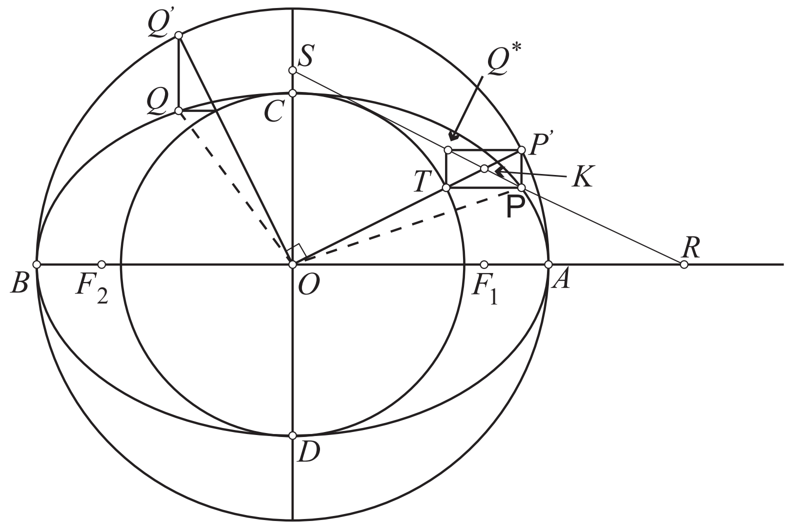
0.1. Az affinitások használata kúpszeleteknél

Az kúpszeletet kúpszeletbe visz és nem változtatja a kúpszelet végtelen távoli pontjainak a számát. Ezért a metrikus típusokat őrzi. Igen jól használható szerkesztési és bizonyítási feladatok megoldására, lássunk erre néhány példát.

0.1.1. Az ellipszis mint kör képe

Az ellipszis affinitással mindig körbe vihető, hiszen tekintve a főkör egy sugarát, annak végpontját a $\frac{b}{a}$ arányú nagytengelyre merőleges irányú affinitásnak alávetve, az ellipszis egy pontjához jutunk.



1. ábra. Affin alapábra

Valóban,ha a P' pont távolsága a szokott jelölések mellett x illetve y a kistengelytől illetve a nagytengelytől, akkor egyrészt $x^2 + y^2 = a^2$ másrészt a P ellipszis pont távolsága a két fókusztól, rendre $\sqrt{(x+c)^2 + \left(\frac{b}{a}y\right)^2}$ illetve $\sqrt{(x-c)^2 + \left(\frac{b}{a}y\right)^2}$. Azaz

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+c)^2 + \left(\frac{b}{a}y\right)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + \left(\frac{b}{a}y\right)^2} = 2a$$

is fennáll, hiszen

$$\sqrt{(x+c)^2 + \left(\frac{b}{a}y\right)^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} = \sqrt{2xc + a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+\left(\frac{b}{a}y\right)^2}+\sqrt{(x-c)^2+\left(\frac{b}{a}y\right)^2}\right)^2=\left(2xc+a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}\right)+$$

$$+\left(-2xc+a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}\right)+2\sqrt{\left(2xc+a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}\right)\left(-2xc+a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}\right)}=$$

$$=2\left(a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}\right)+2\sqrt{\left(a^2-\frac{c^2x^2}{a^2}\right)^2}=4a^2.$$

Ezek szerint, ha a kitengely meg a nagytengely fölé egyaránt megrajzoljuk a kört, akkor egy közös OP' sugár segítségével a megfelelő P ellipszis ponthoz úgy juthatunk, hogy a T kiskörrel alkotott metszéspontból a nagytengellyel húzunk párhuzamos egyenest, majd a P' pontból a kistengellyel, és a két egyenes metszéspontjaként a P ellipszisponthoz jutunk. Ezt a szerkesztést *kétkörös módszernek* nevezzük. Ha két merőleges körsugarat tekintünk ábránkon, az ezekhez tartozó OP, OQ ellipszis félátmérőket *konjugáltaknak* nevezzük. Forgassuk el az $OQ'Q$ zászlócskát kilencven fokkal az óramutató járásával megegyező irányban. Ekkor Q' pont P' pontba fordul, a Q pedig a Q^* helyzetbe kerül. A kapott PTQ^*P' négyszög oldalai párhuzamosak a tengellyel, tehát téglalap. A Q^*P átlója messe a tengelyeket R-ben illetve S-ben. Ezért $|\overline{KT}|=|\overline{KP}|$ és mivel TP egyenes párhuzamos OR egyenessel $|\overline{KO}|=|\overline{KR}|$ következésképpen

$$|\overline{PR}|=|\overline{OT}|=b.$$

Hasonlóképpen

$$|\overline{PS}|=|\overline{P'O}|=a$$

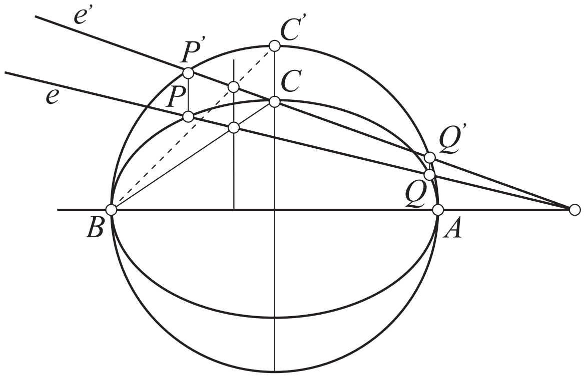
azaz

$$|\overline{SR}|=a+b$$

függetlenül a P pontnak az AC ellipszis íven elfoglalt helyétől. Ez alapján úgy is rajzohatunk ellipszis pontokat, hogy egy $a+b$ hosszú szakasz végpontjait a tengelyek egyeneseire illesztjük, majd megjelöljük az $a:b$ arányú osztópontot rajta. Ezen elv alapján működtek a mechanikus ellipszis rajzoló gépek az *ellipszográfok*. A módszer az ábrázoló geometria világában *papircsík módszernek* van nevezve, de hívhatnánk létrás módszernek is, hiszen egy falhoz támasztott létrán álló ember a létra megcsúszása esetén ellipszis pályán fog a talaj síkjához közeledni.

A fenti észrevétel alapján, két konjugált ellipszis átmérő ismerete elegendő az ellipszis meghatározó adatainak a megszerkesztéséhez. Tegyük fel ugyanis, hogy a Q, O, P pontok adottak és tudjuk, hogy $\overline{OQ}$ illetve $\overline{OP}$ két konjugált félátmérő. Ekkor az Q pontnak az QOP tompaszögű tartományban való kilencven fokos elforgatásával a Q^* ponthoz jutunk. a Q^*P egyenesből a $\overline{Q^*P}$ szakasz K felezőpontja mint középpont körül megrajzolt O-n áthaladó körvonal kimetszi az R és S pontokat, melyek meghatározzák a tengely egyeneseket. Adódnak a fél tengely hosszak is a $\overline{PS}$ illetve a $\overline{PR}$ szakaszok hosszaként. A nagyobbik a nagytengely félhossza ezt mérjük a konjugált átmérők által meghatározott, hegyesszögű tartományban haladó tengelyre, hiszen csak ez lehet a nagytengely. Megkaptuk az ellipszis csúcspontjait, melyekből az ellipszis fókuszai, vezéregyenesei, vezérkörei megszerkeszthetők. Első leírója neve után ezt a szerkesztést *Rytz szerkesztésnek* nevezzük.

Szép egyszerű szerkesztést kínál az affinitás az ellipszis és egyenes metszéspontjainak meghatározására. Az ellipszist és az adott egyenest merőleges tengelyes affinitással a főkörébe illetve egy újabb egyenesbe transzformáljuk, majd a transzformált alakzatok metszéspontjait az inverz leképezéssel vissza transzformáljuk a kiindulási egyenesre. A szerkesztés könnyen nyomonkövethető a ?Ábrán.

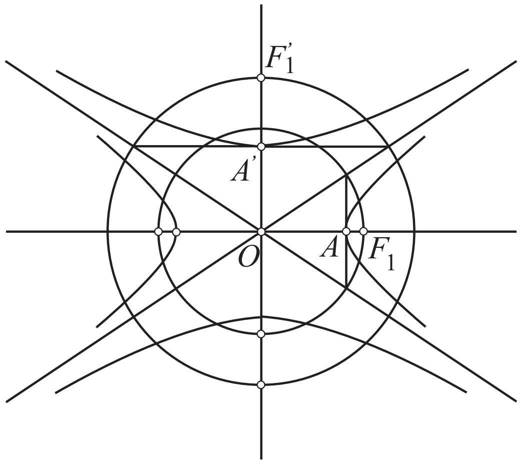


2. ábra. Ellipszis és egyenes metszéspontja

0.1.2. Hiperbola és affinitás

A hiperbolák affin osztálya nem tartalmaz a körhöz hasonló elfajuló elemet. Mégis van egy kitüntetett hiperbola az *egyenlőoldalú hiperbola*. Tekintsük a következő szerkesztési feladatot. Adott a hiperbola aszimptotája és a $2a$ távolság szerkesztendő a hiperbola. Világos, hogy a feladatnak két megoldása van, mert nincs megadva, hogy az aszimptoták szögfelezői közül melyikre esik a valós és melyikre a képzetes tengely.

A két megoldást a ?Ábrán láthatjuk. Rögtön adódik, hogy abban az esetben, ha az aszimptoták merőlegesek egymásra, a két megoldás egybevágó, egymás kilencven fokos elforgatottjai. Ezeket a hiperbolákat nevezzük egyenlőoldalú hiperboláknak. Tetszőleges hiperbola affinitásal egyenlőoldalú hiperbolába vihető. Ha a Descartes koordinátarendszert úgy vesszük fel, hogy a tengelyek az aszimptotákkal egyezzenek meg, a jól ismert $y = \frac{1}{x}$ függvény gráfként való előállításhoz juthatunk az egység alkalmas választása után. Azonban ebből az előállításból a hiperbola két szép tulajdonsága rögtön adódik. Mivel $1 = xy$ egy $P(x, y)$ pont két koordinátájára ezért az OP_xPP_y téglalap területe mindig egy. Mivel az affinitás területarány tartó, tetszőleges hiperbola esetén fennáll,



3. ábra. Hiperbola pár

hogy *tetszőleges pontján át az aszimptotákkal húzott párhuzamosok és az aszimptoták által meghatározott paralelogramma területe független a pont választásától.*

A másik érdekes észrevétel adódik, ha koordinátarendszerünket a tengelyekkel megegyező irányúnak választjuk. Ekkor a pozitív első koordinátával rendelkező ág pontjainak koordinátái $(\cosh t, \sinh t)$ koordinátákkal adhatók meg, ahol t valós paraméter. A t_1, t_2 paraméterekhez tartozó P_1, P_2 pontokat összekötő egyenes paraméteres vektoregyenlete:

$$\overrightarrow{OP} = (\cosh t_1, \sinh t_1) + \tau(\cosh t_1 - \cosh t_2, \sinh t_1 - \sinh t_2),$$

vagy a második pontot használva az egyenletben

$$\overrightarrow{OQ} = (\cosh t_2, \sinh t_2) + \rho(\cosh t_1 - \cosh t_2, \sinh t_1 - \sinh t_2).$$

Ha P az $x = y$ aszimptotának az összekötő egyenessel való metszéspontja, akkor az első egyenletből

$$\tau = \frac{\cosh t_1 - \sinh t_1}{(\sinh t_1 - \sinh t_2) - (\cosh t_1 - \cosh t_2)}$$

és

$$\overrightarrow{P_1P} = \tau(\cosh t_1 - \cosh t_2, \sinh t_1 - \sinh t_2).$$

A második felírásból azon Q pontjára az összekötő egyenesnek, mely az $x = -y$ aszimptotára esik,

$$\rho = \frac{\cosh t_2 + \sinh t_2}{-(\sinh t_1 - \sinh t_2) - (\cosh t_1 - \cosh t_2)}$$

és

$$\overrightarrow{P_2Q} = \rho(\cosh t_1 - \cosh t_2, \sinh t_1 - \sinh t_2)$$

adódik. Azonban $\tau = -\rho$ mert

$$(\cosh t_1 - \sinh t_1)[-(\sinh t_1 - \sinh t_2) - (\cosh t_1 - \cosh t_2)] =$$

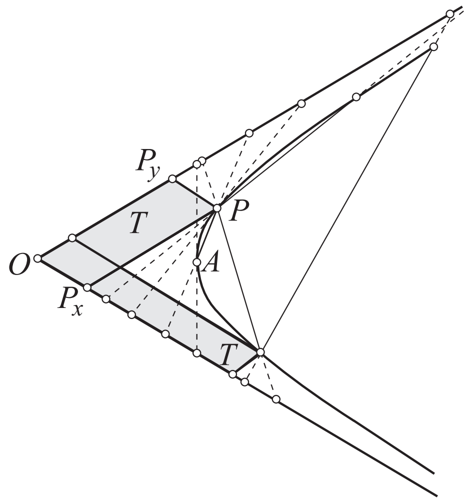
$$= \cosh t_1 \sinh t_2 - \sinh t_1 \cosh t_2 = \sinh(t_2 - t_1),$$

míg

$$-(\cosh t_2 + \sinh t_2)[(\sinh t_1 - \sinh t_2) - (\cosh t_1 - \cosh t_2)] =$$

$$= -(\cosh t_2 \sinh t_1 - \sinh t_2 \cosh t_1) = -\sinh(t_1 - t_2) = \sinh(t_2 - t_1).$$

Ezért $|\overline{P_1P}| = |\overline{P_2Q}|$ azaz a *hiperbolát azonos ágán két pontban metsző egyenesnek a görbe és az aszimptoták közé eső darabjai egyenlő hosszúak.* Az állítás nyilván akkor is igaz, ha a két metszéspont különböző ágra esik, ezt is hasonlóképpen ki lehet számítani. Ha a metsző egyenes érintővé egyszerűsödik az állítás a következő szintén érdekes észrevételt adja: *a hiperbola érintőjének az érintési pont és az aszimptoták közé eső darabjai egyenlő hosszúak.*

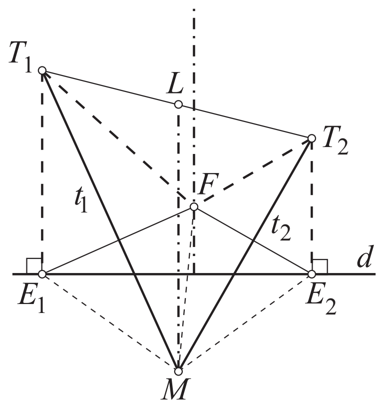


4. ábra. Gyorsszerkesztés hiperbolánál

Ezeket az állításokat fel lehet használni arra, hogy az aszimptoták és egy pont ismeretében további hiperbola pontokat szerkesszünk, hiszen a ponton áthaladó sugarak metsző egyeneseket határoznak meg, amelyeken a másik metszéspont az említett észrevétel alapján rögtön adódik. Ezt a szerkesztési eljárást nevezik a hiperbola *gyorsszerkesztésének.* A gyorsszerkesztés az ?Ábrán látható.

0.1.3. Parabola gyorsszerkesztése

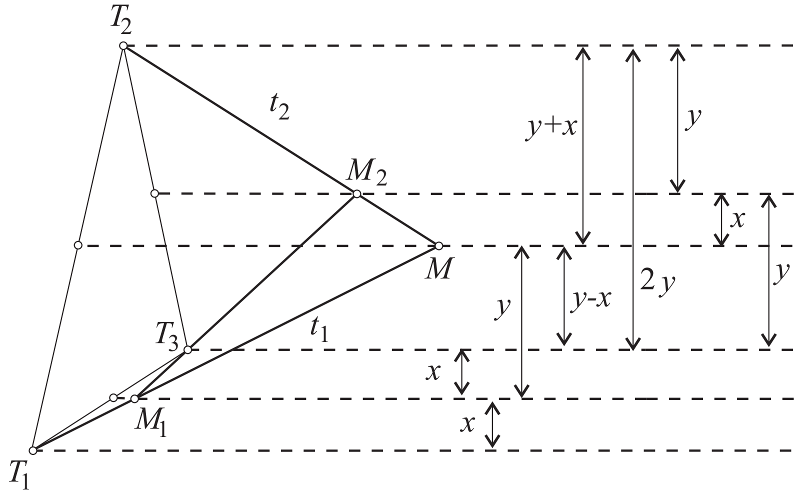
A parabolák affin osztálya igazából hasonlósági osztály, igaz ugyanis, *hogy tetszőleges két parabola hasonló egymással.* Tekintsük ugyanis a meghatározó ada-



5. ábra. A parabolát két érintő az érintési ponttal meghatározza.

taikat. Nyilván a sík alkalmas eltolásával elérhető, hogy a két fókusz megegyezzen. Ezután az egyik tengely a közös fókusz körüli forgatással a másikba vihető. Végül a fókuszból mint középpontból való alkalmas nyújtás az egyik vezéregyenest a másikba viszi. Az utolsó lépés hasonlóság az első kettő egybevágóság így a leképezések szorzata hasonlóság.

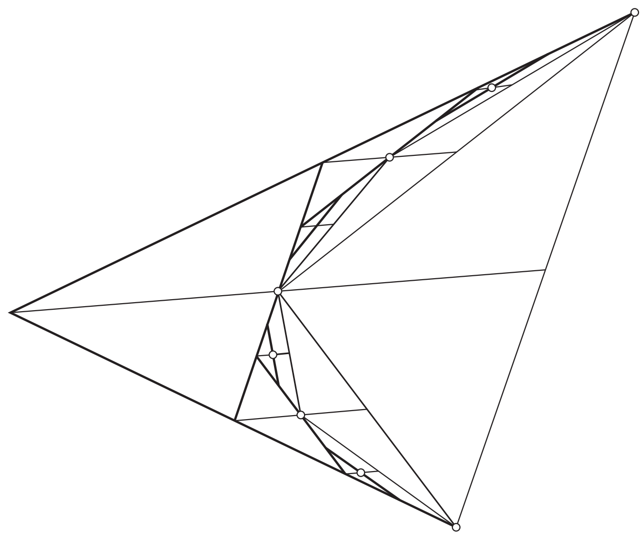
Igen fontos volt a projektív részben kimutatott következő állítás: *a parabola két érintőjének a metszéspontját összekötve az érintési pontok által meghatározott szakasz felezőpontjával, a tengellyel párhuzamos egyeneshez jutunk.* Ezt közvetlenül is könnyen beláthatjuk.



6. ábra. Három érintő viszonya parabolánál.

Legyen a két érintő t_1 és t_2 az érintési pontok T_1 és T_2. A két érintő metszéspontja M az érintési pontokat összekötő szakasz felezőpontja L. Az M pont egyenlő távol van a két érintőhöz tartozó ellenpontoktól, mert ezen közös távolság éppen a fókusztól mért távolság az érintő egyenesek szakaszfelező merőleges volta miatt. Így az $E_1ME_2\triangle$ háromszög egyenlőszárú, ezért az M-ből induló magasság, súlyvonal is egyben. Azaz ezen egyenes párhuzamos a T_1E_1 illetve T_2E_2 egyenesekkel és azoktól egyenlő távolságra halad. Minden szakaszt felez, melynek egyik végpontja T_1E_1-re másik végpontja T_2E_2-re illeszkedik. Ezért tartalmazza a $\overline{T_1T_2}$ szakasz L felezőpontját is.

Ugyanezen ábra alapján leszögezhetjük: *két érintő az érintési pontokkal a parabolát egyértelműen meghatározza.* Valóban először megrajzolhatjuk az ML egyenest, mely megadja a tengely irányát. Ezután vele párhuzamosan megrajzolhatjuk a T_1E_1 illetve T_2E_2 vezérsugár egyeneseket. Ezeket az érintőjükre tükrözve két egyeneshez jutunk, mely áthalad a fókuszon, a tükörképek metszéspontja tehát F. F-t tükrözve az érintőkre adódik E_1 illetve E_2 és így a vezéregyenes is.



7. ábra. A parabola gyorsszerkesztése.

Láttuk a projektív részben, hogy a két érintő bizonyos projektív pontsorainak megfelelő elemeit összekötő egyenesek adják a kúpszelet érintőit. Parabolánál ez a projektív kapcsolat affin kapcsolattá egyszerűsödik. Ennek belátásához tekintsünk egy harmadik érintőt t_3-t. Ezen az érintési pont T_3 az előző két érintőt pedig rendre M_1-ben illetve M_2-ben metszi. Minden metszés és érintési ponton keresztül húzzunk egy átmérőt, ezek távolságai közötti kapcsolatokat az ?Ábrán követhetjük nyomon. Ha T_1 és M_1 egyenesének a távolsága x ugyanennyi M_1 és T_3 egyenesének a távolsága. Jelöljük y-al M_1 és M átmérőjének távolságát. Akkor T_3 és M átmérők távolsága $y - x$ és MT_2 távolsága $y + x$. Ezért T_3 és T_2 átmérők távolsága $2y$ így ennek fele y az M_2 és T_2 átmérők távolsága. Ekkor az MM_2 átmérők távolsága megint x, amiből kapjuk,hogy T_3 illetve M_2 átmérők távolsága megint y. A párhuzamos szelők tétele szerint

$$x : y = |\overline{T_1 M_1}| : |\overline{M_1 M}| = |\overline{M M_2}| : |\overline{M_2 T_2}| = |\overline{M_1 T_3}| : |\overline{T_3 M_2}|$$

egyenlőségek állnak fenn, azaz *a harmadik érintő azonos arányban osztja az eredeti két érintő szakaszt, és ez az aránya az új érintési pont és az új metszéspontok által meghatározott két távolságnak is.* Ha $x = y$ feltétellel érünk a következő egyszerű észrevételhez jutunk: *a kiindulási érintési háromszögnek az érintési pontokat összekötő oldalhoz tartozó középvonala egy új érintő, melyen az érintési pont ezen középvonal felezőpontja.* Ezen észrevétel adja a lehetőségét a *parabolaív gyorsszerkesztésének*, mely az ?Ábrán látható.