdot u^k + a^k \cdot u = 2a^k \cdot (u + \frac{1}{2}u^k). \tag{3.9}$$

Mivel $\varphi(o) = 0$ és $a \cdot u = 0$ ha $u = o$, a 2. állítás következtében

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}a \cdot u \quad \forall u \in Y \text{ esetén}, \tag{3.10}$$

ahol az a pontot u határozza meg a (3.8) képlet alapján.

A φ függvény megalkotása szorosan összefügg a Q kvadratikus formával. Legyen

$$Q(x) = Q(x_1, ..., x_n) = (\sum_{i=1}^{n} x_i a^{k_i}) \cdot (\sum_{i=1}^{n} x_i u^{k_i}) \tag{3.11}$$

(így $Q(u) = 2\varphi(u), u \in Y$ esetén). Tehát

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij} x_i x_j, \quad \text{ahol } s_{ij} = a^{k_i} \cdot u^{k_j}.$$

Itt az (s_{ij}) mátrix szimmetrikus a (3.6) összefüggés következtében. Figyeljük meg, hogy a (3.9) reláció igaz az általánosabb esetben, ahol u-t és a-t kicseréljük $\sum_{i=1}^{n} x_i u^{k_i}$-re illetve $\sum_{i=1}^{n} x_i a^{k_i}$-re, tetszés szerinti x_i együtthatókkal. Q definíciójából adódóan

$$Q(x+u^k) - Q(x) = 2a^k \cdot (x + \frac{1}{2}u^k).$$

Emiatt tetszőleges x-re és u-ra

$$Q(x-u-u^k) - Q(x-u) = 2a^k \cdot (x - u - \frac{1}{2}u^k) \quad (k = 1, ..., 2s \text{ esetén}) \tag{3.12}$$

Itt $\frac{1}{2}u^k \in F_k$, tehát $u + \frac{1}{2}u^k \in F_k + u$. Az $F_k + u$ lap a $H_{0,k} + u$ féltér határára esik, amely féltér tartalmazza a $P_0 + u$ testet, és felírható az $a^k \cdot (x - u - \frac{1}{2}u^k) \geq 0$ egyenlőtlenséggel. Ennélfogva a (3.6) összefüggés alapján

$$Q(x-u) \leq Q(x-u-u^k) \quad \text{ha } x \in H_{0,k} + u \tag{3.13}$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fent, ha x az $F_k + u$ lapot tartalmazó hipersíkba esik. Legyen u és v bármely két Y-beli rácspont, és x legyen a $P_0 + u$ test egy tetszőleges pontja. Kössük össze a P_0+u és P_0+v testeket egy $P_0+u^{(r)} (r = 0, 1, ..., p)$ paralleloéder-lánccal, ahol $u^{(0)} = u$ és $u^{(p)} = v$ úgy, hogy az x-et és valamely $y \in P_0 + v$ pontot összekötő szakasz metssze az összes $P_0 + u^{(r)}$ paralleloéder belsejét ($r = 1, ..., p-1$ esetén). A lánc minden egymás utáni testpárjára felhasználhatjuk (3.13)-t. Ezáltal megkapjuk a

$$Q(x-u) \leq Q(x-v) \quad \text{ha } \ x \in P_0 + u \tag{3.14}$$

egyenlőtlenséget, ahol egyenlőség akkor áll csak fent, ha $P_0 + u$ és $P_0 + v$ kapcsolódóak, ezenfelül x a $P_0 + u$ testet a $P_0 + v$ testtől elválasztó hipersík pontja. Ebből adódik, hogy P_0 azon x pontok halmaza, melyekre $Q(x) \leq Q(x-u) \quad \forall u \in Y$ esetén. Most már csak be kell látnunk, hogy a Q forma pozitív definit.

Tudjuk tehát, hogy $Q(u) \geq 0 \ \ \forall u \in Y$-ra. Közelítve egy tetszőleges $x \in E^n$ pontot racionális koordinátájú pontokkal, és felhasználva Q homogenitását eljutunk oda, hogy $Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in E^n$-re. A Q forma nem lehet pozitív szemidefinit, mivel ekkor azon x pontok halmaza, melyekre $Q(x) = 0$ nem lenne korlátos, ami ellentmond P_0 korlátosságával. Ez bizonyítja, hogy Q pozitív definit és ezzel befejeztük a tétel bizonyítását. ■

3.2. Venkov és McMullen tétele

A paralleloéderek egy szép karakterizációját adja a következő tétel, melynek bizonyítását 1954-ben Venkov, 1980-ban McMullen egymástól függetlenül találta. A tételhez egy új definíció szükséges.

3.2.1. Definíció (Öv). *Egy K poliéder öve azon $(d-1)$-dimenziós lapok gyűjteménye, melyek egy adott $(d-2)$-dimenziós $G \subset K$ lap eltoltjait tartalmazzák.*

Egyszer már definiáltam a bevezetőben, de most a jelölések, és a felelevenítés miatt újból megemlítem az alábbi definíciót:

3.2.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy K konvex test kitölti az E^d teret, ha van olyan T eltoláscsalád, hogy a K eltolásaival keletkezett $\mathscr{K} = \{K + t \mid t \in T\}$ testekből álló halmaz lefedi E^d-t, és két különböző $K+t_1$ és $K+t_2$ eltoltnak ($t_1 \neq t_2$) nincs közös belső pontja, tehát $\mathscr{K}$ az E^d tér egy elhelyezése is egyben. A K testet, és a $K + t$ eltoltakat, (konvex eltolású) csempéknek hívjuk.*

3.2.3. Tétel (Venkov, McMullen). *A feltételek, hogy*

1. *K egy poliéder,*
2. *K közzéppontosan szimmetrikus,*
3. *K bármely $(d-1)$-dimenziós lapja középpontosan szimmetrikus,*
4. *K bármely öve 4 vagy 6 darab $(d-1)$-dimenziós lapot tartalmaz,*

szükségesek és elégségesek egy konvex testhez ahhoz, hogy eltolásokkal kitöltse a teret.

Bizonyítás: K-val fogjuk jelölni a tételben szereplő testet, T jelöli az eltolásvektorok családját, d a dimenziószámot, mivel n most az öv elemszámát jelöli. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $o \in T$.

1. lemma *K egy poliéder.*

Bizonyítás: Először is vegyük észre, hogy ha t_1, $t_2 \in T$ $(t_1 \neq t_2)$, akkor $K + t_1$ és $K + t_2$ testek akkor és csak akkor metszik egymást, ha $t_1 - t_2$ a $\mathscr{D}(K)$ határára esik, ahol $\mathscr{D}(K) = K - K$ a K test centrikus szimmetrizáltját jelöli.

Így $\|t_1 - t_2\|$ alulról és felülről is korlátozható pozitív számokkal, így csak véges sok $K + t_i$ (mondjuk $i = 1, ..., k$) test érintkezik K-val. Másrészről a K határán levő pontoknak tartozniuk kell egy $K + t$ csempéhez valamely $t \in T \backslash \{o\}$ vektor esetén. Ebből adódik, hogy K határa $K \cap (K + t_i)$(valamely $i = 1, ..., k$) alakú halmazok véges uniójából áll elő, ezzel tehát beláttuk, hogy K egy korlátos, soklapú halmaz; így K poliéder.

2. lemma *K középpontosan szimmetrikus.*

Bizonyítás: A K csempe csak véges sok $-(K+t_i)$ halmazzal találkozik $t_i \in T$-re (mivel $\|t_k - t_l\|$, ahol $t_k, t_l \in T$ és $t_k \neq t_l$ alulról becsülhető egy pozitív számmal), legyen mondjuk $i = 1, ..., k$. Így K a középpontosan szimmetrikus $K \cap (-K - t_i)$ $(i = 1, ..., k)$ poliéderek uniójából áll elő, melyek belseje diszjunkt:

Mivel a $K + t_i$ halmazok egyszeresen fedik a teret, így a $-K - t_i = -(K + t_i)$ halmazok is, így K-t is egyszeresen fedik. A metszetek középpontosan szimmetrikusak, mert: Tegyük fel, hogy $x \in K \cap (-K - t_i)$. Legyen $x = -y - t_i$, ahol $y \in K$. Ekkor $y = -x - t_i \in -K - t_i$, mert $-x \in -K$. Ekkor $\frac{(x+y)}{2} = \frac{-t_i}{2}$ pontot választhatjuk a metszet szimmetriaközéppontjának.
Minkowskitól származik a következő, önmagában is érdekes állítás:

Állítás(Minkowski): *Ha középpontosan szimmetrikus, diszjunkt konvex poliéderek uniója egy konvex poliéder, akkor középpontosan szimmetrikus is.*

Ebből az állításból következik, hogy K maga is középpontosan szimmetrikus. Most is az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy K középpontja az origó.

3. lemma *K bármely $(d-1)$-dimenziós F lapja középpontosan szimmetrikus.*

Bizonyítás: A $(d-1)$-dimenziós F lapot csak $-F$-nek azon eltoltjai fedhetik le, melyekre a $K + t_i$ csempék (valamely $t_i \in T$ esetén) az F lapban metszik K-t. Így F-et kifejezhetjük középpontosan szimmetrikus $F \cap (-F + t_i)$ (valamely $i = 1, ...k$) alakú, $(d-1)$-dimenziós poliéderek véges uniójaként, melyek relatív belseje F affin burkára nézve diszjunkt. Az előzőhöz hasonlóan kijelenthetjük, hogy F középpontosan szimmetrikus. Az 1., 2., 3. lemmák mind Minkowski nevéhez köthetők; a megállapításai mind E^3-ra vonatkoznak, de általánosíthatóak magasabb dimenziókra is. McMullen megmutatta, hogy $d \geq 4$ esetén a 3-as lemmánál általánosabbat nem mondhatunk.

4. lemma *K minden öve 4 vagy 6 darab $(d-1)$-dimenziós lapot tartalmaz.*

Bizonyítás: Legyen a K test $(d-2)$-dimenziós G lapja által meghatározott övnek m számú szemközti pár $(d-1)$-dimenziós lapja; először feltesszük, hogy $m \geq 4$ és ellentmondáshoz jutunk majd. Kiválaszthatunk olyan $g \in G$ pontot úgy, hogy egyetlen $K + t$ testnek($\forall t \in T$) se essen j-dimenziós lapjára $j < d - 2$ esetén, és csak azokat a csempéket nézzük, melyek tartalmazzák g-t. A G-vel párhuzamos $(d-2)$-dimenziós lapok (így az övben lévők) K-val közbezárt hajlásszögeinek összege $(2m-2)\pi = 2(m-1)\pi$, ahol lapok hajlásszögén a kiegészítő síkok normálvektorai által bezárt szöget értjük, mely

bezárt szög $\leq \pi$.

Ezért előszöris megjegyezzük, hogy g nem lehet egyetlen csempe $(d-1)$-dimenziós lapjának relatív belső pontja se, mivel a hajlásszög minden $(d-2)$-dimenziós lappal kisebb, mint π, a hajlásszögek összege bármely két övbeli, nem szemközti $(n-2)$-dimenziós lap esetén nagyobb, mint $(m-1)\pi-(m-2)\pi=\pi$. Így tehát g kizárólag a $(d-2)$-dimenziós lapokon fekszik. De hasonlóan, a hajlásszögek összege három, páronként nem szemközti $(n-2)$-dimenziós lap esetén nagyobb, mint $(m-1)\pi-(m-3)\pi=2\pi$, így g nem tartozhat 3 csempéhez. Így $m \leq 3$, ahogy állítottuk.

K-nak az n darab $(d-1)$-dimenziós lapból álló övét n-övnek hívjuk. A fenti érvelés azt mutatja, hogy ha a g pont valamely másik csempe $(d-1)$-dimenziós lapjának relatív belső pontja, akkor $m=2$, így az öv egy 4-öv. Jegyezzük meg, hogy felhasználtuk azt a nyilvánvaló tényt, hogy K-nak a $(d-1)$-dimenziós F lapját csak a szemközti $-F$ lap eltoltjai fedhetik le. Ezért ha egy olyan csempe, mely F egy részletében metszi K-t, metszi g-t is egy $(d-2)$-dimenziós lapon, akkor a hajlásszöge g-be ugyanakkora (mivel vele szembenlévő), mint K-nak az adott övben G-vel szomszédos $(d-2)$-dimenziós F lappal bezárt hajlásszöge.

A feltételek elégségessége

Ahhoz, hogy a feltételek elégségességét bebizonyítsuk, be kell látnunk, hogy a megfigyelésünket elég a $\mathscr{K}$ lap-lap kitöltésekre korlátoznunk, amikor is két (különböző) $\mathscr{K}$-beli csempe metszete üres, vagy egy teljes közös lap. Az ilyen kitöltésekre nyilvánvalóan a szóbanforgó T eltolascsalád egy rácsot alkot.

Tegyük fel, hogy K kielégíti a tételbeli feltételeket, ekkor adhatunk egy megfelelő kitöltést az alábbi módon. Ha az F lap K-nak tetszőleges $(d-1)$-dimenziós lapja, akkor a szemben lévő $-F$ lap az F eltoltja. Tehát van egy t_F eltolásvektor, ami a $-F$ lapot az F lapba viszi; ekkor $(K+t_F)\cap K = F = -F+t_F$. Megjegyezzük, hogy $t_{-F}=-t_F$. Ilyen eltolásunk K minden egyes $(d-1)$-dimenziós lapjához van, és véve az egészegyütthatós lineáris kombinációjukat megkapjuk K eltoltjainak gyűjteményét $\mathscr{K}=\{K+t \mid t\in T\}$-t, ahol $T=\{\sum_F n_F t_F \mid n_f \in \mathbb{Z}\}$, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát jelöli.

Be kell látnunk, hogy $\mathscr{K}$ az E^d tér egy fedése és elhelyezése is egyben. Először a fedést látjuk be; ahogy látni fogjuk, ehhez nem kell kihasználnunk az övre vonatkozó feltételt. Bevezetünk néhány jelölést, amiket a továbbiakban használni fogunk. Legyen a G lap a K test tetszőleges lapja, ekkor definiáljuk rekurzívan a T_G részhalmazát T-nek: o $\in T_G$, és $t \in T_G$, ha van olyan $t' \in T_G$, hogy $K+t$ és $K+t'$ egy G-t tartalmazó közös $(d-1)$-dimenziós lapban metszik egymást. Megállapodás szerint $T_\emptyset = T$, vala-

mint $T_K = \{o\}$. Ha $K' = K + t \in \mathscr{K}$, és a G lap a K' test egy lapja, akkor legyen $\mathscr{K}_G = \{K' + t' \mid t' \in T_{G-t}\}$. Nyilván megfelelő választás, hogy legyen $\mathscr{K}_\emptyset = \mathscr{K}$. Vegyük észre, hogy míg T_G definíciója függ a kezdeti csempe választásától, melynek G egy lapja, addig $\mathscr{K}_G$ definíciója nem, mivel bármely $K'' \in \mathscr{K}_G$-ből visszanyerhetjük $\mathscr{K}_G$-t. Nem zárhatjuk ki a lehetőségét annak, hogy G lapja valamely $K'' \notin \mathscr{K}_G$ testnek; de ezt a lehetőséget nem fogjuk kihasználni. Láthatjuk azt is, hogy a $t \in T$ vektorokra $\mathscr{K}_{G+t} = \mathscr{K}_G + t$ $(= \{K' + t \mid K' \in \mathscr{K}_G\})$. Így az általánosság megszorítása nélkül a következő 2 lemmánkban feltesszük, hogy G a K test lapja. Azt mondjuk, hogy $\mathscr{K}_G$ *körülveszi* G-t, ha $\mathrm{relint}G \subseteq \mathrm{int}N(G)$, ahol $N(G) = \bigcup \mathscr{K}_G$.

5. lemma *K minden G lapjára $\mathscr{K}_G$ körülveszi G-t.*

Bizonyítás: Legyen $\dim G = r$. Az $r = d$ esetre a lemma triviális; ha $r = d - 1$, akkor világos, hogy $\mathscr{K}_G$ körülveszi G-t (és $T_G = \{o, t_G\}$).

Tegyük fel, hogy $r < d - 1$, és azt, hogy a lemma igaz K összes, legalább $(r + 1)$-dimenziós lapjára. Legyen $g \in \mathrm{relint}G$. A $g' \in K$ *ekvivalens* g-vel: $g' \sim g$, ha van olyan $g = g_0, g_1, ..., g_n = g'$ K-beli pontsorozat, hogy $k = 1, ..., n$ esetén létezik K-nak olyan $(d - 1)$-dimenziós F_K lapja, melyre $g_k = g_{k-1} + t_{F_K}$. Könnyen látható, hogy $\mathscr{K}_G = \{K - g' + g \mid g' \sim g\}$. Legyen S egy $(d - r - 1)$-dimenziós g középpontú gömb, mely merőleges $\mathrm{aff}\, G$-re, és elég pici sugarú ahhoz, hogy $\forall g' \sim g$ esetén az S gömb a $K - g' + g$ testnek csak azokat a $(d-1)$-dimenziós lapjat metszi, melyek tartalmazzák G-t. Hogy belássuk, hogy $\mathscr{K}_G$ körülveszi G-t, elég bebizonyítanunk, hogy $N(G)$ lefedi S-et. Ebben az esetben ha B egy r-dimenziós G-beli gömb g középponttal, akkor conv$(B \cup S)$ egy zárt környezete lesz g-nek $N(G)$-ben.

Vezessük be az alábbi jelölést: Ha $K' \in \mathscr{K}$ és G a K' test lapja (lehetséges, hogy $G = \emptyset$), akkor legyen

$$C(K', G) = \bigcup \{N(F) \mid F \text{ egy lapja a } K' \text{ testnek úgy, hogy } G \subset F\},$$

ahol K' a saját lapjának számít. Ha $F_1 \subseteq F_2$, akkor $N(F_1) \supseteq N(F_2)$, így a fenti uniót elég a K' test azon F lapjaira elvégezni, melyek $\dim G + 1$-dimenziósak és tartalmazzák G-t.

Minden $K' \in \mathscr{K}_G$ esetén $K' \cap S$ minden pontja a K' test valamely F lapjának relatív belsejében van, mely F lap szigorúan tartalmazza G-t. Az induktív feltevésünk miatt, bármely $\mathrm{relint}F \cap S$-beli pontnak van olyan S-beli környezete, mely környezetet tartalmazza az $N(F) \subseteq C(K', G)$ halmaz. Mivel $K' \cap S$ kompakt, így létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy a $K' \cap S$ halmaznak az S-be eső δ-sugarú környezetét tartalmazza a $C(K', G)$ halmaz.

Mivel $\mathscr{K}_G$ véges, használhatjuk ugyanazt a δ értéket minden $K' \in \mathscr{K}_G$-hez. Így S minden, az alábbi

$$\bigcup\{C'(K', G)|K' \in \mathscr{K}_G\} = N(G)$$

halmazba eső pontjának S-be eső, δ-sugarú környezetét tartalmazza $N(G)$. Mivel az összefüggő S halmaz metszi $N(G)$-t, levonhatjuk a következtetést, hogy $S \subseteq N(G)$, amit szerettünk volna látni.

Ugyanígy belátható, hogy $\mathscr{K}$ lefedi E^d-t. Mivel egy $K' \in \mathscr{K}$ csempe minden nemüres G lapjára a $\mathscr{K}_G$ halmaz körülveszi a G lapot, K'-nek van δ-sugarú környezete $C(K') = C(K', \emptyset)$-ben , és mivel $C(K + t) = C(K) + t, \forall t \in T$ esetén, így minden K' $\in \mathscr{K}$ testre ugyanaz a δ érték jó. Tehát eljutottunk oda, hogy $\mathscr{K}$ lefedi az E^d teret.

Azt mondjuk, hogy $\mathscr{K}_G$ *körülöleli* a G lapot, ha minden $K_1, K_2 \in \mathscr{K}_G$ esetén $K_1 \cap K_2$ mindkét csempe lapja. A $G = \emptyset$ esetre ez bizonyítaná, hogy $\mathscr{K}$ egy elhelyezése E^d-nek.

6. lemma *Ha G a K test egy lapja, akkor $\mathscr{K}_G$ körülöleli G-t.*

Bizonyítás: Most is indukciót alkalmazunk. Az állítás nyilvánvaló $\dim G = d$ vagy $d-1$ esetén. Ha $\dim G = d-2$, akkor a K test G-vel ekvivalens $(d-2)$-dimenziós lapjai (a $\sim$ ekvivalenciareláció szerint) mind egy G által meghatározott 4-övön helyezkednek el, vagy minden második $(d-2)$-dimenziós lapjai egy 6-övnek. Mindkét esetben K-nak ezekkel az ekvivalens $(d-2)$-dimenziós lapokkal bezárt hajlásszögeinek összege 2π, és a $\mathscr{K}_G$ halmazbeli 4, illetve 3 csempe körülöleli G-t.

Feltesszük, hogy $\dim G = r \leq d-2$, és minden legalább $(r+1)$-dimenziós lapra igaz a lemma. Elég megmutatnunk, hogy ha K', $K'' \in \mathscr{K}_G$ olyanok, hogy $\mathrm{int}(K' \cap K'') \neq \emptyset$, akkor $K' = K''$. Tegyük fel, hogy $K' \cap K'' \supset G$, de $\mathrm{int}(K' \cap K'') = \emptyset$. Legyen F egy maximális lapja K'-nek (az előző $\supset$ szerint) úgy, hogy $(\mathrm{relint} F) \cap K'' \neq \emptyset$. Az 5. lemma alapján $\mathrm{relint} F \subseteq \mathrm{int} N(F)$, így létezik olyan $K''' \in \mathscr{K}_F$ test, melyre $(K''' \cap K'') \neq \emptyset$. A $(K''' \cap K'') \neq \emptyset$ állításból az indukciós feltevést kihasználva következik, hogy $K''' = K''$ (mivel F egy G-nél nagyobb dimenziós lap amire az indukció miatt igaz az állítás), így $K'' \in \mathscr{K}_F$ is fennáll, és K' és K'' egy közös, F-et tartalmazó lapban metszik egymást. Mivel F maximális, következésképp $K' \cap K'' = F$, amit állítottunk.

Most tegyük fel, hogy $K', K'' \in \mathscr{K}_G$ testekre $\mathrm{int}(K' \cap K'') \neq \emptyset$. Definíció szerint találhatunk olyan $K' = K_0, K_1, ..., K_n = K''$ sorozatot $\mathscr{K}_G$-ben, hogy $i = 1, ..., n$ esetén $K_{i-1} \cap K_i$ egy közös $(d-1)$-dimenziós lapja a K_{i-1} és K_i testeknek, mely tartalmazza G-t. Nyilván feltehetjük, hogy $K_i \neq K_j$, ha $i \neq j$, mivel ekkor kihagyva a köztes részt egy megfelelő, rövidebb sorozatot kapunk. Egy ilyen csempesorozatot $\mathscr{K}_G$ *erős láncának* hívjuk. Ha $g \in \mathrm{relint} G$, és S az 5. lemma bizonyításában szereplő $(d-r-1)$-dimenziós,

g középpontú kis gömb, akkor ez a $\mathscr{K}_G$-beli erős lánc létrehoz egy $(d-r-1)$-dimenziós gömbi poliéderekből álló erős láncot, ahol $Q_i = K_i \cap S (\forall i = 0, ..., n$ esetén).

Válasszunk ki egy fix $x \in \mathrm{int}(Q' \cap Q'')$ pontot (itt az *int* azt jelöli, hogy x az S relatív belső pontja), és tekintsünk egy L gömbi sokszöghurkot x alappal (tehát az L hurok az S gömb véges sok főkörívéből tevődik össze, és x-ből indul és x-ben végződik). Egy ilyen L hurok *kapcsolódó* a $Q' = Q_0, Q_1, ..., Q_n = Q''$ erős lánccal, ha L folyamatosan halad a Q_{i-1}-ekből a Q_i-kbe. $(i = 1, ..., n)$. Figyeljük meg, hogy L-nek megengedjük, hogy visszatérjen egy Q_i-be, miután átment rajta, de csak akkor, ha L azon a ponton keresztül halad egy rákövetkező Q_j-be. Így az L hurok $n+1$ darab $L_i \subseteq Q_i$ $(i = 0, ..., n)$ körívrész uniója, melyek közül néhány ponttá fajulhat úgy, hogy L_{i-1} és L_i közös végpontja $Q_{i-1} \cap Q_i$-ben van; természetesen az L_n és L_0 ívek az x pontban találkoznak. L-et *belső* huroknak hívjuk, ha L_i(esetleg kis változtatással) beleesik az $\mathrm{int} Q_i \cup \mathrm{relint}(Q_{i-1} \cap Q_i) \cup$ relint $(Q_i \cap Q_{i+1})$ halmazba $(i = 1, ..., n)$; így L csak a Q_i-k belsejét és a közös $(d-1)$-dimenziós $Q_{i-1} \cap Q_i$ lapok(amiken átmegy) relatív belsejét metszi.

Bevezetjük a $\lambda(L)$ jelölést az L hurok gömbi ívhosszára, és λ legyen az összes olyan $\lambda(L)$ szám infimuma, melyekre L egy x alapú (belső) hurok, és kapcsolódik valamely Q'-ből Q''-be menő erős lánccal. Be fogjuk látni, hogy $\lambda = 0$, amiből következik, hogy $Q' = Q''$. Megjegyezzük, hogy ha egy L hurok kapcsolódik egy adott erős lánchoz, akkor van egy L' belső hurok is, mely ugyanehhez az erős lánchoz kapcsolódik úgy, hogy $\lambda(L')$ tetszőlegesen megközelíti $\lambda(L)$-t.

A bizonyításhoz kihasználjuk, hogy $\dim S = d - r - 1 \geq 2$, ezért S egyszeresen összefüggő, így az S-beli x alapú hurkok összehúzhatóak x-be. Tegyük fel, hogy $\lambda > 0$, és legyen $Q' = Q_0, Q_1, ..., Q_n = Q''$ egy Q'-ből Q''-be menő erős lánc, amihez kapcsolódik egy x alapú L_0 hurok, $\lambda(L_0) = \lambda$ hosszal. Jegyezzük meg, hogy mivel az S-beli x alapú hurkok tere kompakt , így ilyen L_0 hurok létezik. Az elején kicsit elmozdíthatjuk x-et int $Q' \cap Q''$-n belül, hogy biztosítsuk, hogy semelyik, egyetlen főkörből álló hurok se lehessen minimális. L_0 nem lehet belső hurok, így az L_0 huroknak minden Q_i-be eső része egy főkör egyetlen körívéből áll, esetleg elfajul egyetlen ponttá.

Az L_0 hurokhoz van olyan Q_i, hogy egy lapjának $F \cap S$ (ahol F a megfelelő $K_i \in \mathscr{K}_G$ egy lapja) relatív belsejével bezárt szöge nem π, és $G \subset F$; nyilván $\dim F \leq d-2$, így F legalább két láncbeli K_i test közös lapja. Metssze L_0 F-et y-ban. Mivel $y \in$ relint $F \subseteq$ int $N(F)$ (az 5. lemma alapján), így y-nak létezik $N(F) \cap S$ halmazbeli W δ-sugarú környezete. Válasszunk $u, v \in L_0 \cap W$ pontokat, melyeket y elválasztja L_0-ban, és cseréljük ki az L_0 hurok u és v közti részét az $uv \subset W \subseteq \mathrm{int}(N(F) \cap S)$ főkörívvel, hogy kapjunk egy új L_1 hurkot, melyre $\lambda(L_1) < \lambda(L_0) = \lambda$. Be kell látnunk, hogy L_1 is kapcsolódik egy Q'-ből Q''-be futó erős lánchoz. Ha ez sikerül,akkor ellentmondáshoz jutunk, mivel feltettük, hogy λ minimális. Legyen s minimális és t maximális úgy, hogy

$u \in Q_s$ és $v \in Q_t$ (szükségképpen $s \neq t$, mivel ellenkező esetben $uv \subseteq Q_s$ lenne, és L_0 nem görbülne y-ban). Válasszunk u_k, v_k sorozatokat úgy, hogy $(u_k) \subset W \cap \mathrm{int}Q_s$ és $\lim u_k = u$, valamint $(v_k) \subset W \cap \mathrm{int}Q_t$ és $\lim v_k = v$, ahol $u_k v_k \subset W$ általánosan helyezkedik el $\mathscr{K}_F$-re nézve, tehát $u_k v_k$ nem metszi egyetlen $\mathscr{K}_F$-beli csempe $(d-1)$-nél kisebb dimenziós lapját sem. Ez lehetséges, mivel $\mathscr{K}_F$ véges. $\mathscr{K}_F$ végességéből szintén következik, hogy eljuthatunk k-nak egy megfelelő részsorozatába ha szükséges, és tegyük fel, hogy $u_k v_k$ ugyanazon csempéken halad át minden k-ra, mondjuk $Q_s = \tilde{Q}_0, \tilde{Q}_1, ..., \tilde{Q}_m = Q_t$, ahol $\tilde{Q}_j = \tilde{K}_j \cap S$, és $\tilde{K}_j \in \mathscr{K} (j = 0, ..., m)$.

Most használjuk ki az $r = \dim G$-re vonatkozó induktív feltevésünket. Mivel $\mathscr{K}_F$ körülöleli F-et, $j = 1, ..., m$ esetén $\tilde{Q}_{j-1}$ és $\tilde{Q}_j$ metszi egymást egy közös $(d-r-2)$-dimenziós lapban, ami a közös $\tilde{K}_{j-1} \cap \tilde{K}_j$ $(d-1)$-dimenziós lapból származik (amely tartalmazza F-et, így G-t is). Végül, mivel $\lim(u_k v_k) = uv$, azt kapjuk, hogy ha kicseréljük a $Q_{s+1}, ..., Q_{t-1}$ részt az eredeti erős láncunkban $\tilde{Q}_1, ..., \tilde{Q}_{m-1}$-gyel, akkor szintén egy erős láncot kapunk, ami az L_0-nál rövidebb L_1-gyel kapcsolódó.

A fő tétel bizonyításához alkalmazhatjuk pontosan ugyanazt az érvelést amit a 6. lemma $\mathscr{K}$-ra alkalmaz, kicserélve S-et E^d-re, és kihasználva, hogy E^d egyszeresen összefüggő. Egyetlen új magyarázat szükséges: Ahogy láttuk, létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $C(K)$ tartalmazza K test δ-sugarú környezetetét. Tehát ha $C(K)$ N darab csempéből áll össze, akkor egy belső hurok (ami definíció szerint nem látogat újra egyetlen csempét se) legfeljebb N csempét metszhet 2δ hosszon belül. Ebből következik, hogy a K'-ből K''-be vezető erős láncunk hossza: n felülről korlátozható a feltételezett minimális hosszú, x alapú belső hurkok hosszának konstansszorosával. (Durva becsléssel $n \leq N\lambda/2\delta$.) ■

Ugyanezen tétel egy másik poliéder osztályra, bizonyos speciális zonotópokra szintén bizonyított, (Shephard [1974] és McMullen [1975]), ha a dimenzió $d \leq 4$.

4. fejezet

Problémák, alkalmazások

4.1. A legsűrűbb gömbelhelyezés

Első fontos probléma a legsűrűbb gömbelhelyezés problémája. Gauss [9] oldotta meg 2-dimenzióban, 3-dimenzióra elfogadjunk T. Hales [19] bizonyítását, ám magasabb dimenziókra még nyitott a probléma: milyen sűrűn tudunk nagyszámú labdát egymás mellé helyezni. Egy elhelyezés sűrűségének mérésekor természetes, hogy felmerül a D – V cella ötlete. Egy elhelyezés Δ sűrűségének pontos definíciója az alábbi:

$$\Delta = \frac{\text{egy labda térfogata}}{\text{a bázisok által kifeszített parallelepipedon térfogata}} = \frac{\text{egy labda térfogata}}{\text{a } D \text{ cella térfogata}}.$$

A síkban az optimális elrendezés a szabályos háromszög (vagy szabályos hatszög) rács, melyet egy szabályos háromszög két élvektora határoz meg. Erre az elrendezésre a sűrűség:

$$\Delta = \frac{\pi}{\sqrt{12n}}$$

Magasabb dimenzióban az általános probléma nyitott. Ha rácsszerűen helyezem el a gömböket, $n \leq 8$ esetén megvan az optimális megoldás. A probléma általánosítása konvex testek optimális elrendezése n-dimenziós térben.

4.2. Adatkvantálás

Másodiknak megemlíthető az adatkvantálás problémája, mely a következő: Tegyük fel, hogy néhány adat (jel) egyenletesen el van osztva egy nagy, E^n -beli S halmazban. Ha van egy L rácsunk, ahol a bázisvektorok determinánsa 1, és S minden pontját helyettesítjük egy x vektorral, mely a pontból a legközelebbi rácspontba mutat, akkor az átlagos

négyzetes hiba jelenként egy L rácshoz kapcsolódva az alábbi

$$G(L) = \int\limits_D |x^2| \mathrm{dx}$$

integrállal definiálható, ahol D az L rács D – V cellája. A feladat tehát az, hogy megkeressük az 1 determinánsú rácsok között azt, ahol ez az átlag minimális. Conway és Sloane [4] azt sejtik, hogy magasabb dimenziókra a megoldást az E^n térre vett legsűrűbb labda elhelyezés probléma megoldásakor kapott rács polárisa (másnéven duálisa) adja.

E mennyiség normált formáját D *normálizált második momentumának* hívjuk, mely egy dimenziótlan valós szám:

$$G^*(L) = \frac{1}{n} \mathrm{Vol}(D)^{-1-\frac{2}{n}} \int\limits_D |x|^2 \mathrm{dx}.$$

4.3. Numerikus integrálás kérdése

A harmadik probléma a numerikus integráláshoz köthető. Legyen G egy Jordan mérhető halmaz az E^2 síkban, és ω legyen egy folytonos, nemcsökkenő valós függvény a $[0, \infty)$ intervallumon, melyre $\omega(0) = 0$. Jelölje $\mathcal{H}^\omega(G)$ az olyan G-beli f valós függvények halmazát, melyekre

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|) \; x, y \in G\text{-re}.$$

Ekkor ki akarunk választani olyan $x^1, ..., x^k \in G$ pontokat és $\alpha_1, ..., \alpha_k$ valós számokat rögzített $k = 1, 2...$ esetén, hogy a maximális hiba:

$$\max \left\{ \left| \int\limits_G f(x) \mathrm{dx} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i) \right| \; f \in \mathcal{H}^\omega(G) \right\}$$

minimális legyen. A D – V cellák elméletét és L. Fejes-Tóth [8] néhány eredményét használva, Babenko [1] megtalálta az aszimptotikusan optimális x^i, α_i választást, ha k tart végtelenbe. Az eredmény magasabb dimenziókra kiterjesztése meglehetősen nehéznek tűnik.

4.4. Legközelebbi rácspont probléma

A legközelebbi rácspont probléma a rácsgeometriában, konvex optimalizációban, és a matematika egyéb területein is fontos probléma. A kérdés az, hogyan keressük meg egy

rögzített L rács azon rácspontját, amely egy adott E^n-beli ponthoz legközelebb van. Nyilvánvalóan az adott $\xi \in E^n$ pont a keresett x pont D – V cellájában, $D(x)$-ben lesz. Ha találni tudunk egy rácshipersíkot úgy, hogy azt lefedjék L-nek azon D – V cellái, melyek középpontja ebben a hipersíkban van, akkor a legközelebbi rácspont probléma a ξ pontra és az L rácsra leegyszerűsíthető lenne a legközelebbi rácspont problémájára a ξ pontnak erre a hipersíkra való vetületére: ξ'-re, és L-nek azon L^* $(n-1)$-dimenziós alrácsára, mely ebbe a hipersíkba esik. Ezzel az ötlettel egy jó algoritmust gyárthatnánk az eredeti problémára.

Sajnos általános esetben, magasabb dimenziókban nem feltétlenül létezik ilyen hipersík, konkrétabban az alábbi tétel áll fent, melyet G. Horváth Ákos fogalmazott meg:

4.4.1. Tétel ([11]). *Létezik olyan n-dimenziós L rács $n = 6, 7, 8$ dimenzió esetén, melyre nincs olyan L^* $(n-1)$-dimenziós alrács, ami kielégíti az alábbi feltételt:*

$$U(D + v \mid v \in L^*) \supset Lin[L^*],$$

ahol D jelöli az L rács D – V celláját, Lin$[L^*]$ pedig az L^* alrács által kifeszített $(n-1)$-dimenziós alteret.

A bizonyítás azt a tényt használja ki, hogy ha az L^* alrács rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, akkor az L és L^* rács minimáik száma közti különbség nem nagyobb, mint $4(n-1)$. Ellenben K. Bezdek és T. Ódor [2] bebizonyították, hogy $n \leq 3$ esetén tudunk adott L rácshoz a feltételeknek megfelőle L^* alrácsot választani.

A legközelebbi rácspont probléma kapcsán felvetődik az alábbi, speciálisabb változat: Található-e egy ponthoz legközelebbi rácspont az őt tartalmazó megadott típusú alapparallelogramma csúcsai között?

Köszönetnyilvánítás

Végezetül szeretném megköszönni Dr. G. Horváth Ákos Tanár Úrnak, hogy tanácsaival és végletesen hosszú türelmével segítette dolgozatom elkészülését.

Irodalomjegyzék

[1] V.F.BABENKO, On the optimal cubature formulae for certain classes of continuous functions. *Analysis Math.* **3** (1977).

[2] K.BEZDEK-T.ÓDOR, Λ-parallelotopes. (A research problem) *Periodica Math. Hung.* **24(3)** (1992).

[3] J.W.S.CASSELS, An Introduction to the geometry of numbers, *Springer-Verlag*, Berlin (1959).

[4] J.M.CONWAY-N.J.A.SLOANE, Sphere Packings, Lattices and Groups. Springer-Verlag, (1988).

[5] B.N.DELONE, Sur la partition reguliere de l'espace a 4 dimensions, *Izv. Akad. Nauk SSSR Otdel. Fiz.-Mat. Nauk* **7**, (1929).

[6] M.DEZA-V.GRISHUKHUN, Once more about Voronoi's conjecture and space tiling zonotopes (2002)

[7] G.L.DIRICHLET, Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestinumten ganzen Zahlen. *J.Reine und Angew. Math.* **40**(1850).

[8] L.FEJES TÓTH, Regular figures, *Pure and Applied Mathematics, Vol.* **48**, Pergamon Press, 1964.

[9] K.F.GAUSS, Besprechung des Buchs von L.A.Seeber, Untersuchnugen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen usw, *Göttingsche Gelehrte Anzeigen* (1831).

[10] Á.G.HORVÁTH, On the nearest lattice point problem. *Annales Univ. Sci. Budapest* (manuscript)

[11] Á.G.HORVÁTH, On a question of K.BEZDEK and T.ÓDOR on Λ-parallelotopes, *Periodica Math. Hung.* **24(3)** (1992).

[12] Á.G.HORVÁTH, On the DIRICHLET-VORONOI cell of unimodular lattices (manuscript) (1995).

[13] Á.G.HORVÁTH, On Dirichlet – Voronoi cell {Part I. Classical problems} *Per. Poly. Ser Mech. Eng.* (accepted) (1995).

[14] Á.G.HORVÁTH, On Dirichlet – Voronoi cell {Part II. Diagrams} *Per. Poly. Ser Mech. Eng.* (accepted) (1997).

[15] Á.G.HORVÁTH, On the boundary of an extremal body, *Beitr äge zur Algebra und Geometrie* Vol. **40** (1999).

[16] Á.G.HORVÁTH, On the number of the minima of N-lattices. *Colloquia Math. Soc. J.Bolyai 63.Intuitive Geometry, Szeged,*(1991).

[17] P.M.GRUBER-C.G.LEKKERKERKER, Geometry of numbers, North-Holland Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo (1987).

[18] P.M.GRUBER-J.M.WILLIS, Convexity and Its Applications, Birkhäuser (1980).

[19] T.C.HALES, Historical overview of the Kepler conjecture, Discrete & Computational Geometry, an International Journal of *Mathematics and Computer Science 36* (2006).

[20] P.MCMULLEN, Convex bodies which tile space by translations, Mathematika **27** (1980).

[21] H.MINKOWSKI, Über die positiven quadratischen Formen und über Kettenbruchänliche Algorithmen, Ges. Abh. I

[22] H.MINKOWSKI, Geometrie der Zahlen, Leipzig und Berlin (1910).

[23] B.A.VENKOV, On a class of Euclidean polytopes (in Russian), Vestnik Leningrad. Univ. (Ser. Mat. Fiz. Him.) 9 (1954).

[24] G.F.VORONOI, Nouvelles applications des parametres continus
a la theorie des formes quadratiques, *J.Reine und Angew. Math.* **134** (1908).

[25] G.F.VORONOI, Nouvelles applications des parametres continus
a la theorie des formes quadratiques II, *J.Reine und Angew. Math.* **136** (1909).