

SZAKDOLGOZAT

A klasszikus összhangzattan axiomatikája

Tóbiás András

2014. március 14.

Témavezető: G. Horváth Ákos

egyetemi docens

BME Matematika Intézet

Geometria Tanszék

BME

2014

Tartalomjegyzék

1. A klasszikus összhangzattan axiómarendszerének felépítése	1
1.1. A felhangrendszer és a jóltemperált zongora	1
1.1.1. A felhangok és a tiszta dúr skála	1
1.1.2. Kvintkör és oktávkör közötti egyenlőtlenség. A jóltemperált zongora konstrukciója	3
1.1.3. Az enharmonikussági reláció bevezetése	4
1.1.4. Enharmonikussági viszonyok a zongora dúr skáláinak hangjai között	6
1.1.5. Konzonancia és disszonancia	7
1.2. Hármashangzatok és négyeshangzatok	9
1.3. Hangnemek. A dúr és moll hangnemek konstrukciója.	14
1.4. A négyszólamú szerkesztés topológiája	18
1.5. Hangnem konvergenciatartománya, funkciók és tonalitás	25
1.5.1. Előjegyzések	25
1.5.2. Konvergenciatartomány, gyenge (poli)tonalitás	26
1.5.3. A funkciók	28
1.5.4. Pár alapvető fogalom modulációkról	31
1.5.5. A tonalitás topologikus definíciója	32
1.6. Az axiómarendszer konstrukciója és viszonya a tonalitáshoz	33
1.6.1. Kijavíthatósági kritérium a négyszólamú összhangzattanpéldákra . .	33
1.6.2. Az axiómarendszer viszonya a tonalitással – a tonalitás alaptétele .	35
1.6.3. Elemi akkordváltási szabályok (szerkesztési elvek)	38
1.6.4. A bő hármashangzat és a szűkített szeptim izomériája. Tercrokonság	39
1.7. Az alterált akkordok felsorolása	41
1.8. A pikárdiai terces moll hangnem statisztikai vizsgálata	48
2. Modulációk	50
2.1. Szünetmentesség és akkordsorozatok: a szigorú négyszólamú szerkesztés megvalósítható modellje	50
2.2. A modulációs félcsoporth	53
2.3. A klasszikus összhangzattan megfelelő modulációk	55
2.4. Körzeneművek, periodikus zeneművek és kijavíthatóságuk	59

Függelék	I
A. Hangközők elnevezése a jóltemperált zongorán	I
B. A négyszólamú korálok topologikus definíciója	II
C. A dūr és moll hangnemek bizonytalan funkciójú, skálahangokból felépülő akkordjai	III
D. A klasszikus összhangzattan akkordváltási szerkesztési elvei	V
E. Kottapéldák az alterált akkordok használatáról	XVI
F. A nápolyi szextakkord kötelező terckettőzéséről	XVIII
G. A dūr és a moll hangnemek konvergenciatartományának áttekintése	XIX
H. Sztenderd hétakkordos modulációk – a moduláció alaptételének igazolása kottapéldákkal	XXII
I. Ábrák	XXVIII

Bevezetés

We can forgive a man for making a useful thing as long as he does not admire it. The only excuse for making a useless thing is that one admires it intensely.

All art is quite useless.

(O. Wilde: The Picture Of Dorian Gray, The Preface)

Amint minden művészeti ágra, úgy a zeneszerzésre vonatkozóan is preskriptív szabályrendszereket alkottak Európában a klasszicizmus korszakában. Ekkor születtek a klasszikus összhangzattan *szerkesztési elvei*, amelyeknek legnagyobb mértékben a bécsi klasszicista zeneszerzők művei felelnek meg. A szerkesztési elveket követő zeneművek legegyszerűbb és legtisztább modelljét a *négyszólamú összhangzattanpéldák* adják. Az ezekre vonatkozó szólamvezetési és akkordváltási szabályok döntő részben Johann Sebastian Bach korábban született négyszólamú korálfeldolgozásainak tulajdonságain alapulnak.

Szakdolgozatom célja annak a munkának a pontosítása, javítása és befejezése, amelyet a 2013 novemberében bemutatott, szintén *A klasszikus összhangzattan axiomatikája* című TDK-dolgozatomban megkezdtem. Vagyis a klasszikus összhangzattan négyszólamú modelljét kívánom leírni, kiindulva a felhangrendszer egyszerű fizikai tulajdonságaiból és a halmazelmélet ZFC axiómarendszeréből. Ehhez először az általánosan ismert

zeneelméleti fogalmak (pl. kvintkör, jóltemperált skála illetve zongora, enharmonikus-ság, konszonancia és disszonancia, hármás- és négyeshangzatok, hangnemet adó skálák) matematikai pontosságú definiálása és egymáshoz való viszonyaik tisztázása szükséges, ezzel kezdjük a dolgozatot. A későbbiekben lehetőségünk lesz olyan definíciókat is megadni, amelyek általánosabbak a legszűkebb értelemben vett, az összhangzattan-tanítás gyakorlatában alkalmazott meghatározásoknál. Egy ilyen általánosítás teszi majd lehetővé például azt az egyszerű, de zeneelméleti szempontból jelentős bizonyítást, amellyel belátjuk, hogy egy adott zongorahangra mint alaphangra pontosan háromfajta hangnem építhető: az ismert dúr és moll hangnemek, valamint a kettő között elhelyezkedő *pikárdiai terces moll*. Ezen harmadik hangnemtípus akkordjainak viselkedésére pedig később a dúr és moll hangnemmél kapcsolatos klasszikus összhangzattani ismeretek analógiájára próbálunk következtetni.

Az alapfogalmak és a hangnemek megismerése után topologikusan definiáljuk a szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneműveket és lejátszásait, zeneszerzés-gyakorlati megfontolásokból engedélyezve nem feltétlenül megvalósítható zeneműveket is. Ennek a résznek az az elméleti jelentősége, hogy a *Bach-korálok* döntő többségét le tudjuk írni az itt megadott tárgyalási mód segítségével. A hangnemek konvergenciatartományának bevezetése, a funkciók megismerése és a funkciós tonalitás definiálása után pedig megkezdődhet a klasszikus összhangzattan szerkesztési elveinek megadása. Itt látjuk be a Vécsey Máté évfolyamtársam által megsejtett, majd általam bizonyított *tonalitás alaptételét*, topológiai bizonyítással, matematikai szempontból ez a dolgozat legkomolyabb eredménye. Ezután adjuk meg és illusztráljuk kottapéldákkal az akkordváltási és szólamvezetési szerkesztési elveket, vagyis a tényleges összhangzattanpélda-írási szabályokat. Célunk ezt követően a klasszikus összhangzattannak megfelelő *modulációk*, azaz hangnemváltások tárgyalása. Ezek előkészítéséül meg kell adnunk minden hangnemhez a hozzá tartozó hármás- és négyeshangzatok halmazát, ismertetnünk kell a módosított hangot is tartalmazó, azaz *alterált akkordokat* is és definiálnunk kell néhány újabb zenei jelenségeket ezekkel kapcsolatban (pl. kromatika, elízió).

A modulációk tárgyalását adja a dolgozat második fejezete. Ehhez már érdemesebb az eredeti topologikus jellemzéshez képest egyszerűsített, csak *akkordsorozatok* használó leírást adnunk a négyszólamú összhangzattanpéldákra. A modulációk kezdő- és célhangnemeinek viszonyait pedig a *modulációs félcsoport* eszközével vizsgáljuk. Ezután megadjuk a modulációs szerkesztési elveket, számos kottapéldával mutatjuk be a különböző hangnemek közötti váltások egyszerű hétakkordos modelljét, végezetül pedig a kör- és periodikus zeneművekkel foglalkozunk, amelyeknek differenciálgeometriai megfontolások mellett a könnyűzene szempontjából is jelentősége van. Ezzel – ha nem követtünk el hibát

– *teljes axiómarendszert* állítunk elő a szigorú négyszólamú szerkesztésre vonatkozóan. A dolgozatban szereplő logikai rendezés és precíz fogalomalkotás segítséget nyújthat egy új magyar összhangzattan-tankönyv írásához is, ami távlati céljaink között szintén szerepel.

A dolgozat első fejezete – az utolsó három részfejezetén kívül – a 2013 novemberében bemutatott, azonos című TDK-dolgozatomból származik. Most tavasszal fejeztem be a teljes, 60 kottapéldát is tartalmazó változatot, kijavítva az első fejezet néhány hibáját is. Ezt témavezetőmmel könyv formájában tervezzük kiadni, és messze meghaladja a szakdolgozat terjedelmi korlátait. Ezért szakdolgozatom első fejezetéből a TDK-s állapothoz képest számos tisztán zenei jellegű részt, amelyek az axiómarendszer felépítéséhez nem elengedhetetlenek, elhagyunk, az akkordváltási szerkesztési elveket és a **kottapéldákat** (1–9b)) pedig a **Függelék** D fejezeteként szerepeltetjük. Szintén tömören tárgyaljuk az alterált akkordokat: megnevezzük és röviden ismertetjük őket, csak azon tulajdonságaikkal foglalkozunk részletesen, amelyek a modulációs szerkesztési elvek megadásához szükségesek. Az ezen akkordok használatára vonatkozó 10–34. kottapéldák alkotják a Függelék E fejezetét, az alapfogalmak megértését segítő **ábrák** (A–S) pedig I fejezetét. A modulációs (35–60.) kottapéldák a Függelék H fejezetének szerves részét képezik.

1. A klasszikus összhangzattan axiómarendszerének felépítése

1.1. A felhangrendszer és a jóltemperált zongora

1.1.1. A felhangok és a tiszta dúr skála

Az a célunk, hogy minden egyes vizsgált zeneelméleti-összhangzattani jelenséget pontosan akkor definiáljuk matematikai pontossággal, ha az adott jelenségnek nincs konvencionálisan elfogadott, egyértelmű definíciója. Ezekben az esetekben viszont nem csak pontos leírásra, összhangzattani szempontból releváns fogalomalkotásra fogunk törekedni, hanem a definiálás szabadságát kihasználva igyekszünk minél általánosabban érvényes definíciókat megadni, amelyeket felhasználva végül felépíthetjük a klasszikus összhangzattan axiómarendszerét és bebizonyíthatjuk Vécsey Máté tételét. Az axiómák bevezetése nem egy önálló, új elsőrendű nyelven történik, hanem a halmazelméletén (a ZFC axiómarendszer elfogadásával), kiegészítve a hangok és a felhangrendszer mechanikájára vonatkozó kitételekkel és az ezekből származó hangközdefiníciókkal. Ezeket viszont nem fogjuk részletesen megadni, hiszen itt konvencionálisan egyértelmű definíciókkal dolgozhatunk. A kottaírás hangmagasságra és -hosszúságra vonatkozó jelöléseit is külön bevezetés nélkül fogjuk használni. Tetszőleges metrikus térben az x pont körüli r sugarú nyílt gömböt $B_r(x)$ -szel, általános topologikus térben az A halmaz lezártját $\overline{A}$ -val, továbbá bármifajta f függvény értelmezési tartományát $\mathcal{D}(f)$ -fel, értékészletét $\mathcal{R}(f)$ -fel jelöljük.

Tehát csak vázlatosan ismertetjük a következő fogalmakat. *Hangnak* a rugalmas közegben terjedő longitudinális hullámot nevezzük; a hangot *emberi füllel hallható*nak mondjuk, ha frekvenciája 20 és 20 000 Hz közé esik. A dolgozatban végig olyan $f(X)$ frekvenciájú X hangokkal foglalkozunk, amelyek tartalmazzák $\forall k \in \mathbb{N}$ -re a k $f(X)$ frekvenciájú felhangjaikat; tetszőleges k -ra a k $f(X)$ frekvenciájú felhangot az X k . felhangjának hívjuk. Az ilyen tulajdonságú hangokat *alaphangoknak* fogjuk nevezni. (A felhangok egymáshoz és az alaphanghoz viszonyított erősségének vizsgálatára nem lesz szükségünk.) Egy alaphang frekvenciája (hertzben, azaz 1/szekundumban mérve) tetszőleges pozitív valós szám lehet.

Egy hang és második felhangja hangközének neve *tiszta oktáv*, ez alapján mondjuk, hogy egy hang és 2^k . ($k \in \mathbb{N}$) felhangja k tiszta oktávra van egymástól (a második felhang egy oktávval magasabb az alaphangnál). A nulla oktávnyi hangköz (egy hang önmagától való hangköze) neve *tiszta prím*. Egy alaphang 2. és 3. felhangjának hangköze *tiszta*

*kvint*¹, 3. és 4. felhangjának hangköze *tiszta kvart*, 4. és 5. felhangjának hangköze *nagy terc*, 5. és 6. felhangjának hangköze *kis terc*. Ha $f(X) \leq f(Y) \leq f(Z)$ és Z egy oktávval magasabb hang X -nél, akkor az Y és Z hangok hangközét és az X és Y hangok hangközét egymás *inverzének* hívjuk.

1.1.1. Állítás. *Az alaphangok hangközeinek körében az inverz tulajdonság szimmetrikus reláció. Egy hangköznek pontosan akkor létezik inverze, ha a hangköz nagysága oktávban mérve a $[0, 1]$ intervallumba esik. A tiszta kvint és a tiszta kvart valamint a tiszta prím és a tiszta oktáv egymás inverzei.*

Egy X alaphang 7. felhangját az X -nél egy tiszta kvinttel alacsonyabb Y alaphang *vezetőhangjának* nevezzük, az X 11. felhangját pedig az X -nél egy tiszta kvinttel magasabb Z alaphanghoz tartozó *szeptimhangnak*, másképpen a Z -nél egy nagy terccel magasabb W hang *felső váltóhangjának*.

A nagy C hang első 11 felhangját (jó közelítéssel) bemutatjuk – egyelőre csak szemléltetésül, hiszen még nem definiáltuk a kottában látható alaphangokat. Ha viszont ettől egy pillanatra eltekintünk, láthatjuk, hogy a C-dúr skálához képest éppen a G vezetőhangja az egyetlen felfelé módosított hang és az F-hez tartozó szeptimhang az egyetlen lefelé módosított hang a C első 11 felhangja között. **Ábra:** A).

Most definiáljuk még az X -dúr skálát. Ha X tetszőleges alaphang, akkor általában egy X alapú *hétfokú skála* egy olyan hételemű rendezett halmaz, amelynek X és további hat, hangmagasság (frekvencia) alapján X és annak első felhangja közé eső hangja közé eső hang az elemei, és a rendezést a hangmagasság adja ($Y > Z$, ha $f(Y) > f(Z)$). A rendezés alapján beszélhetünk a skála *I.*, *II.*, ..., *VII.* fokú skálahangjáról (az *I.* fok a skála alapja), a k . fok a skála rendezés szerinti k . legalacsonyabb hangjától egész oktávra lévő alaphangok halmazát jelöli. A hétfokú, X -alapú skálát *tiszta X -dúr skálának* nevezzük, ha (a rendezés szerint) szomszédos hangok frekvenciaaránya rendre:

$$\frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15},$$

ahol az utolsó hangköz a *VII.* fokú hang és az *I.* fokú alaphangnál egy oktávval magasabb hang köze.

¹Másképpen megfogalmazva: X és Y alaphangok ($f(Y) > f(X)$) hangköze tiszta kvint, ha $\exists Z$ alaphang, hogy X a Z első, Y a Z második felhangja. Hasonlóképpen értelmezendők a további hangközdefiníciók is. Ez alapján: általában X és Y alaphangok ($f(X) > f(Y)$) frekvenciaarányának 2-es alapú logaritmus a két hang oktávban mért hangköze, hasonlóan X és Y frekvenciaarányának $\frac{3}{2}$ alapú logaritmus a két hang kvintben mért hangköze, és így tovább.

1.1.2. Kvintkör és oktávkör közötti egyenlőtlenség. A jóltemperált zongora konstrukciója

Legyen X tetszőleges alaphang úgy, hogy mind ϕ , mind a nála tizenkét kvinttel magasabb hang emberi füllel hallható. Ekkor az X -nél 7 oktávval magasabb X' alaphang frekvenciája $128f(X)$, az X -nél 12 kvinttel magasabb X'' alaphang frekvenciája pedig $\frac{531441}{4096}f(X)$. Az X' és X'' közötti hangmagasság-eltérés a tapasztalatok szerint az emberi fül számára szignifikáns, nem helyettesíthető a két hang egymással úgy, hogy a hallgatóság a különbséget ne érzékelje – így tapasztalták az 1600-as évek első felében Európában².

1.1.2. Állítás. *Tetszőleges, emberi füllel hallható tartományba eső tiszta X -dúr skála esetén jó közelítéssel (magas szinten szignifikanciahatáron belül) igazak a következők:*

- (i) *A III. fok a IV. foknak és a VII. fok az I. foknak vezetőhangja,*
- (ii) *a IV. fok a III. foknak és az I. fok a VII. foknak felső váltóhangja,*
- (iii) *a IV. és I. fok illetve az I. és V. fok hangköze tiszta kvint,*
- (iiii) *a IV. fok az I. fokhoz, az I. fok pedig az V. fokhoz tartozó szeptimhang.*

Így szignifikanciahatáron belül igaz, hogy az X hang 7. felhangja nincs a tiszta X -dúr skálában, de szerepel az X -nél egy tiszta kvinttel alacsonyabb Y alaphanggal rendelkező tiszta dúr skálában, és definíció szerint Y szeptimhangja, ami később részletezendő módon az Y alaphanghoz való vonzódást jelent. Az X 11. felhangja pedig szintén nincs a tiszta X -dúr skálában, de jó közelítéssel tagja a tiszta Z -dúr skálának, ahol Z egy tiszta kvinttel magasabb X -nél; ez a 11. felhang definíció szerint vezetőhangja Z -nek, ami később kifejtendő módon Z -hez való vonzódást jelent. Így ha tizenkét kvintlépéssel (végig ugyanabba az irányba) ugyanoda jutnánk, mint hét oktávlépéssel, akkor a kvintlépések során érintett alaphangokra épülő tiszta dúr skálák között kapcsolatot tudnánk teremteni a szeptim- és vezetőhangok segítségével, sőt 12 kvintlépéssel körbe is tudnánk mozogni. Ehhez azonban a 12 kvint és a 7 oktáv távolság közti különbséget legalábbis lokálisan, egy-két oktávnál nem nagyobb hangközök esetén el kell tudnunk tüntetni.

Vegyünk két hangot az emberi füllel hallható tartományba eső tartományon belül, amelyeknek távolsága hét oktáv, és ezt osszuk fel tizenkét egyenlő kvintnyi [azaz kettes alapú logaritmikus skála szerint egyenlő frekvenciájú] hangközre. A tapasztalatok szerint ezek a hangközök már helyettesíthetők a tiszta kvintet, lokálisan nem tűnnek attól különböző hangköznek. Így ha tizenkét ilyen kvázi kvintlépéssel jutunk el X -től X' -ig, akkor

²Azt, hogy miért éppen 7 oktávot osztunk fel és miért éppen 12 egyenlő részre, lásd például: [1; p. 190-193.]

azt a barokk illúziót kelthetjük, hogy tizenkét tiszta kvintlépéssel X'' -ig jutottunk. Így tetszőleges X alaphangról kiindulva létrehozhatjuk a kvintkört. Ha a tizenkét kvázi kvint összeadásával kapott hangközt hét egyenlő oktávnyi hangközre osztjuk tovább, akkor csak a kvintkörünk 12 hangjától egész oktávra lévő hangokat kapunk. Így ha rögzítjük, hogy a *normál A* szerepeljen a struktúránkban, megkapjuk a jóltemperált zongorát:

1.1.1. Definíció. Alaphangok egy K halmaza jóltemperált zongora, ha

- (i) $A \in K$, ahol A a 440 Hz frekvenciájú normál A hang,
- (ii) K legalább 7 oktáv hangterjedelmű, azaz $\exists V, W \in K : f(V) \geq 2^7 f(W)$,
- (iii) $\forall X$ alaphangra $X \in K \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : f(X) = f(A) \times (\sqrt[12]{2})^k$,
- (iiii) ha $V, W \in K$, Z alaphang, $f(V) < f(Z) < f(W)$ és $\exists k \in \mathbb{Z} : f(Z) = f(A) \times (\sqrt[12]{2})^k$, akkor $Z \in K$.

Kevésbé precíz megfogalmazással: a jóltemperált zongora olyan, a normál A-t tartalmazó, alaphangokból álló, legalább 7 oktáv hangterjedelmű halmaz, ahol a szomszédos hangok frekvenciaaránya $\sqrt[12]{2}$. A jóltemperált zongorának legalább 85 eleme van definíció szerint, de nem zártuk ki, hogy – akár mindkét irányban – végtelen struktúra legyen. A mindkét irányba végtelen jóltemperált zongora megfelel egy a generáloelemű végtelen ciklikus csoportnak, ha a -t a normál A-nak és az a -val való szorzást $\sqrt[12]{2}$ -szeresre való frekvencianövekedésként értelmezzük.

A jóltemperált zongora szomszédos hangjainak hangközét *félhangnak* nevezzük, így egy zongorahang és k . ($k \in \mathbb{N}$) szomszédja a jóltemperált zongorán k félhangra van egymástól. A két félhang távolságot kézenfekvő módon egészhangnak is mondjuk.

1.1.3. Az enharmonikussági reláció bevezetése

Az imént sok szó esett arról a kérdésről, hogy két alaphang hangmagasság alapján különbözik-e egymástól szignifikánsan vagy sem. A kérdést a hallgatóközönség körében végzett reprezentatív mérésekkel lehet eldönteni, és nyilvánvaló, hogy egy X alaphanggal bizonyos típusú zeneművekben kölcsönösen helyettesíthető hangok frekvenciái nem alkotnak egy jól meghatározott intervallumot, a szignifikanciahatár maga is erősen függ a mérésektől, hipotézisvizsgálati eszközöket kell használni. Nekünk itt nincs is szükség a szignifikanciahatár meghatározására, csupán arra, hogy bizonyos, azon nagy biztonsággal belül és ahhoz nem is közel eső hangokat helyettesíthessünk egymással vagy a jóltemperált zongora bizonyos hangjaival – éppen a kvintkör működésének biztosítása céljából. Ha egy

adott zeneelméleti szituációban két emberi füllel hallható hang – vagy n darab együtt szóló hang, azaz egy n -eshangzat – helyettesíthető egymással, akkor azokat *enharmonikusaknak* mondjuk³. Ha X és Y enharmonikusak (jelölés: $X \sim Y$), akkor az X -től egész oktávra eső hangok halmazát is enharmonikusnak mondjuk az Y -től egész oktávra eső hangok halmazával. Ebből viszont következik, hogy az enharmonikusság hangköz-eltolásinvariáns tulajdonság, vagyis X és Y pontosan akkor enharmonikus, ha bármely X' és Y' is enharmonikus, ahol oktávban mérve X és Y hangköze megegyezik X' -ével és Y' -ével. Ekkor X' és Y' hangkötét is enharmonikusnak mondjuk X és Y hangközével. Johann Sebastian Bach *Das wohltemperierte Klavier* című művének megalkotásával – pontosabban azzal, hogy a közönség elfogadta a műben szereplő hanghelyettesítéseket – igazolta a következő állítást. A tételt sokkal általánosabban fogjuk kimondani hangnemekre, egyelőre még csak tiszta dúr skálákra tudjuk:

1.1.1. Tétel (Bach-törvény dúr skálára). *A jóltemperált zongora tetszőleges V hangjára épített hétfokú skála, amelynek elemei: V és a nála 2, 4, 5, 7, 9, 11 félhanggal magasabb zongorahangok, enharmonikus a tiszta V -dúr skálával. (Ábra: B).)*

Viszont nem minden alaphang enharmonikus zongorahanggal, például két szomszédos zongorahang között, mindkettőtől ugyanannyi oktávra lévő hang egyik szomszédjával sem enharmonikus (más zongorahanggal pedig nyilvánvalóan nem az). Ha ezután szeretnénk meghatározni egy *enharmonikussági tartományt*, vagyis frekvenciaintervallumok egy olyan E diszjunkt unióját, amelybe beleesnek a mindkét irányban végtelen jóltemperált zongora összes hangjára épülő tiszta dúr skála hangjai, és minden E -beli hang kis elsőfajú hibavalószínűség mellett valóban enharmonikus a hozzá legközelebbi zongorahanggal (elsőfajú hibán itt azt értjük, amikor egy adott zongorahanggal enharmonikusnak ítélnék meg egy olyan hangot, amely valójában a hallgatóság jelentős része számára nem enharmonikus a zongorahanggal), akkor tegyük a következőt. Tekintsük a zongora emberi füllel hallható tartományát. Ezen belül megfelelő módszertannal, kis elsőfajú hibavalószínűséggel határozzunk meg egy olyan r oktávban mért hangközt, amely nagyobb, mint a legnagyobb eltérés a zongorahangok által meghatározott tiszta dúr skálák megfelelő hangjai és a velük a Bach-törvény szerint enharmonikus zongorahangok között, de még az enharmonikusság elfogadási tartományán belül esik, és mérjük fel minden zongorahang körül

³Ez a tizenkétfokú egyenletes temperálásra vonatkozó enharmonikusság definíciója. Ha az egyenletesen temperált skála legfeljebb 5 ($\frac{12}{2} - 1$) hangot tartalmaz, olyan hangok is „enharmonikussá válnak”, azaz ugyanazon skálahanghoz lesznek a legközelebb, amelyek a jóltemperált zongora különböző hangjaihoz vannak közel. Ha pedig legalább 25 ($12 \times 2 + 1$) hangot tartalmaz az egyenletes hangközű skála, akkor bizonyos, a jóltemperált zongora szempontjából enharmonikus hangok már különböző skálahangokhoz lesznek a legközelebb ebben a skálában.

egy ilyen hangközt mindkét irányba úgy, hogy a végpontokat ne vegyük be az E -be. Így a logaritmikus frekvenciaskálán egyenlő sugarú nyílt gömbök diszjunkt unióját kapjuk egyenlő távolságra lévő szomszédos középpontokkal. A Bach-zongoraművek elfogadottsága, gyakorlatban való működése igazolja, hogy az eljárást sikeresen el lehet végezni. A következőkben így az E -t a fenti eljárás alapján elkészítettnek és rögzítettnek tekintjük. Egyszerűen látható, hogy az enharmonikussági tartományunkon az enharmonikusság ekvivalenciareláció.

1.1.4. Enharmonikussági viszonyok a zongora dúr skáláinak hangjai között

A jóltemperált zongorán a normál A-tól 0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12 félhangra lévő hangok, azaz a „fehér billentyűk” neve rendre: A, H, C, D, E, F, G. Ezek C alaphanggal egy dúr skálát határoznak meg, amely a Bach-törvény szerint a tiszta C-dúr skálával enharmonikus. Amit az előző fejezetben láttunk, most enharmonikussággal tudjuk megfogalmazni:

1.1.3. Állítás (Modulációs lemma). *Minden zongorahangnak a felső szomszédja enharmonikus a felső váltóhangjával, alsó szomszédja pedig enharmonikus a vezetőhangjával.*

A bizonyítás az enharmonikussági tartomány konstrukciójából következik.

A következőkben a tiszta dúr skálákat a velük enharmonikus, a jóltemperált zongora hangjaiból álló dúr skálákkal fogjuk helyettesíteni. Amikor dúr skáláról lesz szó, mindig ilyen skálákra gondolunk, és ha külön nem jelezzük ennek ellenkezőjét, akkor bármely szóba kerülő hétfokú skáláról feltesszük, hogy annak minden hangja az E enharmonikussági tartomány eleme, vagyis bármely két szomszédos hangja közti lépés egész számú félhanggal enharmonikus. A Bach-törvény szerint a zongorahanggal enharmonikus hangra épülő tiszta dúr skála ilyen tulajdonságú skála, így ezen skála k . fokának vezetőhangját elnevezhetjük a $k - 1$. fokról, illetve az I. fokot a VII. fokról, az "-isz" képzővel (azaz a $\sharp$ operátorral), ha az adott vezetőhang nem skálahang, a felső váltóhangot pedig a $k + 1$. fokról, illetve a VII. fokot az I. fokról, az "-(e)sz" képzővel (azaz a $\flat$ operátorral), ha nem skálahang az adott vezető- vagy szeptimhang⁴. Ez alapján definiálhatók a C-dúr skála fokaik vezető- és szeptimhangjaiként a jóltemperált zongora „fekete billentyűi”: a Cisz ($C\sharp$), Disz, Fisz, Gisz, Áisz avagy Desz ($D\flat$), Esz, Gesz, Asz, B⁵. Az -esz és -isz utótagokkal az eddigiek szerint megnevezett, vezető- és szeptimhangként szolgáló, jól definiált fokszámú hangokat a dúr skála *n-szeresen módosított hangjainak* nevezzük, attól függően, hogy

⁴Láthatjuk, hogy a fokszámozás tulajdonképpen a $\mathbb{Z}_7$ prímtest elemeivel történik, csak a 0-t I. foknak, az 1-et II. foknak, és így tovább, a 6-ot VII. foknak nevezzük.

⁵Angolszász jelöléssel a B-t $B\flat$ -nek nevezik és a H-t hívják B-nek, így a fehér billentyűk neveit az A-tól kezdve rendre a latin ábécé első hét betűje adja.

hány ilyen egyforma utótagot használunk a hang elnevezéséhez, azaz hányszor hozunk létre valamilyen dúr skálában módosított vezető- vagy szeptimhangot⁶. Így például a C-dúr skálában a Fiszisz (jelölés: $C\times$) kétszeresen, az Eszesz (jelölés: $E\flat\flat$) is kétszeresen, a Desz egyszeresen, de ugyanígy a fehér F billentyűvel enharmonikus Eisz is csak egyszeresen módosított hang. A kvintkör tulajdonságaiból könnyen igazolható, hogy tetszőleges K jóltemperált zongorán $\flat\sharp = \sharp\flat = id_K$. Általában minden olyan hétfokú skálánál, amely az előbb leírt tulajdonságokkal rendelkezik, képezhetjük ehhez hasonló módon a módosított vezető- és szeptimhangokat és határozhatjuk meg ezek nevét, fokszámát.

1.1.2. Definíció. Legyen V és W a K jóltemperált zongora két hangja. Ezek zongorán mért távolsága, $d_2(V, W)$: a két hang hangköze félhangban mérve.

1. *Példa.* Ha C az egyvonalas C, A pedig a normál (egyvonalas) A, akkor $d_2(C, A) = d_2(A, C) = 9$.

1.1.4. Állítás. A d_2 távolság bármely K jóltemperált zongorán metrika, amely a diszkrét topológiát generálja.

Bizonyítás. A metrikatulajdonságok bizonyítása triviális. Bármely V zongorahangra és $0 < \lambda < 1$ valós számra $B_\lambda(V) = V$, így a jóltemperált zongora minden egy pontú halmaza nyílt a metrika által generált topológiában, ezért a jóltemperált zongora diszkrét tér⁷. $\square$

1.1.1. *Megjegyzés.* A d_2 metrika által generált topológia egyben a zongora hangjainak hangmagasság szerinti rendezéséből származó rendezéstopológia is.

A jóltemperált zongora hangközeinek elnevezésénél ebben a dolgozatban teljes mértékben követjük a zeneelméleti konvenciót. A TDK-dolgozat erre vonatkozó fejezete itt a Függelékben, A fejezetként szerepel.

1.1.5. Konzonancia és diszszonancia

Itt a bécsi klasszika és az ahhoz kapcsolódó összhangzattan szemlélete szerinti konzonanciát és diszszonanciát tárgyaljuk. Például a két évszázaddal korábban alkotó Palestrinánál még diszszonáns hangköznek számított a kvart, még korábban pedig további olyan hangközök is, amelyeket itt konzonánsnak fogunk tekinteni.

⁶Általában módosított hangon, anélkül, hogy megmondanánk, hányszorosan módosított, egyszeresen módosított hangot fogunk érteni.

⁷A d_2 zongorán mért távolság a K mindkét irányban végtelen jóltemperált zongoráról pszeudometrikaként kiterjeszthető az E enharmonikussági tartományra. Könnyen látható, hogy $\forall X, Y \in E \quad d_2(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X \sim Y$. A pszeudometrika szerint minden E -beli hang legszűkebb nyílt környezete az E őt tartalmazó, (az $\mathbb{R}$ szokásos topológiája szerint) összefüggő komponense. Az (E, d_2) teret az enharmonikussági relációval lefaktorizálva éppen a (K, d_2) jóltemperált zongorát kapjuk.

1.1.3. Definíció. X és Y alaphangok oktáv-ekvivalensek (jelölés: $X \doteq Y$), ha egész számú tiszta oktáv a hangközük (vagyis az egyik a másiknak kettőhatványadik felhangja). Ha V, W alaphangok és V' oktáv-ekvivalens V -vel, W' pedig W -vel, akkor a V és W hangok hangköze oktáv-ekvivalens a V' és W' hangközével.

1.1.4. Definíció (Konszonancia és oktáv-ekvivalencia kapcsolata). A zongorahangok konszonanciáját definiáló tulajdonságok:

- (i) Ha a jóltemperált zongora két hangjának hangközéhez $\exists n, m \in \{1, 2, \dots, 7\}$, hogy ez a hangköz egy alaphang n . és m . felhangjának hangközével enharmonikus, akkor a hangköz konszonáns,
- (ii) ha V, W a jóltemperált zongora két hangja és $\exists V' \doteq V, \exists W' \doteq W$, hogy V' és W' hangköze az (i) pont szerint konszonáns, akkor V és W hangköze is konszonáns,
- (iii) ha egy hangköz konszonáns, akkor az inverze és az azzal oktáv-ekvivalens hangközök is konszonánsak,
- (iiii) minden más hangköz a jóltemperált zongorán disszonáns (azaz nem konszonáns).

Ezzel még csak azt határoztuk meg, hogy ha hallunk (vagy a hallható tartományon kívül más módon megismerünk) két zongorahangot, zenei kontextuson, hangnemen kívül, akkor azokat konszonánsnak vagy disszonánsnak tekintjük-e. Kontextusban ennél többet követelünk meg a konszonanciához. Ugyanis a szűkített és bővített akkordoknál (gyakran módosított) vezető- és szeptimhangok jelennek meg, és később látni fogjuk, hogy előbbiek egy szekunddal felfelé, utóbbiak egy szekunddal lefelé vonzódnak, és ezzel feszültséget, disszonáns érzetet kelthetnek olyan esetekben is, amikor maga a hangköz egyébként konszonáns a zongorán (pl. a bővített szekundnál). Talán a legegyszerűbb így megadni a plusz feltételt:

1.1.5. Definíció. Egy olyan hétfokú skálának, amelynek minden hangja E -beli, X és Y skála- vagy valahányszorosan módosított hangjának hangköze pontosan akkor konszonáns, ha a hangközzel enharmonikus zongorahangköz az 1.1.4 definíció szerint konszonáns és a hangköz neve kis, nagy vagy tiszta⁸.

⁸Tehát a skálától idegen E -beli hangok, amelyeket nem tudunk foksámhoz kötni, az adott skálához – és a hangnemet adó skálák esetén a későbbiekben: az adott hangnemhez – képest disszonáns hangközben vannak mind a skála- és módosított hangokhoz, mind egymáshoz képest. Az ilyen hangokat, mivel nincs foksámuk, le sem lehet kottázni, így ezek nagyon ritkán szerepelnek a zeneszerzési gyakorlatban, a klasszikus összhangzattan vizsgálata szempontjából el is tekinthetünk tőlük.

1.1.5. Állítás. *A jóltemperált zongora hangjai között konszonánsak a 0, 3, 4, 5, 7, 8, 9 félhangnyi és ennél egész oktávval nagyobb hangközök, a többi hangköz disszonáns.*

Rögzített E-beli skála esetén konszonáns hangközök: a tiszta prím, a kis és nagy terc, a tiszta kvart, a tiszta kvint, a kis és nagy szext, a tiszta oktáv és mindezeknél egész oktávval nagyobb hangközök, minden más hangköz disszonáns. (Ábra: D).)

1.2. Hármashangzatok és négyeshangzatok

Legyen (K, d_2) tetszőleges jóltemperált zongora, és tekintsük ennek önmagával vett n . topologikus direktszorzatát, K^n -et, ahol $n > 1$ egész szám! Ekkor K^n is diszkrét, szeparábilis metrikus tér a szorzattopológiával, amelynek így Borel- σ -algebrája is $\mathcal{P}(K)$ -val egyezik meg. A K^n elemeit *akkordoknak*, speciálisan konkrét n -re *n -eshangzatoknak* nevezzük. Az akkordok a későbbiekben – ahogy a zeneelméletben általában – mint zeneművek egyszerre szóló hangjainak halmazai fognak szerepelni. Két n -eshangzat oktáv-ekvivalens, ha hangjaik között létezik olyan bijekció, amely minden hanghoz vele oktáv-ekvivalenst rendel. Az n -szólamú zeneművet a lehető legáltalánosabban definiáljuk:

1.2.1. Definíció. n -szólamú zeneműnek nevezünk minden $M : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow K^n$ Borel-mérhető függvényt. Ha $t \in \mathcal{D}(M)$, akkor $M(t)$ -t az M t pontbeli akkordjának nevezzük.

1.2.2. Definíció (Szólam). Ha $pr_i : K^n \rightarrow K$ az i . projekció a K^n topologikus direktszorzattól a K jóltemperált zongora i . példányába, M pedig n -szólamú zenemű ($n \in \mathbb{N}$), akkor $pr_i \circ M$ az M i . szólama. Gyakran az első szólamot basszusnak, az utolsót szopránnak nevezzük. Négy szólamú esetben (ha ennek az ellenkezőjét külön nem jelezzük) az első szólam a basszus, a második a tenor, a harmadik az alt és a negyedik a szoprán.

A szólamok hangmagasság szerint letről fölfelé való számozása azt a hagyományt követi, hogy az akkordokat mindig letről fölfelé olvassuk ki.

Két n -eshangzat *fordítás erejéig azonos*, ha mindkettőnek bármely szólamában olyan hang szerepel, amely (oktáv-ekvivalencia erejéig) szerepel a másiknak is valamely szólamában. Két n -eshangzat *azonos* vagy *egymás (különböző) helyzetű* (ugyanazt a nevet viselik), ha fordítás erejéig azonosak és a basszusszólamukban (oktáv-ekvivalencia erejéig) ugyanaz a hang szerepel. Két n -eshangzat *egyenlő*, ha minden szólamukban ugyanaz a hang szerepel – itt az oktáv-ekvivalenciát sem engedjük meg. Két n -eshangzat *fordítása egymásnak*, ha fordítás erejéig azonosak, de basszusaik különböznek. Ezen definíciókhoz hasonlóan definiálhatók az „enharmonikusság és fordítás erejéig azonos”, „enharmonikusság erejéig azonos”, „enharmonikus(ság erejéig egyenlő)” és „enharmonikusság erejéig

fordításai egymásnak” fogalmak, csak ekkor a szólamok megegyezése helyére szólamok enharmonikusságát kell behelyettesíteni.

1.2.3. Definíció. n -eshangzatnéven azonos n -eshangzatok halmazát értjük (amely egy speciális, az adott zenei kontextusban értelmes megnevezéssel rendelkezik). Egy adott n -eshangzatnév alá tartozó H n -eshangzat nevét $\mathfrak{N}(H)$ -val jelöljük.

A klasszikus összhangzattan axiómarendszerének legegyszerűbb modelljét, a *négyszólamú összhangzattanpéldák* struktúráját szeretnénk itt kidolgozni. Ezek speciális négyszólamú zeneművek, amelyeknek tulajdonságait az 1.4 fejezetben fogjuk tárgyalni. A négyszólamú összhangzattanpéldák értelmezési tartományának minden pontjában a *klasszikus összhangzattan*nak megfelelő *hárm*as- vagy *négy*eshangzat *szól*. Most meghatározzuk, melyek a klasszikus összhangzattannak megfelelő *hárm*as- vagy *négy*eshangzatok.

1.2.4. Definíció. Legyen M négyszólamú zenemű! $H \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$ klasszikus formájú hármashangzat, ha létezik olyan (E -beli) hétfokú skála és olyan $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$ egész, amelyre (mod 7) H a skála k ., $k + 2$. és $k + 4$. fokú hangját is tartalmazza, ezek közül pontosan egyet két szólamban. A k . fokú hang a hármashangzat alapja, a $k + 2$. fokú a terce, a $k + 4$. fokú pedig a kvintje. A H hármashangzat típusa (**ábra: E**):

- (i) alaphelyzetű hármashangzat, ha a k . fokú hangot tartalmazza a basszusban. Ekkor ha a szopránban $k + 4$. fokú hang szerepel, akkor kvinthelyzetű, ha $k + 2$. fokú hang szerepel, akkor terchelyzetű, ha k . fokú hang szerepel, akkor pedig oktavhelyzetű (**ábra: F**));
- (ii) szextakkord (egy hármashangzat szextfordítása), ha a $k + 2$. fokú hangot tartalmazza a basszusban;
- (iii) kvartszextakkord (egy hármashangzat kvartszextfordítása), ha a $k + 4$. fokú hangot tartalmazza a basszusban.

1.2.5. Definíció. Az előző definíció jelöléseivel H típusát az alábbi táblázat alapján határozhatjuk meg. Akkor is érvényesek ezek az elnevezések, ha a definiáló tulajdonságú tercek helyett azokkal oktav-ekvivalens hangközök szerepelnek.

A k . és a $k + 2$. fokú hangok távolsága	A $k + 2$. és a $k + 4$. fokú hangok távolsága	A hármashangzat típusa	A típus jelölése
nagy terc	kis terc	dúr hármashangzat	D
kis terc	nagy terc	moll hármashangzat	m
nagy terc	nagy terc	bő hármashangzat	B
kis terc	kis terc	szűk hármashangzat	sz

Bár a hangnemek definiálására csak a következő fejezetben fogunk sort keríteni, a soron következő G) **ábrán** szemléltetés céljából feltüntetjük az A-dúr és az a-moll hangnem skálahangokból felépülő hármashangzatait (rendre az I. fokútól a VII. fokúig), megadva a hármashangzatok típusainak kezdőbetűit is. A következő definíció már a klasszikus összhangzattan axiómáinak, ún. *szekesztési elveinek* előkészítését szolgálja. Ismét az 1.2.4 definíció jelöléseivel:

1.2.6. Definíció. Egy hármashangzatnév megfelel a klasszikus összhangzattannak, ha az dúr, moll, szűk vagy bő hármashangzatokat tartalmaz egy rögzített hétfokú skála (később: hangnem) mellett. Egy konkrét H négyszólamú szerkesztésbeli hármashangzat megfelel a klasszikus összhangzattannak, ha

- (i) a $\mathfrak{N}(H)$ megfelel a klasszikus összhangzattannak,
- (ii) H egy olyan M négyszólamú zenemű értékkészletében szerepel, amely M minden szólamához van társítva egy hangmagasság-tartomány⁹, ezenkívül az is, hogy a szólamok egymáshoz képest milyen távolságra lehetnek, és H szólamai ezeknek a szabályoknak megfelelően helyezkednek el,
- (iii) ha H alaphelyzetű hármashangzat, akkor a k . fokú hangja szerepel két szólamban,
- (iv) ha H kvartszextfordítás, akkor a $k + 4$. fokú hangot tartalmazza két szólamban,
- (v) H legfeljebb egy szólamban tartalmaz minden olyan hangot, amely a skálához képest módosított hang, vagy amely a skála első fokához tartozó vezető- vagy szeptimhang,
- (vi) ha H alaphelyzetű szűkhármas, akkor a $k + 2$. fokú hang nem a tenorban vagy a $k + 4$. fokú hang nem az altban szerepel,
- (vii) a hármashangzat lekottázható, vagyis az adott hétfokú skálához képest létezik egy olyan megszámlálható jelkészlet, amelynek valamelyik elemével a hármashangzat minden hangja azonosítható az adott foksámmal rendelt hangok között¹⁰
- (viii) **az utolsó pontot a tonalitás definíciója után adjuk meg.** Lásd: a D definíció. Ez addig nem fog inkonzisztenciát okozni.

⁹Például egy énekszólam vagy hangszer hangmagasság-tartománya. De a tartomány nem feltétlenül korlátos frekvenciaintervallum: lehet akár a mindkét irányban végtelen jóltemperált zongora frekvencia-tartománya, $\mathbb{R}^+$ is.

¹⁰Ilyen például a $\flat$ -k és $\sharp$ -ek rendszere – más jelölésrendszert ebben a dolgozatban nem is fogunk használni.

A fordítások elnevezése a *jellegzetes hangközök*, a basszushang és a többi (vele nem oktáv-ekvivalens) hang hangközei alapján született. A helyzetek neve pedig a basszus és a szoprán közötti hangköz alapján.

1.2.1. *Jelölés* (Fordítások és helyzetek jelölése.). Általában minden akkordjelölésnél a basszusra vonatkozó jellegzetes számokat a foksám alá, a többi jellegzetes számot a foksám mellé, sorban egymás fölé írjuk. Például első fokú, módosított hang nélküli akkordnál tetszőleges hétfokú skálában:

I – első fokú alaphelyzetű hármashangzat. Ezen belül (általában csak a zeneművek első akkordjánál írjuk ki:) I^8 – oktávhelyzet, I^5 – kvinthelyzet, I^3 – terchelyzet. I^6 – első fokú szextakkord, I_4^6 – első fokú kvartszextakkord.

Rövidebb megnevezésként az n . fokú alaphelyzetű akkordot n . foknak, sőt még egyszerűbben n -nek mondjuk. Így: második fok, kettő. A fordításokat pedig szintén csak tőszámnévvel: n -szext, n -kvartszext; így: kettő-szext, kettő-kvartszext.

A hármashangzatfajták részletes bevezetése után a négyszólamú szerkesztésbeli négyeshangzatok ismertetésénél már könnyebb dolgunk lesz. Maradjunk az 1.2.4 definíció jelöléseinél és készítsük el a $(\text{mod } 7)$ k ., $k + 2$., $k + 4$ és $k + 6$. fokú hangokból álló négyeshangzatot! Ekkor a k . fok és a $k + 6$. fok között szeptim hangköz jön létre, ezért az ilyen négyeshangzatot (konkrétan magát a négyeshangzatot és a hozzá tartozó négyeshangzatnevet is) *szeptimakkordnak* nevezzük. Az alap, terc, kvint megnevezések a hármashangzatokhoz képest változatlanok, a $k + 6$. fokú hang a szeptimakkord *szeptimhangja*; látni fogjuk, hogy ez gyakran az eddig használt értelemben is szeptimhang, amely a $k + 3$. fokhoz tartozik. A k ., $k + 2$., $k + 4$. fokokhoz tartozó hármashangzatnév a szeptimakkord *alsó parciális hármashangzata* és a $k + 2$., $k + 4$., $k + 6$. fokokhoz tartozó hármashangzatnév a szeptimakkord *felső parciális hármashangzata*. Alaphelyzetű szeptimakkordról beszélünk, ha a k . fok van a basszusban, egyébként pedig szeptimfordításról.

A szeptim hangköz és inverze, a szekund a korábbiak szerint disszonáns, feszültséget keltő hangközök. A tercekkel építkező alaphelyzetű szeptimakkordnál érezhető a legkevésbé a disszonancia, a fordításoknál jobban, hiszen ha a zenemű nem túl tág fekvésű, vagyis nincsenek egymástól messze (több oktávra) a szomszédos szólamok, akkor a szeptimfordításoknál nem a szeptim hangköz jelentkezik az alap és a szeptim között, hanem e két hang között *szekundsúrlódás*, szekund távolság van. Attól függően, hogy a basszushoz képest milyen hangközökre szerepelnek a szekundsúrlódásban lévő szólamok (oktáv-ekvivalencia erejéig), nevezzük a szeptimfordítást kvintszextnek (a terc van a basszusban), terckvartnak (a kvint van a basszusban) vagy szekundnak (a szeptim van a basszusban). Jelölés az előbbi példáknál leírtak szerint, pl. ötödik fokú szeptimnél: V^7 – alaphelyzetű öt-szeptim,

V_5^6 – öt-kvintszept, V_3^4 – öt-terckvart, V^2 – öt-szekund. **Ábra:** H).

1.2.7. Definíció. Egy négyeshangzatnév megfelel a klasszikus összhangzattannak, ha (megint csak az 1.2.4 definíció jelölésével):

- (i) egy szeptimakkord neve,
- (ii) mindkét parciális hármashangzatneve megfelel a klasszikus összhangzattannak,
- (iii) a k . és a $k+6$. akkordok között tiszta oktávnál (12 félhangnál) kisebb hangköz van.

Ha egy N négyeshangzat neve, $\mathfrak{N}(N)$ megfelel a klasszikus összhangzattannak és N egy olyan M négyszólamú zenemű értékkészletében szerepel, amely M minden szólamához társítva van egy hangmagasság-tartomány, és az, hogy a szólamok egymáshoz képest milyen távolságra lehetnek, továbbá N szólamai ezeknek a szabályoknak megfelelően helyezkednek el, akkor N megfelel a klasszikus összhangzattannak.

Az (iii) ponttal kizártuk a *bő hármashangzatot* mint pszeudo-szeptimakkordot: ez a (ii) pontot teljesíti, mert előáll két egymással enharmonikus bő hármashangzatból mint parciális hármashangzatokból, de szeptimhangja enharmonikus az alapjával, vagyis természetesen nem négyeshangzat. Az összes többi lehetséges párosítás alsó és felső parciális hármasra olyan szeptimakkordot ad, amilyennel dúr vagy moll hangnemben találkozni fogunk. Mivel a dúr hangnemnek egyelőre még csak a skáláját és annak enharmonikussági tulajdonságait ismerjük, a moll hangnemnek pedig még a skálájáról sem esett szó, csupán szemléltetéssel mutatjuk be, hogy a dúr és moll hangnemek *skálahangjaiból* felépülő szeptimakkordok közül melyik milyen típusú. A táblázat mellett kottás magyarázattal is: lásd az I) **ábrát**.

Terc	Kvint	Szeptim	Parciálisak	Hivatalos név	Triviális név	Példák dúrban	Példák mollban
N3	B5	N7	bő, dúr	bő hármas, nagy szeptim	nincs	nincsenek	$\text{III}^7_{5\sharp}$
N3	T5	N7	dúr, moll	dúr hármas, nagy szeptim	major szeptim	I^7, IV^7	VI^7
N3	T5	k7	dúr, szűk	domináns szeptim	dúrszeptim	V^7	$\text{V}^7_{\sharp}$
k3	T5	N7	moll, bő	összhangzatos mollszeptim	nincs	nincsenek	$\text{I}^7_{\sharp}$
k3	T5	k7	moll, moll	természetes mollszeptim	mollszeptim	$\text{II}^7, \text{III}^7, \text{VI}^7$	IV^7
k3	sz5	k7	szűk, moll	< nincs >	felsőszűk(ített) szeptim	VII^7	II^7
k3	sz5	sz7	szűk, szűk	szűkített szeptim	szűkszeptim	nincsenek	$\text{VII}^7_{\sharp}$

Kiegészítés: az alaphelyzetű domináns szeptimakkordot elfogadjuk a klasszikus összhangzattannak megfelelőnek akkor is, ha *hiányos*, vagyis a kvintje egyik szólamban sem szerepel, viszont az alapja kettőben – persze csak ha minden más feltétel teljesül az 1.2.7 definíció szerint. A következő definíció hasznunkra lesz majd a hangnemek konstrukciójánál:

1.2.8. Definíció (Hétfokú skála szeptimfüggvénye). A ?? táblázatban szereplő (azaz a klasszikus összhangzattannak megfelelő) négyeshangzattípusok halmazát jelöljük F -fel,

tetszőleges N négyeshangzat F -beli típusát pedig T_N -nel. Az S hétfokú skála hangjaiból előálló szeptimakkordok halmazát jelöljük $N(S)$ -sel. Az S skála szeptimfüggvényén az $sz : N(S) \rightarrow F; N \mapsto T_N$ függvényt értjük.

Megfigyelhetjük, hogy tetszőleges alaphang 4.-5.-6. felhangjai dúr, 5.-6.-7. felhangjai pedig szűk hármashangzatot alkotnak, és ezek mint parciális hármashangzatok domináns szeptimet adnak ki. Más klasszikus formájú hármashangzat vagy szeptimakkord nem szerepel a felhangrendszerben, ezért szokás a moll akkordokat és hangnemet – azok szépsége elismerésével – emberi konstrukciónak gondolni. A moll hangnem Európában az 1500-as években vált elfogadottá és a dúrral egyenrangúvá.

1.3. Hangnemek. A dúr és moll hangnemek konstrukciója.

A hétfokú skálákról ebben a fejezetben is tegyük fel, hogy E -beli hangokból állnak, és minden skálahang az E különböző összefüggő komponensében van! Hangnemről fogunk beszélni, de amiről ténylegesen szó lesz, az a *hangnemet adó skála* fogalma. A klasszikus szóhasználat szerinti hangneme *tonális zeneműveknek* lehet, ahogy azt nemsokára látni fogjuk – viszont a tonalitás definiálásához szükségünk van előbb a most következő fogalmakra és állításokra.

1.3.1. Definíció. Egy hétfokú skálát hangnemnek nevezünk, ha a következő három feltétel teljesül rá:

- (i) az V. fokú hármashangzat dúr, az V. fokú szeptimakkord domináns szeptim, és ezek tartalmazzák az I. fok vezetőhangját,
- (ii) minden olyan domináns szeptim, amely a skála hangjaiból áll, oldódni képes skálahangokból álló dúr vagy moll hármashangzatra. Vagyis ha az i . fokú szeptimakkord domináns szeptim, akkor az $i + 3 \pmod{7}$ fokú hármashangzat alapja az i . fokú skálahangtól egy tiszta kvart távolságra van és ez a hármashangzat dúr vagy moll,
- (iii) a skála skálahangokból felépíthető összes hármas- és négyeshangzat neve megfelel a klasszikus összhangzattannak (lásd az 1.2.6 és az 1.2.7 definíciókat).

A definícióból igen egyszerűen következik a hangnemek alábbi tulajdonsága:

1.3.1. Állítás. *Hangnemben az I. fokú hármashangzat dúr vagy moll, a VII. fok és az I. fok között kis szekund távolság van.*

Megadtunk a hangnem definícióját, amelyről előre tudjuk (és hamarosan az Olvasó is biztosan látja majd), hogy a dúr és az összhangzatos moll skálák biztosan teljesítik. Ugyanakkor nem azt mondtuk, hogy ezt a kétfajta skálát nevezzük hangnemnek, hanem megadtunk olyan stabilitási tulajdonságokat hétfokú skálákra vonatkozóan, amelyek a klasszika szemlélete szerint a hangnem, a tonalitás érzetét adják. Célunk most egyrészt, hogy belássuk, hogy a dúr és az összhangzatos moll skála (utóbbit még definiálni is kell) hangnemet ad, másrészt megtalálni minden más, ezektől különböző hangnemet, ha vannak ilyenek.

Itt átugrunk egy zenetörténeti jellegű részfejezetet a TDK-dolgozatból, amelyben áttekintettük a *modális skálákat*, vagyis az összes olyan hétfokú skálát, amelyet úgy kapunk, hogy veszünk egy tiszta dúr skálát, majd ugyanezt egy oktávval följebb, és az így keletkező tizennégy hangú skálának tekintjük hét (frekvencia szerint) egymás utáni hangját mint hétfokú skálát. Megállapítottuk, hogy ezek közül pontosan az *ión*, vagyis a tiszta dúr skála ad hangnemet. Ezek után elkészítettük az összhangzatos modális skálákat: ha a modális skála VII. fokú hangja nem volt (oktáv-ekvivalencia erejéig) enharmonikus a skála I. fokának vezetőhangjával, akkor a VII. fokú hangot a *mesterséges* vezetőhangra cseréltük. Így kaptunk egy újabb hangnemet adó skálát: az *összhangzatos eolt* vagy *összhangzatos mollt*, amely egy tiszta dúr skála VI., VII., ..., V. fokú hangjait tartalmazza, az utolsót félhanggal vezetőhanggá felemelve. Ez tehát az *eol* avagy *természetes moll* modális skála összhangzatosított változata. Az ezen skála által meghatározott hangnem a *moll hangnem*. Célunk most az, hogy a dúr és a moll hangnem ismeretében osztályozzuk a hangnemeket, és eldöntsük, hogy ezen két hangnemtípuson kívül, amelyek az elmúlt öt évszázadban Európában meghatározóak, létezik-e másfajta.

1.3.2. Állítás (Moll-lemma). *Tetszőleges H hangnemben a következő feltételek ekvivalensek:*

- (i) *A IV. fokú hármashangzat moll,*
- (ii) *a hangnem szeptimfüggvénye bijektív (mind a 7 szeptimakkord különböző, lásd az 1.2.8 definíciót),*
- (iii) *a VII. fokú szeptimakkord szűkített.*

Bizonyítás. Jelöljük a skálahangokat a $\mathbb{Z}_{12}$ azon elemével, amennyi az I. foktól való távolságuk félhangban mérve! Ekkor a fokok jelölése rendre, a hangnem tulajdonságai (dúr V. fok, domináns öt-szeptim) alapján: $(0, 2, ?, 5, 7, ?, 11)^{11}$.

¹¹Ebben a bizonyításban és a következőben is az aktuálisan ismeretlen jelölésű skálahangok fokszámaán kérdőjel áll.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Ha a IV. fok moll, akkor a fokszámsorozat: $(0, 2, ?, 5, 7, 8, 11)$. Ellenőrizhetjük, hogy akár 3, akár 4 félhangra van a III. fokú hang az I.-től, a szeptimfüggvényünk bijektív, más esetben pedig lesz olyan, skálahangokból álló hármashangzat, amely nem felel meg a klasszikus összhangzattannak.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ha a szeptimfüggvény bijektív, akkor a fokszámsorozat akár $(0, 2, 3, 5, 7, ?, 11)$ (moll első fokú hármas), akár $(0, 2, 4, 5, 7, ?, 11)$ (dúr), mindkét esetben szükségképpen kapjuk, hogy a VI. fok jele csak a 8 lehet. Ekkor viszont a 11-2-5-8 jelű VII. fokú szeptim szűkített.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Ha a VII. fokú szeptim szűkített, akkor a fokszámsorozat minden eleme ismert a III. fokon kívül: $(0, 2, ?, 5, 7, 8, 11)$. Emiatt a III. foktól függetlenül (ez az (i) $\Rightarrow$ (ii) iránynál meggondoltak szerint 3 vagy 4 félhanggal lehet az I. foknál magasabb) moll a IV. fokú hármas. $\square$

A bizonyítás során többször láttuk, hogy a három ekvivalens feltételt E -beli alaphang esetén pontosan két hangnem elégíti ki. A feltételeket teljesítő két hangnemben a VI. és a VII. fokú skálahangok közötti bővített szekund távolság 3 félhanggal, vagyis egy kis terccel enharmonikus, de a később részletezett *szeptimhang- és vezetőhang-axióma* miatt a klasszikus összhangzattan négyszólamú modelljének kontextusában disszonáns.

1.3.3. Állítás. *Egy adott (E -beli) alaphanggal pontosan három különböző hangnem létezik: a tiszta dúr skála által meghatározott dúr hangnem és a moll-lemma feltételeit teljesítő két hangnem, amelyek pontosan abban különböznek, hogy az I. fokú hármas dúr vagy moll. Az előbbi pikárdiai terces moll, az utóbbit moll hangnemnek nevezzük.*

Bizonyítás. Tetszőleges hangnemben ismertek a következő fokú hangok (az előző bizonyítás jelölésével): $(0, 2, ?, 5, 7, ?, 11)$. A hangnem definíciója szerint az I. fokú hármas-hangzat vagy dúr, vagy moll. Ha moll, akkor a III. fokot 3 jelöli (a III. fokú skálahang 3 félhanggal magasabb a basszusnál), és a moll-lemma (iii) $\rightarrow$ (iv) irányának bizonyításából kiolvasható, hogy a VI. fokot csak a 8 jelölheti. Így ekkor az összhangzatos moll skálát és a moll hangnemet kapjuk. Ha az első fokú hármashangzat dúr, akkor a III. fokot 4 jelöli, és kérdéses még a VI. fokú skálahang. Ha az 8 félhanggal magasabb az I. fokú skálahangnál, akkor a moll-lemma feltételeit teljesítő, de a molltól különböző hangnemet kapunk. Ha pedig 9 félhanggal magasabb az I. foknál a VI., akkor a dúr hangnemet kapjuk. Könnyen ellenőrizhető, hogy bármilyen más lehetőség a VI. fokú hangra ellentétes azzal a hangnemtulajdonsággal, hogy a skálahangokból felépülő összes hármashangzat- és szeptimakkordnév megfelel a klasszikus összhangzattannak. (Ábra: K.) $\square$

1.3.2. Definíció. Az eol skálát természetes moll, az összhangzatos eol skálát összhangzatos moll skálának is nevezzük. Dallamos moll skálában lévő dallamról beszélünk, ha a dallam fölfelé a 0-2-3-5-7-9-11-12 félhanggal az alaphang felett lévő skálát (lá-ti-dó-ré-mi-fi-szi-lá), lefelé viszont a 12-10-8-7-5-3-2-0 (lá-szó-fá-mi-ré-dó-ti-lá) skálát (tehát a természetes moll skálát) használja.

1.3.1. *Megjegyzés.* Bár a dallamos moll skála egyik iránya sem ad hangnemet, mégis fontos a szerepe a klasszikus és főleg a bachi összhangzattanban: a moll hangnemű Bach-korálok cantus firmusai (a szopránban szereplő, rögzített, közkeletű protestáns koráldallamok) igen gyakran dallamos mollban íródtak.

1.3.3. Definíció (Dúr és moll hangnem). A tiszta dúr skála által meghatározott hangnemet dúr hangnemnek, az összhangzatos moll skála által meghatározott (avagy a moll I. fokú, bijektív szeptimfüggvényű) hangnemet moll hangnemnek nevezzük.

1.3.1. *Jelölés.* A J első fokú dúr hangnem jelölése (ahol $j \in E$ tetszőleges): J -dúr vagy J . Az J első fokú moll hangnem jelölése: j – *moll* vagy j .

Ebben a dolgozatban a hagyományos magyar jelölést fogjuk használni az egyes hangnemek akkordjaival kapcsolatban. Ha egy adott hangnemben egy akkord tartalmaz módosított hangot, a módosított hang hangközét is kiírjuk, de a tercnél gyakran szám nélkül, a basszusnál pedig az akkordnév alá írva: pl. moll hangnemben $V^\sharp$ — ötödik fok, $V_\sharp^7$ — ötödik fokú szeptim (öt-szeptim), $III^{5\sharp}$ — harmadik fok, $VII_\sharp^7$ — hét-szeptim stb. A $\sharp$ mindig egyszeres felemelést, a $\flat$ mindig egyszeres leszállítást, a $\natural$ az adott ütembeli módosítás feloldását jelenti, függetlenül a hangnemtől, vagyis mindig a C-dúr, a-moll és (szintén az a alaphangú eol skálához viszonyított) pikárdiai terces a-moll szerinti módosított hangjelöléseket alkalmazzuk.

A dolgozat első figyelemre méltó önálló eredménye, hogy a hangnemet konvencionális módon definiálva, de nem rögzítve, hogy csak dúr és moll hangnem létezik, megkaphatjuk a kétfajta hangnem között átmenetet teremtő „pikárdiai terces moll” vagy „leszállított VI. fokú dúr” hangnemet. A moll-lemma gyakorlati jelentősége, hogy a szűkített VII. fokú szeptimakkord, a VI. és VII. fokok közötti bővített szekund távolság és a moll IV. fok olyan erősen a moll hangnemre utaló tulajdonságok, hogy ezek fennállása mellett (az európai klasszikus zene kultúrkörében) még akkor sem érezzük úgy, hogy dúr hangnemben vagyunk, ha az I. fokú hármashangzat, a hangnem középponti akkordja dúr. Ez a harmadik fajta hangnem rendszeresen felbukkan a klasszicista és romantikus zeneművek közben is (pl. Smetana Moldva című darabjában), a leggyakrabban azonban mégis úgy szerepel, hogy bizonyos moll hangnemben írt műveket felemelt tercú (dúr) első fokkal zárnak, de

– moll IV. fokkal vagy egyszerűen csak a fel nem emelt VI. fokú hang beiktatásával – mindig megmutatják, hogy nem jutottunk át az azonos alapú dúr hangnembe (pl.: Bach összes I. fokra záró moll korálja, Chopin b-moll és g-moll noktürnje). Az egyértelműen moll záróhangnemű (lásd majd a tonalitás definícióját!), de dúr I. fokkal befejeződő zeneművekben az I. fokú hármas felemelt tercét nevezzük *pikárdiai tercnak*. Akusztikai okokból *J.S. Bach az összes I. fokú akkorddal záruló vokális korálját pikárdiai terccel fejezi be, részletesebben lásd a ?? részt.*

Az eddigiek alapján lehet önálló hangnemnek tekinteni a pikárdiai terces moll hangnemet és abban komponálni, de erre csak kevés példa ismert. Ezt magyarázhatjuk azzal, hogy az 1500-as évektől (legalább a XIX. század végéig általánosan) dúr–moll dualitásban gondolkozó európai tonális zenéhez szokott hallgatónak egy zeneművel kapcsolatban automatikusan az az elvárása, hogy a zenemű vagy dúrban, vagy mollban íródik. A pikárdiai terces moll hangnem pedig csak egy-egy skálahangban különbözik a vele azonos alaphangú dúrtól és molltól, emiatt a hallgató számára percepció szempontjából instabilabb a két másik hangnemtípusnál. A most megtalált harmadik hangnemfajta működésének részletes megismerésére és bemutatására a mű teljes változatában sort, alkalmazva a dúr és moll hangnemben használatos akkordok típusaival és szerkesztésével kapcsolatos tudásunkat a klasszikus összhangzattanból. Ennek eredményét, a pikárdiai terces moll hangnem *valószínűsíthetően konvergens akkordjait* azonban felsoroljuk az 1.7 fejezetben.

1.4. A négyszólamú szerkesztés topológiája

Már elláttuk a jóltemperált zongorát a d_2 metrikával és definiáltuk pozitív egész n -re az n -szólamú zeneművet illetve annak szólamait is (lásd az 1.2. fejezet elejét). Most a *szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneművet* azaz *négyszólamú összhangzattanpéldát* mint a négyszólamú zenemű speciális fajtáját fogjuk meghatározni. $\mathbb{R}$ -ről a továbbiakban mindig tegyük fel, hogy a szokásos topológiával van ellátva! Általában ha ebben a fejezetben hármashangzatról vagy szeptimakkordról beszélünk, az K^4 egy-egy rögzített elemét jelenti. Mindig külön kiemeljük, ha hármas- vagy négyeshangzatnévről lesz szó.

1.4.1. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és M n -szólamú zenemű!

- (i) $\inf \mathcal{D}(M)$ a zenemű kezdőpontja,
- (ii) $\sup \mathcal{D}(M)$ a zenemű végpontja, ha létezik,
- (iii) t -ben generálpauza van, ha $t \notin \mathcal{D}(M)$, de $\exists t_1, t_2 \in \mathcal{D}(M) : t_1 < t < t_2$.

Az M n -szólamú szerkesztésű zenemű tehát folytonos időben játszódik, és $\mathcal{D}(M)$ minden pontjában mind az n szólamban szól hang (hiszen $M(t) \forall t \in \mathcal{D}(M)$ -re egy n -eshangzat). A zenemű értelmezési tartománya felülről nem feltétlenül korlátos (ahogy a valós zenében sem: számos könnyűzenei mű elhalkulva, végtelen ismétlődésbe futva fejeződik be), de a zenemű kezdetének időpontja mindig meghatározható. Az egyszerűség kedvéért itt nem E^4 , hanem csak K^4 értékű zeneműveket tekintünk, de a kottaírásnál és -olvasásnál természetesen mindig egy hétfokú skála alapján határozzuk meg a hangok fokszámát. Ténylegesen E^4 értékű, jóltemperált szólamot nem tartalmazó négyszólamú zeneműveknél (pl. vonósnégyes) előfordul, hogy egyébként enharmonikus hangokat (pl. Cisz és Desz) a felhangrendszerből kiindulva különbözőnek kell játszani.

1.4.2. Definíció. Az $M : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow K^4$ négyszólamú zeneművet szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneműnek avagy négyszólamú összhangzattanpéldának nevezzük, ha:

- (i) $\forall t \in \mathcal{D}(M)$: $M(t)$ egy klasszikus formájú (dúr, moll, szűk vagy bő) hármashangzatnak vagy az 1.2.7 definíciónak megfelelő fajtájú szeptimakkordnak alaphelyzetű változata vagy fordítása,
- (ii) $\forall H \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$ hármashang- vagy négyeshangzatra $M^{-1}(H)$ diszjunkt balról zárt, jobbról nyílt intervallumok uniója¹²,
- (iii) mind a négy szólamhoz adott egy-egy hangmagasság-intervallum (hangszer vagy énekszólam konvencionálisan elfogadott hangmagassági tartománya), amelyen belül mozog M a teljes $\mathcal{D}(M)$ -en.
- (iiii) a zenemű lekottázható, azaz $\mathcal{D}(M)$ felosztható megszámlálható sok diszjunkt, lefedő balról zárt jobbról nyílt intervallum rendszerére, hogy minden intervallumhoz létezik olyan E -beli, hangnemet adó hétfokú skála, amelyben $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ -re $\text{Ran } pr_i \circ M$ -nek meghatározható a fokszáma, valamilyen speciális jelöléssel (pl. $\flat$, $\sharp$ és ezek többszörözése) a nem skálahangokat.

1.4.3. Definíció. Az M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű burka: $B(M) = [\inf \mathcal{D}(M), \sup \mathcal{D}(M)[$, azaz a zeneművet tartalmazó legszűkebb balról zárt, jobbról nyílt intervallum.

1.4.4. Definíció. Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű!

¹²Itt tehát H -t nem mint hármashang- vagy négyeshangzatnevet, hanem mint konkrét alakú hármashang- vagy négyeshangzatot, K^4 egyetlen elemét tekintjük, de könnyen látható, hogy ha így teljesül a (ii) feltétel $\forall H \in \mathcal{R}(\mathcal{M})$ -re, akkor $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ minden hármashang- és négyeshangzatnévére is teljesül.

- i) $t \in \mathcal{D}(M)$ dallamkezdőpont, ha $\exists r > 0 : B_r(x) \cap \mathcal{D}(M) = [t, t + r[$,
- ii) $t \in \overline{\mathcal{D}(M)}$ dallamvégpont, ha $\exists r > 0 : B_r(x) \cap \mathcal{D}(M) \subseteq^{13} [t - r, t[$,
- iii) $t \in \text{Int } \mathcal{D}(M)$ akkordváltási pont, ha $\exists r > 0 : \forall x \in [t - r, t[: M(x) = H_1, \forall y \in [t, t + r[: M(y) = H_2$, ahol H_1 és H_2 a K^4 különböző elemei. Az M akkordváltási pontjainak halmazát $A(M)$ -mel jelöljük.

1.4.1. Lemma. *Ha M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, $A(M)$ számossága legfeljebb megszámlálhatóan végtelen. Ha λ a Lebesgue-mérték és*

$$\inf_{t \in \mathcal{D}(M)} \sup \{r_1 + r_2 \mid r_1, r_2 \geq 0 \wedge \forall x \in [t - r_1, t + r_2[: M(x) = M(t)\} > 0,$$

akkor $A(M)$ -nek nincs torlódási pontja, ha ezen felül $\sup_{H \in \mathcal{R}(M)} \lambda(M^{-1}(\mathfrak{N}(H))) < \infty$, akkor $A(M)$ véges is¹⁴.

Elnevezések: $\inf_{t \in \mathcal{D}(M)} \sup \{r_1 + r_2 \mid r_1, r_2 \geq 0 \wedge \forall x \in [t - r_1, t + r_2[: M(x) = M(t)\}$ az M minimális,

$\sup_{t \in \mathcal{D}(M)} \sup \{r_1 + r_2 \mid r_1, r_2 \geq 0 \wedge \forall x \in [t - r_1, t + r_2[: M(x) = M(t)\}$ -t pedig az M maximális akkordhossza.

1.4.1. Állítás. *Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű!*

$$\text{Ha } \inf_{t \in \mathcal{D}(M)} \sup_{\substack{r_1, r_2 \geq 0 \\ \forall x \in [t - r_1, t + r_2[: M(x) = M(t)}} r_1 + r_2 > 0:$$

(i) $t \in \mathcal{D}(M)$ dallamkezdő pont $\Leftrightarrow t \notin \text{Int } \mathcal{D}(M)$.

(ii) $t \in \overline{\mathcal{D}(M)}$ dallamvégpont $\Leftrightarrow t \notin \mathcal{D}(M)$.

Bizonyítás. (i) Legyen $t \in \mathcal{D}(M)$ tetszőleges. Ekkor $M^{-1}(M(t))$ t -t tartalmazó összefüggő komponense egy balról zárt, jobbról nyílt intervallum, ezért $\exists r > 0 : [t, t + r[\subseteq \mathcal{D}(M)$. Ha $t \notin \text{Int } \mathcal{D}(M)$, akkor $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(t) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}(M)) \neq \emptyset$, vagyis t tetszőlegesen kis környezetének t -től balra eső felébe esik olyan pont, amelyben generálpauza van. Mivel sem $A(M)$ -nek, sem M dallamkezdő pontjai halmazának nincs torlódási pontja, ez csak úgy lehetséges, ha $\exists r' > 0 :]t - r', t[\cap \mathcal{D}(M) = \emptyset$, vagyis t dallamkezdő pont.

(ii) Ismét használjuk fel, hogy sem $A(M)$ -nek, sem M dallamkezdő pontjai halmazának nincs torlódási pontja, vagyis $\mathcal{D}(M)$ felosztható egymáshoz csatlakozó, diszjunkt balról zárt, jobbról nyílt olyan $I_1, I_2, \dots$ intervallumok sorozatára, hogy a páratlan sorszámú

¹³A göngyölítési pont fogalmának bevezetése után érdemes elgondolkozni azon, miért nem egyenlőség szerepel itt.

¹⁴Felhasználjuk, hogy összesen véges sok hármas- és négyeshangzatnév létezik.

intervallumok részhalmazai $\mathcal{D}(M)$ -nek, a páros sorszámúakon pedig generálpauza van. Ekkor $\overline{\mathcal{D}(M)} \setminus \mathcal{D}(M)$ pontosan az I_{2k+1} és I_{2k+2} intervallumokat elválasztó pontok, vagyis éppen a dallamvégpontok halmaza. $\square$

1.4.5. Definíció. Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű. A t az M göngyölítési pontja, ha tetszőleges $r > 0$ valós szám esetén a $[t - r, t[$ végtelen sok dallamkezdő vagy akkordváltási pontot tartalmaz.

A göngyölítési pontot mint a gyakorlatban meg nem valósítható zenei jelenséget a későbbiekben kizárjuk a klasszikus összhangzattannak megfelelő zeneműveknél. A következő állítás előtt az egyértelműség kedvéért definiáljuk a teljes felhalmozódási pont fogalmát.

1.4.6. Definíció. Legyen (X, τ) topologikus tér, $A \subseteq X$, $x \in X$. Az x teljes felhalmozódási pontja az A halmaznak, ha $\forall U \in \tau : x \in U \Rightarrow |U \cap A| = |A|$.

1.4.2. Állítás. Szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű minden torlódási pontja teljes felhalmozódási pont.

Bizonyítás. Legyen x az M szigorú négyszólamú szerkesztési zenemű értelmezési tartományának torlódási pontja, vagyis $\forall n \in \mathbb{N} : B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap \mathcal{D}(M) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Ekkor a kiválasztási axióma szerint $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap \mathcal{D}(M) \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Ezért létezik egy $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}(M)$ sorozat, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $a(n) \in B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap \text{Dom} M \setminus \{x\}$ és $M(a(n))$ egy $a(n)$ -t tartalmazó balról zárt, jobbról nyílt intervallumon szól, amely a szigorú négyszólamú szerkesztés tulajdonságai miatt egy nem-üres intervallumban metszi $B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap \mathcal{D}(M) \setminus \{x\}$ -et. Ez azt jelenti, hogy $\forall n \in \mathbb{N} : |B_{\frac{1}{n+1}}(x) \cap \mathcal{D}(M) \setminus \{x\}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$, vagyis x teljes felhalmozódási pontja a kontinuum számosságú $\mathcal{D}(M)$ -nek¹⁵. $\square$

1.4.3. Állítás. Szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű jobbról folytonos.

Bizonyítás. A jobbról folytonosság diszkrét értékű függvényénél pontosan a következőt jelenti:

$$\forall x \in \mathcal{D}(M) \exists \varepsilon > 0 : \forall y \in [x, x + \varepsilon[\cap \mathcal{D}(M) : M(y) = M(x).$$

Ha $x \in \mathcal{D}(M)$, akkor az előző definíciók és állítások szerint két eset lehetséges: ha x -ben nem kezdődik új akkord, vagyis $\exists \varepsilon > 0 : \forall y \in B_\varepsilon(x) M(y) = M(x)$, akkor $[x, x + \varepsilon[$ tanúsítja a jobbról folytonosságot. Ha x -ben új akkord kezdődik: $M(x) = H$ (meggondolható, hogy ekkor x akkordváltási pont vagy olyan göngyölítési pont, amelyben M értelmezett), akkor pedig $M^{-1}(H)$ x -et tartalmazó összefüggő komponense (ez is egy balról zárt, jobbról nyílt intervallum) mutatja, hogy M x -ben is jobbról folytonos. Így M minden pontban jobbról folytonos, ahol értelmezett. $\square$

¹⁵A bizonyítás csak akkor nem helyes, ha $\mathcal{D}(M) = \emptyset$, de az állítás ekkor is igaz.

Az eddigiekben tulajdonképpen az *ív hosszparaméterezésű* négyszólamú összhangzat-tanpéldákat definiáltuk: vagyis legyen adva egy 1 szekundum hosszú hang, ezt tekintjük egész hangnak, a zeneművet egyenletes sebességgel játsszuk le, tehát ha egy ütem egy egész hangból áll (ahogy a zeneirodalomban gyakran, a 4/4, 2/2 ütemmutatóknál), akkor pontosan 1 másodpercenként kezdődik egy új egész hang. Most térjünk rá a változó sebességgel lejátszott szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneművekre:

1.4.7. Definíció. Legyen M n -szólamú zenemű valamely $n \in \mathbb{N}^+$ -ra, Θ pedig $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ szigorúan monoton növény, folytonos függvény, és a $[0, \infty[$ felosztható megszámlálható sok egymáshoz csatlakozó, de diszjunkt balról zárt, jobbról nyílt intervallumra $(I_i)_{i \in \omega}$ úgy, hogy ezen intervallumok mindegyikének belsejében $\Theta \in C^2(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$ immerzió és $\inf_{n \in \omega} \lambda(I_i) > 0$. Ekkor Θ -t lejátszási függvénynek vagy egyszerűen lejátszásnak, $M \circ \Theta|_{B(M)}$ -t az M Θ -hoz tartozó lejátszásának hívjuk, $t \in B(M)$ paraméter esetén $\Theta'(t)$ a t pontbeli lejátszási sebesség, $\Theta''(t)$ pedig a lejátszási gyorsulás, ha ezek léteznek.

Ha $\Theta' \equiv 1$ (egészhang/szekundum) $B(M)$, akkor egységparaméterezésű, ívhosszparaméterezésű, egységpályasebességű vagy természetes paraméterezésű n -szólamú zeneműről beszélünk.

1.4.8. Definíció. A Θ által generált μ_Θ Lebesgue-Stieltjes-mérték esetén bármely M négyszólamú összhangzattanpéldára $B(M)$ tetszőleges A Lebesgue-mérhető részhalmazára $\mu_\Theta(A) = \int_A 1 \, d\Theta(x) = \int_A \Theta'(x) \, dx$ -et az A zeneműrészlet Θ lejátszásbeli hosszának hívjuk, ha ez az integrál véges.

A lejátszásfüggvények kompakt halmazon mindig korlátos változásúak, így van értelme Stieltjes-integrálról beszélni.

1.4.9. Definíció. Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű! $A \subseteq B(M)$ Ligeti–Boulez-nullmértékű halmaz, ha M minden Θ lejátszása esetén $\mu_\Theta(A) = 0$ ¹⁶.

1.4.4. Állítás. Ha $A \subseteq [a, b] \subseteq B(M)$, akkor A Ligeti–Boulez-nullmértékű $\Leftrightarrow$ Lebesgue-nullmértékű.

Bizonyítás. $\Rightarrow$ Legyen $\Theta = id_{\mathbb{R}}$! Ekkor $\mu_{id_{\mathbb{R}}}(A) = \lambda(A) = 0$.

$\Leftarrow$ Mivel A nullmértékű, lefedhető zárt intervallumok tetszőlegesen kis összhosszúságú rendszerével is. Ebből következik, hogy a zárt intervallumaink akár diszjunktak is lehetnek, vagyis tetszőleges $\delta > 0$ esetén létezik olyan $\{[x_n, y_n]\}_{n=1}^\infty$, hogy $i \neq j$ esetén $[x_i, y_i] \cap [x_j, y_j] = \emptyset$, $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [x_n, y_n]$, $\sum_{n=1}^\infty \lambda([x_n, y_n]) < \delta$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám, $\Theta : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tetszőleges lejátszás. Mivel az $[a, b]$ -re megszorított Θ

¹⁶Az elnevezéssel kapcsolatban lásd: [2; p. 142.].

szakaszonként integrálfüggvény, ezért abszolút folytonos, így folytonos is. A szigorúan monoton növekedés miatt $\forall i \in \mathbb{N}$ -re a minimumát x_i -ben, a maximumát y_i -ben veszi fel a vizsgált intervallumrendszeren. Így $\Theta(A) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\Theta(x_n), \Theta(y_n)]$, $\lambda([\Theta(x_n), \Theta(y_n)]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda[\Theta(x_n), \Theta(y_n)] < \varepsilon$, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda([x_n, y_n]) < \delta(\varepsilon)$, az abszolút folytonosság miatt. Vagyis $\delta(\varepsilon)$ megfelelő választásával tetszőleges ε -nál kisebb összhosszúságú intervallumrendszerrel lefedhetjük A -t bármely lejátzás esetén $\Rightarrow A$ Lebesgue-nullmértékű tetszőleges Θ -ra $\Rightarrow A$ Ligeti–Boulez-nullmértékű halmaz. $\square$

1.4.5. Állítás. *A lejátzási függvények a kompozícióra nézve kommutatív csoportot alkotnak (ezt lejátzási csoportnak nevezzük és $PL(\mathbb{R})$ -rel jelöljük).*

Bizonyítás. Elég azt megmutatnunk, hogy lejátzások kompozíciója és lejátzás inverze szintén lejátzás — ekkor az asszociativitás és kommutativitás a $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ függvénytérből öröklődik.

Legyenek Θ_1 és Θ_2 lejátzások, M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű! $\Theta_2 \circ \Theta_1$ is szigorúan monoton növekvő függvény, és folytonos is, mivel folytonosak kompozíciója. Tekintsük $B(M)$ -nek a Θ_1 által meghatározott intervallumokra való felosztását. Vegyük el $[0, \infty[$ -ből az ehhez tartozó osztópontokat és azon x -eket is, amelyekre $\Theta_1(x)$ a Θ_2 -höz tartozó intervallumvégpont. Ez összesen még mindig megszámlálható sok pont, amelyeknek nincs torlódási pontja, és ezen végpontok által meghatározott intervallumok belsejében $\Theta_2 \circ \Theta_1$ két immerzió kompozíciója, így a láncszabály szerint ennek a deriváltja sem tűnhet el. Tehát lejátzások kompozíciója lejátzás.

Legyen Θ tetszőleges lejátzás. Θ^{-1} biztosan függvény (az állításnak megfelelő halmazon értelmezett), mert Θ szigorúan monoton növekvő, így injektív. Sőt Θ^{-1} is szigorúan monoton nő. Azokon a nyílt intervallumokon, ahol Θ immerzió, az inverzfüggvénytétele alkalmazható, így ezeken a halmazokon Θ^{-1} is immerzió. Azt kell még bizonyítani, hogy Θ^{-1} minden pontban folytonos. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan x , ahol ez nem teljesül! Az eddigiek szerint ekkor itt Θ^{-1} -nek ugrása van, létezik egy olyan $[a, b] \subset [0, \infty[$ zárt intervallum, amely nem része $\mathcal{R} \Theta^{-1}$ -nek. Ennek a folytonos Θ általi képe a Darboux-tétel miatt szintén zárt intervallum. Így $\Theta \circ \Theta^{-1} = id_{[0, \infty[}$ nem lejátzás, mert $[\Theta(a), \Theta(b)] \subseteq [0, \infty[$ -n nincs értelmezve. De $id_{[0, \infty[}$ -ra teljesül a lejátzás definíciója, így ellentmondásra jutottunk. Így Θ^{-1} folytonos, vagyis az eddigiek alapján lejátzás. Tehát $PL(\mathbb{R})$ csoport. $\square$

Megjegyezzük, hogy a bizonyításnál felhasználtuk a szigorú négyszólamú szerkesztést, de a kapott eredmény attól független, hiszen a lejátzásfüggvény tulajdonság nem függ attól, hogy négyszólamú összhangzattanpéldát vagy egyéb n -szólamú zeneművet

paraméterezünk-e át vele. Könnyen ellenőrizhető, hogy lejátszásfüggvények pozitív számszorosa, konvex kombinációja és összege is lejátszásfüggvény, vagyis $PL(\mathbb{R})$ (mint részhalmaz) *konvex kúp* a folytonos függvények $C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+)$ vektorterében.

1.4.10. Definíció. Egy M négyszólamú összhangzattanpélda megvalósítható, ha

- (i) $\mathcal{D}(M)$ lezártja kompakt (a ∞ nem torlódási pontja $\mathcal{D}(M)$ -nek),
- (ii) az M akkordjaihoz tartozó intervallumok hosszának infimuma pozitív, és ha $B(M) \neq \mathcal{D}(M)$, akkor az M generálpauzáihoz tartozóké szintén.

Ha egy négyszólamú összhangzattanpélda értelmezési tartománya nem korlátos, akkor természetesen nem következik abból, hogy az akkordhosszak infimuma 0, – vagyis hogy az akkordokhoz tartozó intervallumok hossza egy részsorozat mentén nullához tart – göngyölítési pont létezése a zeneműben. Ilyenkor elképzelhető, hogy bármely kompakt halmazra megszorítva a zeneművet megvalósítható összhangzattanpéldát kapunk, ezzel szemben göngyölítési pont már korlátos halmazon elrontja a megvalósíthatóságot.

1.4.11. Definíció. Ha M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, $x \in \mathcal{D}(M)$, $M(x) = H$, akkor $M^{-1}(H)$ x -et tartalmazó összefüggő komponensét az $M(x)$ tartományának nevezzük.

Az $[a, b[\subseteq B(M)$ intervallum Θ lejátszás szerinti megfelelése: két diszjunkt, együtt lefedő (egymáshoz csatlakozó) balról zárt, jobbról nyílt intervallumra (I, J) való felosztása, amelyekre $\mu_\Theta(I) = \mu_\Theta(J)$.

Ahogy már említettük, a négyszólamú összhangzattanpéldákkal fogjuk modellezni a klasszikus összhangzattan axiómarendszerét, szemléletét. Ezek viszont valóban tankönyvi példák, nem műalkotások, igen ritkán képviselnek magas esztétikai értéket. Apró, lokális változtatások, a figurációk – és persze a szoprándallamok, amelyeket Bach megharmonizált, valamint az a szemlélet, hogy mind a négy szólamban értelmes dallamnak kell szerepelnie – teszik az összhangzattanpéldákkal szemben élő zenévé, művészetté a négyszólamú korálokat. A Függelék B részfejezetét adja a négyszólamú korál definíciója, amelyet a szigorú négyszólamú szerkesztés segítségével alkottunk meg. Ez bizonyára nem írja le maradéktalanul az összes Bach-korált, de a műfaj jellegzetes fordulatait mégis tartalmazza.

A továbbiakban a szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneműveket fogjuk tárgyalni és nem a korálokat, mert a figurációkra folyamatosan tekintettel kéne lennünk a definíciók, tételek és bizonyítások megalkotása során, és úgy nehezedne meg a matematikai leírás, hogy végül nem kapnánk általánosabb, értékesebb eredményt, mint ha csak a négyszólamú

összhangzattanpéldákat tárgyalnánk. Látni fogjuk viszont, hogy a szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneművekkel modellezett összhangzattani struktúra teljes egészében érvényes a korálokra, de még sokkal bonyolultabb olyan zeneművekre is, amelyek a klasszicista szerkesztési szabályoknak eleget tesznek, ha általánosabban, esztétikai szempontból alkalmazzuk az itt matematikai pontossággal definiált szabályokat – deskriptív (pl. mint a Bach-korálok jellemző tulajdonságainak modellje) és preskriptív (pl. mint a középfokú zeneoktatásban megtanított korálharmonizálási szabályok) értelemben is.

A későbbiekben, különösen amikor majd hétakkordos modulációkkal foglalkozunk, elhagyjuk a négyszólamú összhangzattanpéldák topologikus jellemzését, helyette egyszerűen az akkordok véges sorozatát vizsgáljuk – ekkor nem lesz ennél bonyolultabb modellre szükségünk. Azonban ha egyből csak akkordsorozatokot tekintenénk, nem lenne eszközünk a végtelen zeneművek klasszikus összhangzattannak való megfelelésének vizsgálatára, pedig láttuk, hogy a gyakorlati zeneszerzéshez kapcsolódnak a nemkorlátos halmazon értelmezett összhangzattanpéldák. Ezenkívül igen nehéz lenne a korálokat a négyszólamú összhangzattanpéldák ezen egyszerűsített modelljéből levezetni: a figurációk közül nincs mindegyiknek kanonikus jelölése az akkordok fokszámai mellé írt római számokkal.

1.5. Hangnem konvergenciatartománya, funkciók és tonalitás

1.5.1. Előjegyzések

A hangnemek konstrukciója után könnyen látható, hogy *a Bach-törvény a dúr skála mellett igaz az összhangzatos moll és a pikárdiai terces összhangzatos moll skálára is*, vagyis a jóltemperált zongora minden hangjára felépíthető zongorahangokból álló dúr, moll és pikárdiai terces moll skála, így az *E* bármely hangjával mint I. fokkal felépíthetőek az *E*-n belül ilyen skálák. Vagyis egy jóltemperált zongora bármely hangja mindhárom fajta hangnemnek lehet I. foka.

Egy zongorahangra felépülő hangnem *előjegyzésén* a hangnem azon skálahangjainak halmazát értjük, amelyek a *C*-dúr, vagyis a „fehér billentyűkből felépülő dúr” skálához képest módosított hangok, kivéve, ha a hangnem nem dúr és a hangnemhez tartozó *természetes moll skálához* képest is módosítottak ezek a hangok. Így például a d-mollnak és a pikárdiai terces d-mollnak is egy *b* az előjegyzése, hiszen a cisz és az utóbbi skálában szintén szereplő fisz az eredeti d-eol skálához képest is módosított hangok, ezzel szemben a D-dúrnak két *♯* az előjegyzése, hiszen a fisz és a cisz is skálahang a D-dúr (nem moll) skálában és a C-dúr skálához képest módosított hang. (A jelölésmód célja az is, hogy *b* és *♯* előjegyzés ugyanazon hangnemhez ne tartozzon.) Az előjegyzést, ha több kereszt, mindig kvintenként fölfelé haladva (pl. fisz, cisz, gisz, disz), ha pedig több bé, mindig kvinten-

ként lefelé haladva (pl. bé, esz, asz, desz, gesz) olvassuk ki. A kvintkörrel kapcsolatban meggondoltak alapján nem meglepő, hogy egy hangnemben ha van b előjegyzés, akkor az előbbi sorrendben az utolsó éppen a hangnemhez tartozó szeptimhang (fá szolmizáció), ha van $\sharp$ előjegyzés, akkor az előbbi sorrendben utolsó éppen a hangnemhez tartozó vezetőhang (ti szolmizáció). Más szemszögből: egy T hangnemnél egy kvinttel magasabb, T -ben V. fokú alaphangú, T -vel azonos típusú D hangnemnek pontosan eggyel kevesebb bé / eggyel több kereszt az előjegyzése, mint T -nek, és ez a felemelt hang éppen a D vezetőhangja (amely T -ben fi szolmizációjú), a T -nél egy kvinttel alacsonyabb, T -ben IV. fokú alaphangú, T -vel azonos típusú SD hangnemnek pontosan eggyel több bé / eggyel kevesebb kereszt az előjegyzése, mint T -nek, és éppen a SD szeptimhangja a leszállított hang (ez T -ben tá szolmizációjú). A D hangnemet a T *domináns hangnemének*, az SD -t a T *szubdomináns hangnemének* nevezzük. A kvintkört bejárhatjuk domináns irányban (pl. $C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow F$ isz $\sim$ Gesz $\rightarrow$ Desz $\rightarrow$ Asz $\rightarrow$ Esz $\rightarrow$ B $\rightarrow$ F $\rightarrow$ C), ekkor gyakran *felső kvintkőről beszélünk*, és szubdominánsban (pl. az előző fordított sorrendben) is, ekkor pedig *alsó kvintkőről*. A L) **ábra** a felső kvintkör sorrendjében mutatja a dúr hármashangzatokat.

1.5.2. Konvergenciatartomány, gyenge (poli)tonalitás

Ebben a fejezetben amit csak lehet, általános hangnemre definiálunk, de a konkrét akkordok tulajdonságait itt csak dúr és moll hangnemekben vizsgáljuk. Az egyértelműség kedvéért adjuk meg a következő három definíciót:

1.5.1. Definíció. Legyen T tetszőleges hangnem. T vezetőhangja a T VII. fokú hangja (azaz T első fokának vezetőhangja), T szeptimhangja pedig a T IV. fokú hangja.

1.5.2. Definíció. Legyen SZ n . fokú szeptimakkord. Azt mondjuk, hogy SZ szeptimhangja sz , X -re vezet, ha X $n + 5$. fokú (mod 7) és egy vagy két félhanggal alacsonyabb sz -nél.

1.5.3. Definíció. A T hangnem első fokú hármashangzatát tonikai főhármashangzatnak, a negyedik fokút szubdomináns főhármashangzatnak, az ötödik fokút pedig domináns főhármashangzatnak nevezzük. Az összes többi skálahangokból felépülő hármashangzatot mellékhármashangzatnak nevezzük.

Minden T hangnemhez – ezen dolgozat keretein belül a dúr és moll hangnemekhez – elemenként meg fogjuk határozni hármashangzat- és négyeshangzatnevek egy halmazát, amelyet a T hangnem konvergenciatartományának nevezünk és $KT(T)$ módon jelölünk. Szemléletesen azok az akkordok tartoznak $KT(T)$ -be, amelyek T skálahangjaiból állnak vagy

T skálahangjaiból álló akkordokra vezethetnek úgy, hogy közben megmarad az az érzet, hogy T hangnemben maradunk. Az **Akkordtípus** jellel ellátott szövegrészek fogják jelezni egy-egy újabb akkordcsalád beemelését $KT(T)$ -be. Az első fejezetben az alapvető szerkesztési elvek működését a csak a dúr vagy moll hangnemű, skálahangokból álló hármas- és négyeshangzatokból álló összhangzattanpéldákkal mutatjuk be. A második fejezetben adjuk meg az *alterált*, azaz az adott hangnemhez tartozó, de módosított hangokat is tartalmazó akkordokat tetszőleges dúr és moll hangnemben, ezek alapján pedig végül pikárdiai terces mollban is. A lekottázhatóságot és a redundancia elkerülését szem előtt tartva csak azokban a hangnemekben fogunk kottapéldákat írni, amelyeknek I. foka a jóltemperált zongora C-dúr skálájának skálahangja vagy egyszerűen módosított hangja.

1. *Akkordtípus.* Tetszőleges hangnemben az alábbi, skálahangokból álló hármashangzatok: az I. és III.-VI. fokú hármashangzatok, az I.-VII. fokú szextakkordok valamint az I. és IV. fokú kvartszextakkord. Dúrban a II. fokú alaphelyzetű hármashangzat is. Továbbá az összes olyan szeptimakkord minden fordításban, amelyek skálahangokból épülnek fel.

1.5.4. Definíció (Gyenge tonalitás, politonalitás.). Legyen M négyszólamú zenemű, t torlódási pontja $\mathcal{D}(M)$ -nek, k pedig pozitív egész szám. Ha $\exists U$ összefüggő nyílt környezete t -nek és legfeljebb k darab különböző hangnem $(T_1, \dots, T_k)$, hogy $U \cap \mathcal{D}(M) \setminus \{t\}$ minden akkordja $KT(T_i)$ elemének a klasszikus összhangzattannak megfelelő változata valamely $i \in \{1, \dots, k\}$ -ra, akkor azt mondjuk, hogy az M gyengén k -tonális¹⁷ a t pontban $T_1, \dots, T_k$ hangnemekkel.

Ekvivalens definíciók a gyengén k -tonálisra: $k = 1$ esetén gyengén tonális, $k > 1$ esetén általában politonalis.

Ha $X \subseteq \overline{\mathcal{D}(M)}$ minden pontjában M gyengén k -tonális, akkor azt mondjuk, hogy M gyengén k -tonális X -en. Ha M gyengén k -tonális $\overline{\mathcal{D}(M)}$ minden pontjában, akkor azt is mondjuk, hogy M gyengén k -tonális.

1.5.1. Állítás. *Bármely olyan, klasszikus összhangzattannak megfelelő hármas- vagy négyeshangzatnévhez, amelynek alaphangja a C-dúr hangnem skálahangja vagy egyszerűen módosított, skálahanggal nem enharmonikus hangja, létezik olyan moll hangnem, amelynek konvergenciatartományában ez az akkord szerepel.*

A bizonyítás a moll-lemmából egyszerűen következik: a szeptimfüggvény bijektivitása miatt persze dúr, moll, szűk és bő hármashangzat is előáll a moll hangnemek skálahangjaiból. A Bach-törvény (illetve a kvintkör tulajdonságai) szerint pedig bármely zongora-

¹⁷A szokásos görög megnevezések is használhatók, mint például a „ k -lineáris” kifejezésnél: bitonalis, tritonális stb.

hangra épül moll hangnem, így ezek közül lesz olyan, amelyben egy tetszőleges hármas- vagy négyeshangzat éppen skálahangokból áll.

Most már látjuk azt is, hogy gyenge (1-)tonalitás valóban gyenge tulajdonság abban az értelemben, hogy ha vesszük egy M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű tetszőleges olyan t torlódási pontját, amely nem akkordváltási és nem is göngyölítési pont, akkor ennek a pontnak létezik olyan U_t nyílt környezete, amelynek M általi képében végig ugyanazon hármas- vagy négyeshangzat szól, és ez a szigorú négyszólamú szerkesztés definíciója szerint a klasszikus összhangzattannak megfelelő. Az ilyen akkordok mindegyikének neve az előbbieket szerint szerepel valamely hangnem konvergenciatartományában, így minden négyszólamú összhangzattanpélda gyengén tonális az összes olyan torlódási pontjában, amelyben sem akkordváltás, sem akkordgöngyölítés nincs. A gyenge tonalitás fogalma mégis elengedhetetlen egyrészt a funkciós tonalitás fogalmának felépítéséhez, másrészt az említett két különleges ponttípusbeli (poli)tonalitás jellemzéséhez.

1.5.3. A funkciók

A klasszika szemlélete alapján azonban ahhoz, hogy egy zeneművet vagy annak összefüggő részletét tonálisnak tekintsünk, nem elég, hogy minden akkord ugyanabból a hangnemből származzék. Milyen hangnembeli stabilitást, tonalitás-érzetet ad például, ha egy zeneműben végig csak ugyanaz az egyetlen akkord szól? A tonalitás-érzethez szükségünk van mindhárom *funkcióra*. Ahogy a hangnemek konstrukciójánál, itt sem pusztán felsorolással adjuk meg az egyes funkciókhoz tartozó akkordokat, hanem a definíciókban igyekszünk a funkciók lényeges vonásait kihangsúlyozni. Ahhoz pedig, hogy a funkciók ne üres fogalmak legyenek, hanem példát is tudjunk adni különböző funkciójú akkordokra, megkezdjük a hangnem konvergenciatartománya elemeinek felsorolását is.

1.5.5. Definíció. Legyen T hangnem, $H \in KT(T)$ dúr vagy moll hármashangzat, $J \in KT(T)$ „dúr vagy szűk hangzat”, azaz dúr hármas, szűk hármas, domináns szeptim vagy szűkített szeptim. Azt mondjuk, hogy J kiváltja H -t (J kiváltó akkordja H -nak), ha J

- (i) tartalmazza H vezetőhangját,
- (ii) ha a H alapjára épített dúr skálához képest tartalmaz módosított hangot, akkor az ezen skála V. fokához tartozó felső váltóhang.

1.5.2. Állítás. A H -t kiváltó J szeptimakkord tartalmazza a H -hoz tartozó szeptimhangot.

1.5.6. Definíció (Domináns funkció (D) és az adott hangnembeli mellékdomináns tulajdonság). Egy T hangnem I. fokú (skálahangokból felépülő) hármashangzatát kiváltó

akkordot a hangnemben domináns funkciójúnak (a hangnem domináns akkordjának), a $KT(T)$ más, skálahangokból álló akkordját kiváltó akkordot a T hangnem mellékdomináns akkordjának nevezzük. Ezen belül a T domináns főhármashangzatát kiváltó akkordot a T hangnem váltódominánsának hívjuk.

Dúr hangnemben egy nagyon fontos domináns akkordot kellene figyelmen kívül hagynunk, ha nem vennénk be azt azonnal a hangnem konvergenciatartományába:

2. *Akkordtípus.* Dúr hangnemben a VII. fokú (az I. fok vezetőhangjára épülő) szűkített szeptim (jelölés C-dúrban: VII^{7b}).

1.5.3. Állítás. *Egy T hangnem dominánsai pontosan a következők: az V. fokú hármashangzat alap- és szextfordítása, az V. fokú szeptimakkord összes fordítása, a vezetőhangra épülő VII. fokú hármashangzat szextfordítása és az utóbbi akkordot mint alsó parciális hármast tartalmazó VII. fokú szűkített szeptimakkord összes fordítása.*

A dúr hangnem konvergenciatartományának eddig ismertett elemei közül az I. fokú hármast és fordításait mellékdominánsnak.

1.5.7. Definíció (Tonikai funkció (T)). Legyen T hangnem. $H \in KT(T)$ akkord a T -ben tonikai funkciójú, ha:

- (i) tartalmazza a T I. és III. fokú skálahangját, előbbi nem módosítva,
- (ii) ha tartalmazza a T vezetőhangját, akkor az H -nak szeptimhangja,
- (iii) ha mellékdomináns, akkor I. fokú dúr hármashangzat, moll esetben felemelt terccel,
- (iiii) nem tartalmaz parciális hármashangzatként sem szűk, sem bő hármast.

1.5.4. Állítás. *Tonikai funkciójú minden hangnemben az I. fok, dúrban és mollban a VI. fok és a VI. fokú szeptim, dúrban az I. fokú, skálahangokból felépített szeptim.*

A domináns funkciójú akkordnál a dúr vagy szűk tulajdonság, tehát a *felhangrendszerben megtalálható*¹⁸ akkordtípus volt a lényeges. Még a moll hangnemben is csak dúr vagy szűk akkord lehet domináns funkciójú, tulajdonképpen az erős domináns funkciót követeltük meg az 1.3.1 hangnemkonstrukcióban, ezért emeltük fel az eol skála VII. fokát mesterséges vezetőhanggá. A domináns akkordok vonzódása az egy kvinttel lejjebbi alaphanghoz is indokolható a felhangrendszerből, persze csak a jóltemperált zongora és az enharmonikusság konstrukciójának ismeretében, és akkor is nagyon kell vigyázni, hogy

¹⁸A szűkített szeptim persze nem áll elő egy alaphang egymást követő felhangjainak sorozatából, de nagyon erősen vezet a hozzá tartozó tonikára.

az indoklásba ne csússzon redundancia. A tonikai funkciójú akkordok ezzel szemben a hangnem stabilitást adó nyugvópontjai, legfeljebb minimális disszonanciát tartalmaznak, de általában azt sem; tonikáról kezdődik és végül tonikára ér vissza a legtöbb (bécsi) klasszicista zenemű¹⁹. A képet színesíti még a szubdomináns funkció:

1.5.8. Definíció (Szubdomináns funkció (SD)). Legyen T hangnem. $H \in KT(T)$ akkord a T -ben szubdomináns funkciójú, ha:

- (i) tartalmazza a T skálája IV. és VI. fokú hangját, akár mindkettőt módosítva,
- ii) ha tartalmaz módosított vezetőhangot, az az V. fok vezetőhangja,
- (iii) H metszete az I. fokú négyeshangzat fokaival vagy üres, vagy az I. fok.

1.5.5. Állítás. Szubdomináns funkciójúak minden T hangnemben a II. és IV. fokú hármashangzat $KT(T)$ -beli fordításai valamint a II. fokú szeptimakkord és minden fordítása.

A szubdomináns kifejezést „domináns előtti”-ként, vagyis dominánsra vezető akkordként érdemes érteni, vagyis általában érvényes egy $SD \rightarrow D$ vonzódás, a szubdomináns után megszólaló domináns pedig általában tovább mozog a tonikára. Láthatjuk, hogy a főhármashangzatokat (I., IV., V. fok) a mostani funkciódefiníciókkal konzisztens módon neveztük el. Egy adott dúr vagy moll I. fokú hármashangzatról az V. fokú főhármashangzatra való lépést (akkordváltást) *autentikus lépésnek*, a IV. fokúra való lépést *plagális lépésnek* nevezzük. A $T \rightarrow SD \rightarrow D \rightarrow T$ lépéssorozat²⁰ neve *összetett autentikus* lépéssorozat vagy *teljes autentikus zárlat (kadencia)*, a fordított irányú $T \rightarrow D \rightarrow SD \rightarrow T$ lépéssorozaté hasonlóan *összetett plagális* vagy *teljes plagális zárlat (kadencia)*. A $T \rightarrow D$, $SD \rightarrow T$ lépések kevésbé járnak a befejezettség, az oldódás érzésével, mint az ellenkező irányú lépések, de hamarosan látni fogjuk, hogy sokfajta ilyen lépés is megfelelhet a klasszikus összhangzattannak. Gyakran nem ütközik szólamvezetési szabályokba a $D \rightarrow SD$ lépés sem, de a $D \rightarrow T$ vonzódás jelentőségét csökkentené, ha a zeneműben elszaporodnának a teljes plagális zárlatok, ezért egyik szerkesztési elvünk megtiltja a klasszikus összhangzattannak megfelelő zeneművekben a legerősebb és legtipikusabb domináns→szubdomináns lépést, az V. fokú alaphelyzetű hármashangzatról a IV. fokúra való mozgást (részletesen erről később).

¹⁹"It is not fully understood why V–I imparts such a feeling of finality, but it cannot be denied that it does." [1; 5.11.]

²⁰A szó denotatív értelmében autentikus és plagális lépésekről csak főhármashangzatok között beszélhetünk, de szokás minden $D \rightarrow T, T \rightarrow SD$ lépést autentikusnak és minden ellenkező irányú lépést plagálisnak nevezni.

A TDK-dolgozatban röviden összefoglaltuk a kérdéses funkciójú akkordokat a dúr és moll hangnemek konvergenciatartományainak eddig vizsgált (skálahangokból álló) elemei közül. Ez a tisztán zeneelméleti jellegű érvelés terjedelmi okokból ebben a dolgozatban a Függelékbe került, ez a C fejezet. Amit ki kell emelnünk ebből, az az, hogy a VI. fokú hármashangzat mindkétfajta hangnemben a szubdomináns és a tonikai funkció között képvisel átmenetet, a III. fok pedig a tonikai és a domináns funkció között, bár mollban erős disszonanciája miatt tekinthetjük dominánsnak is. A szubdomináns akkord után következő I_4^6 és III^6 pedig domináns funkciójúak, kötelezően $V^{(7)}$ -re kell őket vezetni. A bécsi klasszikában a legtipikusabb teljes autentikus zárlat – ahogy az kottapéldáinkban is megfigyelhető – az $I \rightarrow IV \rightarrow I_4^6 \rightarrow V \rightarrow I$.

1.5.4. Pár alapvető fogalom modulációkról

A *modulációk* vizsgálatába csak a hangnemek teljes konvergenciatartományának megismerése után kezdhetünk bele, a második fejezet tárgyalja a modulációkkal kapcsolatos szerkesztési elvek zömét. Azonban a klasszikus összhangzattan axiómarendszerének vázolásához és a tonalitás alaptételéhez néhány alapvető definíciót és szabályt rögzítenünk kell a modulációkkal kapcsolatban. A modulációtól első körben elvárjuk, hogy megvalósítható zeneművön folyjon le, közben ne legyen göngyöltési pont, ne tartson végtelen sokáig és a hangterjedelmi korlátozások se sérüljenek. Tehát:

1.5.9. Definíció (Moduláció). Ha az M szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneműhöz léteznek olyan T_1 és T_2 hangnemek, hogy $\mathcal{D}(M)$ -nek létezik olyan $Z = [a, b[$ részhalmaza, amelyre $M|_Z$ megvalósítható zenemű, és létezik olyan $r_1 > 0$ valós szám²¹, amelyre $\overline{B_{r_1}(a) \cap (\mathbb{R} \setminus Z)}$ egészén M gyengén tonális T_1 hangnemmel és létezik olyan $r_2 > 0$ valós szám, amelyre $\overline{B_{r_2}(b) \cap (\mathbb{R} \setminus Z)}$ egészén M gyengén tonális T_2 hangnemmel, akkor $\forall W \subseteq Z$ -re azt mondjuk, hogy W -n moduláció van a T_1 hangnemből a T_2 -be.

Később sokkal szigorúbb feltételeket fogunk megszabni a modulációknak, mostani célunkhoz ezt az egyet rögzítjük (és a későbbiekben is mindig megtartjuk):

1. Szerkesztési elv (Első modulációs axióma). Legyen M olyan szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, amely megfelel a klasszikus összhangzattannak és tartalmaz egy T_1 hangnemből egy T_2 hangnembe vezető modulációt (ez a moduláció esetleg érinthet más hangnemeket is). Ekkor $\exists [a, b[\subseteq \mathcal{D}(M)$ ²², hogy $M(a)$ a T_1 első fokú alaphelyzetű főhármashangzata, $M(b-) = \lim_{t \rightarrow b-0} M(t)$ a T_2 első fokú alaphelyzetű főhármashangzata, a -ban

²¹Azaz valamely lejátszás szerinti időtartam szekundumban mérve.

²²Hangsúlyozzuk, hogy $[a, b[$ -n egyáltalán nincs generálpauza!

M gyengén tonális, T_1 hangnemmél, b -ben pedig szintén gyengén tonális, T_2 hangnemmél, és $[a, b[$ a legbővebb olyan intervallum, amelyen az adott $T_1 \rightarrow T_2$ moduláció zajlik.

Minden a rendelkezésünkre áll már ahhoz, hogy definiáljuk a funkciós tonalitást.

1.5.5. A tonalitás topologikus definíciója

1.5.10. Definíció (Funkciós tonalitás – 1. Zenemű hangneme egy pontban). Legyen M négyszólamú zenemű, t pedig torlódási pontja $\mathcal{D}(M)$ -nek. Azt mondjuk, hogy M tonális a t pontban és hangneme T , ha létezik olyan U összefüggő nyílt környezete t -nek, hogy $V = U \cap \mathcal{D}(M) \setminus \{t\}$ -re az alábbi feltételek mindegyike teljesül:

- (i) M gyengén tonális V -n T hangnemmél,
- (ii) $M[V]$, azaz a V -n megszólaló akkordok halmaza tartalmaz a T hangnemben tonikai, szubdomináns és domináns határozott funkcióval rendelkező akkordot is,
- (iii) ha $t \notin \text{Int } \mathcal{D}(M)$, akkor t -be csak hármashangzat értékű pontjai torlódhatnak $\mathcal{D}(M)$ -nek.

1.5.11. Definíció (Funkciós tonalitás – 2. Zenemű modulációbeli pontja). Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, t pedig torlódási pontja $\mathcal{D}(M)$ -nek. Azt mondjuk, hogy M tonális a t pontban és t -ben modulál egy T_1 hangnemből egy T_2 -be, ha létezik olyan U összefüggő nyílt környezete t -nek, amelyhez létezik olyan $V \supseteq U$ balról zárt, jobbról nyílt intervallum, amelynek egészén az 1.5.9 definíció szerint moduláció zajlik T_1 -ből T_2 -be, és ez a moduláció a [később megadandó] szerkesztési elvek szerint a klasszikus összhangzattannak megfelel.

Az M szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneművet a t torlódási pontjában tehát mindkét leírt esetben tonálisnak nevezzük; a pontbeli hangnemet általános négyszólamú zeneműre is tudtuk definiálni. (Más lehetőség nincs a pontbeli funkciós tonalitásra.) A továbbiakban az „ M hangneme t -ben T ” kijelentés mindig funkciós tonalitásra fog utalni. Az itt definiált pontbeli hangnem létezése a klasszika szemlélete szerint már elégséges a tonalitás érzésének biztosításához – a szerkesztési elvek azt mondják meg, hogy a pontbeli hangnemet biztosító akkordok hogyan (ne) kövessék egymást. A modulációk leírásánál láthatjuk, hogy a modulációk kezdő- és zárószakaszában előfordulhat, hogy egy x pontnak U környezete azt tanúsítja, hogy x -ben még megvan a kezdőhangnem vagy már beállt a záróhangnem, egy (általában U -tól különböző) V környezete viszont azt, hogy x a definíció szerint modulációs pontja M -nek. Általában ilyenkor $U \neq V$.

Az is könnyen látható, hogy ha az M zenemű t pontbeli tonalitást és hangnemet vagy modulációt tanúsító nyílt környezet U , akkor U minden pontjában tonális M és U tanúsítja ezekben a pontokban is a hangnemet vagy modulációt is. Most definiáljuk a zenemű tonalitását is:

1.5.12. Definíció (Tonális zenemű). Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű (és T hangnem), $X \subseteq \overline{\mathcal{D}(M)}$. M tonális X -en (és X -en a hangnem T), ha X minden torlódási pontjában tonális (és a hangnem minden ilyen pontban T). M tonális (és M hangneme T), ha $\overline{\mathcal{D}(M)}$ -en tonális (és a hangnem T) és $\inf \mathcal{D}(M)$ -ben és $\sup \mathcal{D}(M)$ -ben is van hangnem (és ez T).

Most pedig megadhatjuk a hármashangzat felrakási szabályainak (1.2.6 definíció) hiányzó nyolcadik pontját:

1.5.13. Definíció. (viii) Ha a H hármashangzat egy M négyszólamú zenemű egy olyan t pontjában szól, ahol M tonális és a hangnem T , akkor H minden T -hez képest módosított hangot legfeljebb egy szólamban tartalmaz.

1.6. Az axiómarendszer konstrukciója és viszonya a tonalitáshoz

A klasszikus összhangzattan négyszólamú összhangzattanpéldákra vonatkozó szerkesztésű elvei egyrészt a hármashangzatok engedélyezett fajtáira és felrakásaira, másrészt az összhangzattanpéldák topologikus jellemzőire (például más, mint szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, ebben a modellben nem is felelhet meg a klasszikus összhangzattan), harmadrészt pedig az akkordok sorrendjére, az akkordváltások tulajdonságaira vonatkoznak. Ezek közül az elsővel már csaknem végeztünk, egy kiegészítést teszünk majd csak a tonalitást is használva. A másodikkal folytatjuk most és csak utána térünk rá a harmadikra – így logikusabb. A harmadik ponttal a modulációkra vonatkozóan csak a második fejezet végén fogunk végezni. Látni fogjuk, hogy az akkordváltási szerkesztési elvek tárgyalását lényegesen megkönnyíti, hogy már hivatkozhatunk a tonalitás alaptételére.

1.6.1. Kijavíthatósági kritérium a négyszólamú összhangzattanpéldákra

Most megadjuk a négyszólamú összhangzattanpéldák klasszikus összhangzattanakkal való, egy adott pontbeli megfelelésének szükséges és elégséges feltételét, lényegében anélkül, hogy az akkordváltásokra vonatkozó szerkesztési elvekből bármit ismernénk. Ennek segítségével bebizonyítjuk a tonalitás alaptételét, és utána röviden, kevés példával – illeszkedve a formai követelményekhez – megnevezzük ezeket a szerkesztési elveket is.

1.6.1. Definíció (Kijavítható zenemű). Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, $a \in \mathcal{D}(M)$, $b \in \mathcal{D}(M) \cup \{\infty\}$, $N = [a, b[\subseteq B(M)$.

Ha N -re a következő feltételek mindegyike teljesül:

- (i) akkordjai ($Ran(M|_N)$ elemei) hosszának infimuma²³ pozitív,
- (ii) N mint (esetleg felülről nem korlátos) intervallum felosztható véges sok olyan diszjunkt, N -et lefedő balról zárt, jobbról nyílt intervallumra, hogy a $t = 0$ ponttól pozitív irányba haladva felsorolva az intervallumokat $(I_1, I_2, \dots, I_{2n+1})$, $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, 2n+1\} : I_i \cap \mathcal{D}(M) \neq \emptyset$, minden $0 < k \leq n$ pozitív egészre a teljes I_{2k} halmaznak a $\mathcal{D}(M)$ -mel vett metszetén a klasszikus összhangzattannak az akkordváltási pontokon kívül megfelelő moduláció zajlik, minden $0 \leq k \leq n$ egészre pedig $I_{2k+1} \cap \mathcal{D}(M)$ -hez pedig egyértelműen létezik egy olyan T_k hangnem, amelynek konvergenciartományába tartozik minden I_{2k+1} -en megszólaló akkord, és ezen akkordok között van T_k -nak határozott tonikai, szubdomináns és domináns funkcióval rendelkező akkordja is,
- (iii) N -en minden dallamkezdőpontba és dallamvégpontba $\mathcal{D}(M)$ -nek csak hármashangzat értékű pontjai torlódnak,

a) és $t \in \text{Int } \mathcal{D}(M) \cap N$, akkor ha t -ben nincs olyan akkordváltás, amelyet az akkordváltási pontokra vonatkozó szerkesztési elvek tiltanak,

akkor azt mondjuk, hogy M t -ben megfelel a klasszikus összhangzattannak, és N a t egy klasszikus környezete.

b) Ha $t_0 \in N$ dallamkezdő pontja $M|_N$ -nek, akkor a szigorú négyszólamú szerkesztés definíciója szerint $\lim_{t \rightarrow t_0+} M(t) = M(t_0)$. Ebben az esetben, ha $\exists r > 0 : \forall x \in [t_0, t_0 + r[: x \in N$ és x -ben M megfelel a klasszikus összhangzattannak, akkor M t_0 -ban is megfelel a klasszikus összhangzattannak. Ha t_0 nem az N legkisebb eleme, akkor az N -t a t_0 -nak is klasszikus környezetének mondjuk.

1.6.2. Definíció (Klasszikus összhangzattannak megfelelő zenemű). Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, $X \subseteq \mathcal{D}(M)$. M X -en megfelel a klasszikus összhangzattannak, ha X minden pontjában megfelel a klasszikus összhangzattannak úgy, hogy az összes pontnak van $K \supseteq X$ klasszikus környezete. M megfelel a klasszikus összhangzattannak, ha $\mathcal{D}(M)$ -en megfelel a klasszikus összhangzattannak.

²³Ha ez az infimum valamely lejátszásra pozitív, akkor minden lejátszásra pozitív, vö. a Ligeti–Boulez-nullmértékűség 1.4.4 ekvivalens feltételével!

A kijavítható zenemű elnevezése arra a – szolfézs- és összhangzattan-oktatás alapját adó – szemléletre épül, hogy ha megadjuk, hogy egy összhangzattanpélda milyen nevű hármas- és négyeshangzatokat tartalmazzon és milyen sorrendben, milyen időpontokban történő akkordváltásokkal, akkor ha bizonyos alapvető tonalitási és megvalósíthatósági feltételek teljesülnek, akkor már csak az a kérdés, képesek vagyunk-e a megadott akkordokat úgy egymás után fűzni, hogy az akkordváltások is szabályosak legyenek. Kérdés viszont, hogy ez a szemlélet minden esetben helyes-e. Vagyis ha nincs olyan akkordnevek közti akkordváltás, ami eleve tilos a klasszikus összhangzattan szerint (például valamely hangnemben az $V \rightarrow IV$ lépés), akkor az ügyes növendék tényleg képes-e az akkordokat úgy felrakni, hogy valóban a klasszikus összhangzattannak megfelelő művet kapjon, vagy elképzelhető az is, hogy bármely két szomszédos, előre megadott akkordnév között létezik szabályos váltás, de mégsem tudjuk a teljes akkordsorozat elemeit úgy felrakni, hogy az összes váltás megfeleljen a klasszikus összhangzattannak. Az előre megadott akkordsorozatok kijavíthatóságának, *feloldozhatóságának*²⁴ kérdései érdekes és korántsem lezárt kutatási irányt adnak, ezt is fogjuk majd – de már ezen dolgozat keretein kívül – tárgyalni.

1.6.2. Az axiómarendszer viszonya a tonalitással – a tonalitás alaptétele

Eljutottunk munkánk fő eredményéhez, a tonalitás alaptételéhez. Mielőtt megfogalmaznánk és bebizonyítanánk, néhány megjegyzést szeretnék tenni a tétel jelentőségével és születésével kapcsolatban. Közvetlenül kapcsolódva a zenemű kijavíthatóságának definíciója után megfogalmazott gondolatokhoz kijelenthetjük, hogy az összhangzattan (és különösen annak oktatása) szemlélete szerint a tétel igaz. Ez biztosítja azt, hogy jogosan definiáltuk a tonalitást és a klasszikus összhangzattannak való megfelelést úgy, ahogyan tettük. (Hiszen másfajta definíciókkal nem feltétlenül jutnánk el ahhoz, hogy igaz a most következő tétel.) A tételt 2012 februárjában, ezen dolgozat témájáról való beszélgetésünk közben sejtette meg Vécsey Máté évfolyamtársam, de ő akkor még alig ismerte az alakulóban lévő dolgozat felépítését és definícióit, így a tétel pontos kimondásához és első bizonyításához én jutottam el 2012 júliusára. A négyszólamú szerkesztéssel kapcsolatos fogalmak átalakítása után 2013 júliusában született meg az itt olvasható, letisztultabb bizonyítás.

1.6.1. Tétel (A tonalitás alaptétele). *Legyen M megvalósítható szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, amely szünetmentes, vagyis $\mathcal{D}(M) = B(M)$!*

²⁴Az elnevezés onnan származik, hogy több szólamvezetési és akkordváltási tilalom, például a tritonusra és a bővített szekundra vonatkozó korlátozások a katolikus egyháztól származtak a középkorban és a kora újkorban, az egyház akkori vélekedése szerint ezek a zenei jelenségek az ördög művei.

M tonális $(\overline{\mathcal{D}(M)}\text{-en}) \Leftrightarrow$ az akkordváltási pontjainak $A(M)$ halmazán kívül $\mathcal{D}(M)$ minden pontjában megfelel a klasszikus összhangzattannak.

Bizonyítás. $\Leftarrow$

Megmutatjuk, hogy a tétel feltétele elégséges a tonalitásra. Ha M a véges, izolált pontokból álló $A(M)$ -en kívül megfelel a klasszikus összhangzattannak, akkor M kezdőpontján kívül $\mathcal{D}(M)$ minden pontjának létezik $\mathcal{D}(M)$ -et tartalmazó klasszikus környezete. Ezért $B(M)$ -re teljesül a kijavítható zenemű definíciójában szereplő (i), (ii) és (iii) pont is. Így $B(M)$ felosztható a kijavítható zeneművekre jellemző intervallumrendszere, legyen egy ilyen intervallumrendszer: $I_1, I_2, \dots, I_{2n+1}$ ($\exists n \in \mathbb{N}$).

Ha $0 < k \leq n$ egész, akkor I_{2k} -ban T_k és T_{k+1} között zajlik moduláció. I_{2k-1} vagy I_{2k} M általi képében az első modulációs axióma és a moduláció 1.5.9 definíciója szerint megtalálható T_k -nak I. fokú alaphelyzetű hármashangzata, amely ezt a modulációt (ehhez a modulációhoz tartozó legbővebb intervallumot) nyitja, az ehhez tartozó intervallum kezdőpontját jelölje x_k , hasonlóan I_{2k} vagy I_{2k+1} M általi képében szerepel T_{k+1} -nek I. fokú alaphelyzetű hármashangzata, amely a modulációt zárja, az ehhez tartozó intervallum végpontját jelölje y_k . Most tekintsük $B(M)$ -nek az M kezdő- és végpontja valamint az összes x_k és y_k pontok által való balról zárt, jobbról nyitott intervallumokra: $J_1, J_2, \dots, J_{2n+1}$ való felosztását. Világos, hogy $\forall k$ -ra ($0 < k \leq n$ egész) $J_{2k} \supseteq I_{2k}$, ezért $\forall k$ -ra ($0 \leq k \leq n$ egész) $J_{2k+1} \subseteq I_{2k+1}$. $\forall t \in \text{Int } J_{2k} \cap \overline{\mathcal{D}(M)}$ -ra $\text{Int } J_{2k}$ a t tonalitást és $T_k \rightarrow T_{k+1}$ modulációt garantáló összefüggő nyílt környezete. $\forall t \in \text{Int } I_{2k+1} \cap \overline{\mathcal{D}(M)}$ -re pedig $\text{Int } I_{2k+1}$ a t tonalitást és T_k hangnemet garantáló összefüggő nyílt környezete. Ezzel a $(J_i)_{i=1}^{2n+1}$ felosztás osztópontjain kívül már $\mathcal{D}(M)$ minden pontjában igazoltuk a tonalitást. Könnyen látható, hogy $\forall k$ -ra x_k -ban a hangnem T_k , hiszen $\exists \varepsilon > 0$, hogy $]x_k - \varepsilon, x_k[$ egészen a hangnem T_k , $[x_k, x_k + \varepsilon[$ -on pedig T_k I. fokú hármashangzata szól alaphelyzetben, így például $I_{2k-1} \cup B_\varepsilon(x_k)$ a T_k hangnemet garantáló összefüggő nyílt környezete x_k -nak. Hasonlóan igazolható, hogy $\forall l$ -re y_k -ban a hangnem T_{k+1} . Az is triviálisan igaz, hogy M kezdőpontjában T_1 , M végpontjában T_{n+1} a hangnem. Így M a $\overline{\mathcal{D}(M)}$ minden pontjában tonális, tehát tonális.

$\Rightarrow$

A tétel feltételének szükségessége: tekintsük az M tonális, megvalósítható négyszólamú összhangzattanpéldát. Vegyük $\forall t \in \overline{\mathcal{D}(M)}$ -nek egy-egy U_t tonalitást garantáló összefüggő nyílt környezetét úgy, hogy ha létezik t -nek olyan U_t környezete, amely hangnemet és nem modulációt tanúsít, akkor ilyet válasszunk. Mivel $\mathcal{D}(M)$ korlátos részhalmaza $\mathbb{R}$ -nek, feltehető, hogy $\forall t \in \overline{\mathcal{D}(M)}$ -re U_t korlátos nyílt intervallum. Ezen környezetekkel megkapjuk a $\overline{\mathcal{D}(M)}$ egy nyílt befedését: $\overline{\mathcal{D}(M)} \subseteq \bigcup_{t \in \overline{\mathcal{D}(M)}} U_t$, ennek pedig $\overline{\mathcal{D}(M)}$ kompaktsága miatt

létezik véges részbefedése: $\overline{\mathcal{D}(M)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i$. (Az U_i -ket kezdőpont szerinti növekvő sorrendben indexeljük.) U_1 -ben a tonalitás definíciója szerint van hangnem, ezt jelölje T_1 . Kezdjük meg egy szekvenciális eljárást $V = U_1$ -gyel és $T = T_1$ -gyel, amelynek célja a $B(M)$ -nek a kijavítható zenemű definíciójában szereplő intervallumok rendszerére való felosztása. Döntsük el, hogy a következő két eset közül melyik áll fent:

1. Ha $\forall k > j$ -re U_k -ban ugyanaz a hangnem, mint V -ben (vagy $\sup V$ az M végpontja), akkor a kijavíthatóságot tanúsító felosztáshoz tartozó következő, egyben utolsó (legnagyobb kezdőpontú) balról zárt, jobbról nyílt intervallum legyen $(\bigcup_{k>j} U_k) \cup V \cap B(M)$. Ennek egészen M tonális és a hangnem T , dallamkezdő- és dallamvégpontba csak hármashangzat értékű pontok torlódhatnak. Ezzel befejeztük az eljárást.
2. Ha viszont az előző pont nem teljesül, akkor $\exists k > j$, hogy U_k -ban van hangnem, T' (hiszen $\sup \mathcal{D}(M)$ -ben van hangnem a tonalitás definíciója szerint). Ekkor legyen s a $B(M) \cap [\inf V, \sup U_k[$ azon pontjainak szuprémuma, ahol a hangnem T és I a $B(M) \cap [\inf V, \sup U_k[$ azon pontjainak infimuma, ahol a hangnem T' . (Mivel $\mathbb{R}$ teljesen rendezett test, ezek léteznek.) Mivel a pontbeli tonalitás egyben gyenge 1-tonalitást is jelent, $s \leq i$. Ha $s < i$, akkor az $[s, i[$ intervallumon végig $T \rightarrow T'$ moduláció zajlik, amely az akkordváltási pontokon kívül a klasszikus összhangzattannak megfelel (ebből következik, hogy egyáltalán nem tartalmaz dallamkezdőpontot és dallamvégpontot sem). Vegyük hozzá a kijavíthatóság definíciója szerinti felosztás eddig meglévő intervallumaihoz $[\inf V, s]$ -et (mint T hangnemű zeneműrészletet) és $[s, i]$ -et (mint $T \rightarrow T'$ modulációs szakaszt) és vezessünk be új T -t és V -t: $T := T'$, $V := [i, \sup U_k[$, majd térjünk vissza az eljárás elejére.

Valahányszor visszatérünk az eljárás elejére, az aktuális V végpontja mindig legalább eggyel nagyobb sorszámú U_k végpontja, mint az előző körben. Így legfeljebb n -szer haladunk végig az eljáráson, és ha eljutunk oda, hogy $\sup V = \sup \mathcal{D}(M)$, az eljárás abban a körben már biztosan véget ér (és lehetséges az is, hogy ide nem is jutunk el). A kapott felosztás a zenemű kijavíthatósága minden pontjának megfelel, páratlan sok egymáshoz csatlakozó, diszjunkt balról zárt, jobbról nyílt intervallumra osztjuk fel $B(M)$ -et, a páratlan indexűekben hangnem van, a páros indexűeken pedig a szomszédos intervallumok hangnemei közti, az akkordváltási pontokon kívül a klasszikus összhangzattannak megfelelő moduláció. Így $\mathcal{D}(M) \setminus A(M)$ minden pontjának $B(M)$ biztosan klasszikus környezete. $\square$

A tétel feltétele kijavítható, de nem megvalósítható M zeneműre (az ilyen zeneműnél $\exists t_0 \in \mathcal{D}(M)$, T hangnem: $\forall t > t_0 : t \in \overline{\mathcal{D}(M)} \Rightarrow t$ -ben a hangnem T) is elégséges, de

nem szükséges a tonalitáshoz. Ellenpéldának vegyünk egy tonális megvalósítható zeneművet, amelynek kezdő- és záróhangneme is T_1 , és tartalmaz valamely $T_1 \neq T_2$ hangnemre $T_1 \rightarrow T_2$ és $T_2 \rightarrow T_1$ modulációt is. Ezt a zeneművet periodikusan $[\inf \mathcal{D}(M), \infty[$ -re kiterjesztve olyan tonális zeneművet kapunk, amely nem osztható fel a kijavítható zeneművekre jellemző intervallumrendszerre, így nem felel meg egyik pontjában sem a klasszikus összhangzattannak. A feltétel szükségességét a bizonyításból kiolvasható módon $\overline{\mathcal{D}(M)}$ kompaktsága biztosítja a megvalósítható esetben. A megvalósíthatóság feltétele éles a tételben: akár az akkordhosszak infimumának pozitivitását, akár az értelmezési tartomány korlátosságát elhagyva megadhatunk tonális, nem kijavítható négyszólamú összhangzattanpéldát. A szünetmentesség is szükséges: például a következő zenemű minden pontjában tonális, de a C-dúr hangnemű első ütem és annak F-dúrba transzponáltja, a harmadik ütem között nincsen moduláció, tehát a zenemű nem kijavítható. A későbbiekben, különösen a bővebb változat modulációkról szóló fejezetében általában csak szünetmentes zeneművekkel fogunk foglalkozni és a szünetek alkalmazását számos kontextusokban megtiltjuk – azt már most kizártuk, hogy a modulációs intervallumokon lehessen generálpauza. Erről részletesebben a 2.1 fejezetben írunk.

1.6.3. Elemi akkordváltási szabályok (szerkesztési elvek)

A tonalitás alaptételét követően kirajzolódik a klasszikus összhangzattan négyszólamú esetre vonatkozó axiómarendszerének szerkezete. A struktúra alapját az imént részletezett kijavíthatóság adja, ez a feltétel szükséges ahhoz, hogy egyáltalán legyen a szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneműnek olyan pontja, ahol megfelel a klasszikus összhangzattannak. Ahogy a 3., modulációs fejezetben láthatjuk, szintén nem csak lokális topológiai tulajdonságokra, hanem egyes zeneműszakaszok globális jellemzőire vonatkoznak a *modulációs szerkesztési elvek*. Azok a szabályok azonban, amelyek ténylegesen azt írják elő, hogy hogyan írjunk (a gyakorlatban: megvalósítható, szünetmentes, szűkebb hangterjedelmű) négyszólamú összhangzattanpéldák, a tonalitás alaptétele alapján csak az adott akkordváltási pontban bírnak jelentőséggel. A zenemű szerkezetét csak annyiban befolyásolják, hogy ha a mű tartalmaz szabálytalan akkordváltást illetve szólamvezetést, akkor nem felelhet meg teljes egészében a klasszikus összhangzattannak – de az akkordváltási pontokon kívül igen. Így azok az szabályok, amelyeket a matematikai alapozás nélküli zeneelmélet-oktatásban hagyományosan *szerkesztési elv*nek nevezünk, a következő alakot öltve kerülnek be formalizált axiómarendszerünkbe:

2. Szerkesztési elv (Séma). Legyen t a tonalitás alaptételének feltételeit teljesítő M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű egy akkordváltási pontja. Ha M t -ben megfelel

a klasszikus összhangzattannak, akkor a következő teljesül rá...

Így ha a kijavíthatósági és a modulációs axiómák (és természetesen a ZFC, amelyből kiindultunk ezek megalkotásához) konzisztens rendszert alkotnak, akkor mindaddig, amíg nem alkotunk olyan akkordváltási szerkesztési elvet, amely ezeknek vagy valamelyik másnak, már elfogadott akkordváltási szabálynak ellentmond, nemcsak konzisztens, de *teljes* axiómarendszerrel rendelkezünk. Bármely négyszólamú összhangzattanpéldáról el tudjuk dönteni, hogy kijavítható-e, és ha igen, szabályosak-e az akkordváltásai is.

Az előbbi séma szerint fogalmazzuk meg többek között: a szeptimhang kötelező lépcszerű lefelé vezetését; a szopránbeli vezetőhang kötelező (de a szeptimhang-vezetési szabálynak alárendelt) felfelé léptetését; a módosított hangok mozgásának kötelező irányát; az oktáv- és kvintpárhuzamok tilalmát és a Wolfgang Amadeus Mozart-féle kvintpárhuzamok jogosultságát; a közös hang kötelező megtartását; álzárlatnál (V $\rightarrow$ VI lépéskor) a VI. fokú hármashangzatban a terchang kötelező kettőzését mollban, fakultatív kettőzését dúrban; vokális művekben a bővített szekundlépés tilalmát. A legkisebb mozgás elvének formalizálására nem vállalkozunk, csak útmutatást adunk.

A TDK-dolgozat törzsrészában szerepelt a szerkesztési elvek részletezése és kottapéldákkal való illusztrálása. Itt ezt a Függelék D fejezeteként szerepeltetjük az eredeti formájában.

1.6.4. A bő hármashangzat és a szűkített szeptim izomériája. Tercrokonság

A következő probléma már a hangnemek konvergenciatartománya skálahangokból felépülő elemeinek vizsgálatakor felmerül, de a most következő megállapításoknak igazán az alterált akkordokról és a modulációkról szóló fejezetekben fogjuk hasznát látni. Láttunk már enharmonikus akkordpárokat például a kvintkör konstrukciójánál: például a Fisz-dúr (Fisz-Aisz-Cisz) és a Gesz-dúr (Gesz-Bé-Desz) hármashangzatot. Ez két ugyanolyan működésű dúr akkord, csupán annyi a különbség, hogy más hangnemben konvergensek. Enharmonikus hangpárjaik közül egyiknek sem egyenlőek a tagjai. A most következő példában viszont bizonyos enharmonikus hangpárok tagjait ugyanúgy, bizonyosakét máshogy nevezzük a két akkordban, amelyek két különböző hangnem konvergenciatartományába tartoznak, és ezek a hangok a szeptimhang- és vezetőhang-axiómák értelmében a két különböző hangnemben valóban másfelé is vezetnek. Amikor egy *moduláció* során akarjuk kihasználni, hogy a kiindulási és a célhangnemben vannak enharmonikus, de nem egyenlő akkordok, csak az ilyen enharmonikusságokra támaszkodhatunk, hiszen például a Fisz-dúr és Gesz-dúr hármashangzat gyakorlatilag ugyanúgy működik, az enharmonikus hangpárok tagjai ugyanoda vezetnek.

Tekintsük például a C-C-E-Gisz bő hármashangzatot, ez az a-moll hangnem III. foka. Ennek terchelyzetű szextfordítása, az E-G-C-E enharmonikus az E-Gisz-Hisz-E alaphelyzetű bő hármashangzattal, amely az a-mollnál négy kvinttel magasabb cisz-moll III. foka. Ennek terchelyzetű szextfordítása, egyben az a-moll III. fok kvartszextfordítása a Gisz-Hisz-Diszisz-Gisz, enharmonikusan átírva Asz-C-E-Asz, ez a cisz-mollnál négy kvinttel magasabb eisz-moll, azaz f-moll III. fokú hármashangzata. Ennek terchelyzetű szextfordítása, egyben a cisz-moll III. fok kvartszextfordítása pedig a C-E-Asz-C, ami ismét a C-E-Gisz-C kiinduló bőhármassal enharmonikus. Lásd a P) **ábrát**.

Ebből az következik, hogy míg létezik a jóltemperált zongorán tizenkét lényegesen különböző dúr, moll és szűk hármashangzatnév, amelyek közül bármely kettőnek egy-egy tetszőleges fordítását kiválasztva két nem enharmonikus akkordot kapunk, *bő hármashangzattól csak négy* ilyen létezik: az a- (illetve cisz-, f-)moll, a d- (illetve fisz-, b-)moll, a g- (illetve h-, esz-)moll és a c- (illetve e-, gisz-)moll III. foka. Így ha egy zenemű például egy adott moll hangnemben kezdődik, a zenemű egy pontján a III. fokú hármashangzat egy megfelelő fordítását átértelmezhetjük a négy kvinttel feljebbi vagy lejjebbi moll hangnem III. foka megfelelő fordításának, és *enharmonikus modulációval* – lásd az 50. és az 54. modulációs kottapéldákat a Függelék ?? fejezetében! – az új moll hangnemben folytathatjuk tovább. Pikárdiai terces moll hangnemeknél nem a III., hanem a VI. fok bővített, de itt is hasonló modulációs lehetőségek vannak.

Nagyon hasonló enharmonikussági viszonyok állnak fent a szűkített szeptimek fordításai között. Tekintsük például a Q) **ábrát**. Enharmonikusság erejéig megegyeznek a következő moll hangnemek következő hét-szükszeptim-fordításai: a g-moll alaphelyzetű szeptime, a b-moll szekundja, a cisz-moll terckvartja és az e-moll kvintszextje.

Azt kapjuk, hogy szűkített szeptimből enharmonikusság erejéig csak három lényegesen különböző van: az a-c-esz-fisz-, a d-f-gisz-h- és a g-b-cisz-e-mollok hetedik fokú szűkített szeptimei. Ezekre az enharmonikussági osztályokra rendre a *tonikai*, *domináns* és *szubdomináns székszeptim* elnevezésekkel utalunk. A moll-lemma szerint itt moll helyett pikárdiai terces mollt is mondhatunk. Sőt már tudjuk, hogy a hét-szükszeptim a dúr hangnem konvergenciatartományának is eleme, így akár dúrt is. Azt mondjuk, hogy azok a hangnemek, amelyeknek VII. fokú szűkített szeptimei egymással enharmonikusak, *tercrokonságban* állnak egymással; – akkor is, ha különböző típusú hangnemek. Egy adott hangnemnél három kvinttel lejjebbi I. fokú, vele azonos típusú hangnemet a hangnem *mediánsának* nevezzük. A *T* hangnem mediánsát med *T* módon jelöljük²⁵. Természetesen a hét-szükszeptim fordításai használhatók a tercrokonságban hangnemekbe való enharmonikus

²⁵Mediáns, mint középső: a kvinttkörben átellenes, 6 kvinttel lejjebb (vagy feljebb) elhelyezkedő hangnemhez az alsó kvinttkör irányában vezető úton.

modulációkra, a bőhármasnál leírthoz hasonló módon. A szűkített szeptim fordításainál – egyedül a klasszikus összhangzattannak megfelelő szeptimfajták közül – a szeptimhang és az alap között bővített szekund hangköz (*bőszekund-súrlódás*) van, ami nem hangzik erős disszonanciának, így az enharmonikus átértelmezésnél használható az addigi szeptimfordítás alaphelyzetű szűkített szeptimként. A zeneirodalomban sokkal gyakoribb a szűkített szeptimekre épülő enharmonikus moduláció, mint a bőhármásra épülő – talán éppen azért, mert a szűkített szeptim mint hét-szűkszeptim kézenfekvő módon vezet a hozzá tartozó első fokra, míg a bőhármás csak korlátozottan használható domináns funkciójú akkordként.

Minden dúr hangnem tercrokonságban áll a vele azonos előjegyzésű *párhuzamos* avagy *parallel* moll hangnemmel (pl. a C-dúrnak az a-moll a parallel mollja) és a vele *azonos alapú* moll hangnemmel is (pl. a C-dúr a c-mollal). Ezek a tercrokonságok természetesen visszafelé is fennállnak – igen könnyen igazolható, hogy a tercrokonság ekvivalenciareláció a kvintkör szokásos 12×3 dúr, moll és pikárdiai terces moll hangneme között. Az azonos alapú hangnemek viszonyát a nemzetközi terminológiának megfelelően magyarul is *minore–maggiore* viszonynak nevezzük; a moll megnevezéseként szolgáló *minore* kifejezés az I. és III. fok közötti kis tercre, a *maggiore* az ugyanezen fokok közötti nagy tercre utal.

1.7. Az alterált akkordok felsorolása

Ahogy a Bevezetésben említettük, ebben a szakdolgozatban lényegében csak az a célunk, hogy a hangnemek konvergenciatartományok elemeit felsoroljuk, a könyv változatban fogjuk részletesen ismertetni az alterált akkordok moduláción kívüli használatát, ami zeneelméleti szempontból igen fontos fejezet, ám matematikai–axiomatizálási szempontból alig ad bármi újat ahhoz képest, amit ebben a tömör összefoglalásban ismertetünk. Az ebben a fejezetben referált kottapéldákat az E rész tartalmazza a Függelékben. Fontos megjegyezni, hogy a pikárdiai terces moll hangnem akkordjainak konvergenciájáról a dúr és moll hangnemek analógiájára hozunk döntést, hiszen nem áll rendelkezésre szakirodalom, amelyben ezt a hangnemet önállóan tekintették volna.

1.7.1. Definíció. Legyen T hangnem. Jelölje $KT_0(T)$ a $KT(T)$ konvergenciatartomány T skálahangjaiból álló elemeinek halmazát. Ekkor a $KT(T) \setminus KT_0(T)$ elemeit alterált akkordoknak nevezzük.

Bevezetesként elmondjuk, hogy az összhangzattanpélda-írás gyakorlata szempontjából mit is jelent az, ha egy hangnem konvergenciatartományába tartozik egy nem skálahangokból álló akkord. Szemléletesen a következőt mondhatjuk: egy alterált akkord egy

hangnemben pontosan akkor konvergens, ha *szubdomináns funkciójú* (az 1.5.8 definíció szerint) *vagy olyan mellékdomináns, amely vezethet a hangnem valamely skálahangokból felépülő dúr vagy moll akkordjára a hangnem elhagyásának érzete nélkül.* Ezt azonban ne gondoljuk az alterált akkord adott hangnembeli konvergenciája definíciójának; például a dúr hangnem konvergenciatartományába tartozó *mollbeli VI. fokú hármashangzat* a két feltétel egyikét sem teljesíti, legfeljebb részben a szubdominánsságot (lásd a ?? részfejezetet). Ráadásul, mint látni fogjuk, a „hangnem elhagyásának érzete nélkül” skálahangokból álló dúr vagy moll akkordra való vezetés feltétele elméleti szempontból igen bizonytalan, nehezen definiálható, csak kísérletekből illetve a zeneszerzési gyakorlatból tudhatjuk meg, hogy egyes akkordváltásoknál teljesül-e. Ritka kivételtől eltekintve a hangnemek konvergenciatartományába tartozó mellékdominánsok szeptimakkordok, – tehát a domináns funkció 1.5.5 definíciója szerint domináns vagy szűkített szeptimek – a szubdominánsok között másfajta szeptimakkordokkal, hármashangzat-fordításokkal, sőt a klasszikus összhangzattannak nem megfelelő négyeshangzattípussal is találkozhatunk.

Egy hangnem n . fokú mellékdomináns szeptime (röviden: n -mellékdomináns szeptime) az n . fokú skálahangra mint alaphangra épített domináns szeptim. (Lásd a 12. **kottapéldát!**) Az n -mellékdomináns szeptimet általában akkor soroljuk a hangnem konvergenciatartományába, ha ki tudja váltani a $(\text{mod } 7) n + 3$. fokát a hangnemnek, azaz az $n + 3$. fokú hármashangzat dúr vagy moll és alaphangja a szeptimakkord alaphangjától tiszta kvartra van, és ez a kiváltás nem veszélyezteti az adott hangnembeli tonalitás érzetét. A feltétel első része kizárja dúrban a IV., mollban a IV., VI. és VII, pikárdiai terces mollban pedig a III., IV. és VI. fokú mellékdomináns szeptim konvergenciáját. A második pedig mollban a III. fokúét: mivel egy alaphang felhangjai által meghatározott hangzatok között dúrhármas van, de moll nincs, egy moll hangnem stabilitását sokkal könnyebb elvenni egy dúr – itt ugyan skálahangokból álló, de bizonytalan funkciójú – hármashangzat kiváltásával, mint például a dúr hangnem stabilitását a moll II., III. vagy VI. fokú hármashangzatok kiváltásával. A mellékdomináns szeptimeknek fontos szerepük van azokba a hangnemekbe való modulációknál, amelyeknek I. fokát kiváltják. A dolgozat bővebb változatában igazoljuk azt is, hogy bármely hangnemben egy akkord pontosan akkor *konvergens váltódomináns* (azaz konvergens az eredeti hangnemben és domináns funkciójú az azonos típusú, egy kvinttel feljebbi hangnemben), ha *váltódomináns és szubdomináns funkciójú*.

3. *Akkordtípus.* Dúrban az alábbi mellékdomináns szeptimek: I^{7b} , $II_{\sharp}^7$ (azaz a váltódomináns szeptim), $III_{\sharp}^7$, $VI_{\sharp}^7$, $VII_{\sharp}^7$ és összes fordításuk, valamint a IV. fokú mellékdomináns szeptim szekundfordítása (IV^2_b), amelyet csak VII^6 követhet.

Mollban az $I_{\sharp}^7$, $II_{\sharp}^{7\flat}$ (azaz a váltódomináns szeptim) és összes fordítása. Pikárdiai terces mollban ugyanezek és a $VII_{\sharp}^{7\flat}$, összes fordításával együtt.

A Függelék E részfejezetének 13., 14., 21., 23., 24., 25. **kottapéldái** mutatják a mellékdomináns szeptimek hangnembeli alkalmazását.

A konvergens mellékdomináns szeptimek a hangnem különböző fokai által meghatározott hangnemekhez tartozó öt-szeptimek, az *emelt alapú szűkített szeptimek* (tömör szóhasználat: (mod 7) az $n + 1$. fokú dúr vagy moll hármásra az [emelt alapú] n -szűkszeptim vezet) pedig az ugyanezen hangnemekhez tartozó hét-szűkszeptimek. Ezek alkalmazása és adott hangnembeli konvergenciájuk elfogadása nagyon hasonló a mellékdomináns szeptimekéhez. Az *emelt alapú négy-szűkszeptim* váltódomináns tulajdonságú akkord, amely Bach koráljaiban is igen gyakran előzi meg az V. fokot. Időnként az V. fok dominánsaként használjuk az ezzel enharmonikus *emelt alapú kettő-kvintszextet*, amelyet *Jean Philippe Rameau* francia barokk zeneszerző és összhangzattantudós tiszteletére *Rameau-kvintszextet*nek nevezzük, ez azonban III. fokra, így a parallel moll dominánsára is vezethet, V. fokra pedig egy-kvartszexten vagy három-szexten át is. Dúrban konvergens még a II. fokra vezető emelt alapú egy-szűkszeptim és a VI. fokhoz, azaz a parallel moll hangnemhez tartozó öt-szűkszeptim. Mollban – pikárdiai tercesben is – a II. fok szűk, így az emelt alapú egy-szűkszeptim nem konvergens, viszont használjuk itt is az emelt alapú négy-szűkszeptimet, sőt az emelt alapú három-szűkszeptimet is, így a szubdomináns főhármashangzatot is kiválthatjuk alterált szűkített szeptimmel. A szűkített szeptimek használatát mutatja az E függelékfejezet 16., 17., 19., 26., 27. és 29. **kottapéldája**.

4. *Akkordtípus*. Az alábbi emelt alapú szűkített szeptimek és minden fordításuk: dúrban $I_{\sharp}^{7b}$, $II_{\sharp}^7$, $IV_{\sharp}^{7b}$, V^7 , mollban és pikárdiai terces mollban $III_{\sharp}^{7b}$, $IV_{\sharp}^7$.

A Rameau-kvintszexten kívül leginkább csak alaphelyzetben használjuk ezeket az akkordokat, de a tercrokonságra épülő *enharmonikus modulációknál* szükségünk lesz a többi fordításra is. Rögzítsük, hogy *minden hangnemnek a szűkített szeptimek mindhárom enharmonikussági osztályából van konvergens eleme*.

Az eddig tárgyaltakhoz képest különleges zenei jelenséget figyelhetünk meg a 15. kottapéldában a $II_{\sharp}^6 \rightarrow V^2$, a 18.-ban a $IV_{\sharp}^{7b} \rightarrow V^2$ vagy a 23.-ban az $V_{\sharp}^6 \rightarrow I_{\flat}^2$ lépésnél. Ezek úgynevezett *elíziós lépések*. Közös bennük, hogy egy mellékdomináns akkord után egy másik hangnem dominánsának szekundfordítása következik, vagyis *elmarad a kiváltás* – erre utal a kihagyást, elhagyást jelentő *elízió* kifejezés. Minden szólam megtartja a közös hangot vagy ugyanabba az irányba mozog, de nem keletkezik kvintpárhuzam, legfeljebb Wolfgang Amadeus Mozart-féle (lásd a D fejezetet a Függelékben), vagyis a

lépések megfelelnek a klasszikus összhangzattannak annak ellenére, hogy nincs ellenmozgás. Az öt-szekund aztán továbblép egy-szextre illetve az egy-mellékdomináns szekund négy-szextre, így a két egymás utáni félhanglépéssel a basszusban *kromatika* keletkezik. Az elíziós lépések iterálhatók (21. kottapélda), körbe is utazhatjuk vele a kvintkört, és vannak másféle típusúak is, mint ezek, lásd például a 22. kottapélda $V \rightarrow \text{III}_5^6$ lépését²⁶.

Most pontosan definiáljuk a kromatikát és az elíziót, amelyeket – mint láthatjuk a kottapéldákban – az alterált akkordokat tartalmazó, de moduláció nélküli négyszólamú összhangzattanpéldák írásánál is nagy mértékben alkalmazunk, a modulációknál pedig a szerkesztési elvek megadásánál is közvetlenül felhasználunk.

1.7.2. Definíció (Kromatika). Kromatikán a jóltemperált zongora hangjainak olyan sorozatát $(X_1, \dots, X_N, n \leq 3)$ értjük, amelyben a szomszédos sorozatelemek egymástól egy-egy bővített prím vagy kis szekund (tehát egy félhanggal enharmonikus) távolságra vannak a zongora C-dúr skálája szerint, és $\forall n \in \{1, 2, \dots, N-2\}$ ha X_n és X_{n+1} hangközének neve ugyanaz, mint X_{n+1} és X_{n+2} hangközéé, akkor az $n+1$ értéknél a sorozatelemek frekvenciájának lokális szélsőértéke van, vagy ha ez a két hangköz kis szekund és a középső X_{n+1} ábécésneve h vagy e ²⁷.

1.7.3. Definíció. Legyen Y dúr hármashangzat a jóltemperált zongorán, Y^7 pedig a belőle képezett domináns szeptim. Legyen továbbá M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, amelynek két egymás utáni akkordváltása: $X \rightarrow Z$ és $Z \rightarrow V$, ahol X egy domináns vagy szűkített szeptimakkord fordítása, Z pedig az Y^7 egy fordítása.

Ha Z nem alaphelyzetű szeptimakkordfordítás, az $X \rightarrow Z$ lépés nem sért akkordváltási szerkesztési elveket és az $X \rightarrow Z \rightarrow V$ lépéssorozat tartalmaz valamelyik szólamban kromatikát, akkor az $X \rightarrow Z$ -t elíziós lépésnek nevezzük.

Tehát általában jellemző, hogy az a domináns tulajdonságú akkord, amelyet elíziós lépés követ, nem váltja ki a tonikáját.

Ahogy már említettük, mollban elfogadjuk konvergensnek a *nápolyi szextet* (II^{6b}), amely skálahangokból felépülő dúr szextakkord az egy kvinttel lejjebbi és a hat kvinttel lejjebbi (vagy feljebbi) hangnemben is, így modulációs lehetőséget biztosít ezen hangnemek irányába. Erősen szubdomináns funkciójú, nagyon hatásos akkord, így a zeneirodalomra

²⁶Bachnál az eddig megnevezett elíziós lépések mindegyike igen népszerű, a váltódomináns kvintszext→elíziós ötszekund és emelt alapú négy-szűkszeptim→elíziós ötszekund típusú lépésekre láthatók példák az alábbi korálfeldolgozásokban: [6; 65. (BWV 296.), 142. (BWV 334.), 147. (BWV 338.)].

²⁷Tehát irányváltás nélkül csak akkor jöhet egymás után két kis szekund, ha azok közül az egyik a C-dúr skála skálahangok közti hangköze.

általában a mértékletes használata jellemző. Különösen erőteljes a 10. kottapéldában bemutatott nápolyi szext→hét-szűkszeptim lépés! A nápolyi szext mindig terckettőzött. A Függelék F részében – annak szemléltetésére, hogy szerkesztési elveink működő matematikai axiómarendszert alkotnak – igazoljuk, hogy ha a nápolyi szext után a moll hangnem V. foka következik, akkor nem lehet szabályosan sem alap- sem kvintkettőzött.

A moll hangnemek konvergenciatartományához még pontosan egy *alterált hármashangzat* tartozik a nápolyi szexten kívül: a *pikárdiai terces első fok* ($I^\sharp$). Mikor és miért használjuk ezt az akkordot, ha nem pikárdiai terces moll hangnemű zeneművet kívánunk írni? A válaszhoz ismét a felhangrendszerhez kell visszanyúlni: mollhármast az alaphangok felhangjai nem alkotnak, míg dúrt igen, és emiatt jó akusztikájú helyiségekben – például templomban – a hosszan kitartott záró moll akkord kis terce disszonál az akkord alaphangjának 5. felhangjával. Ezért a moll hangnemű vokális műveket például Bach mindig dúr, felemelt tercű I. fokkal zárja. Sem nála, sem a bécsi klasszikusoknál nem gyakori a darab vége előtt a moll hangnem I. fokának dúrosítása, sokkal jellemzőbb a mollban kezdődő zeneművekben a minore→maggiore váltás.

5. *Akkordtípus.* Moll hangnemben a nápolyi szext (II^{6b}) és a pikárdiai terces első fokú hármashangzat ($I^\sharp$).

Tehát azt kapjuk, hogy az 1.5.5 és az 1.6.1 definíciók (tonalitás és kijavíthatósági kritérium) módosítása szükséges a vokális négyszólamú korálok esetén (azzal a technikai kérdéssel pedig, hogy még milyen esetekben, itt nem foglalkozunk). Nyilvánvalóan úgy szeretnénk ezt a változtatást végrehajtani, hogy a tonalitás alaptétele – a bizonyítás sé-májával együtt – igaz maradjon. Így mindkét definíció (iii) pontja helyett a következő feltételt szabjuk a vokális szólamot is tartalmazó M négyszólamú összhangzattanpéldára:

1.7.4. Definíció.(iii-b) ha t dallamvégpontja M -nek, akkor t -be csak hármashangzat ér-tékkü pontjai torlódnak $\mathcal{D}(M)$ -nek, és ha t ezen belül a zenemű végpontja, akkor $M(t-0)$ dúr hármashangzat.

Háromfajta *bővített akkordot* fogadunk el mindegyik fajta hangnemben konvergensenek: a bővített szextet (dúrban: $IV_{\flat}^{6\sharp}$, mollban – pikárdiai tercesben is – : $IV^{6\sharp}$), a bővített kvintszextet (dúrban: $IV_{5\flat}^{6\sharp}$, mollban: $IV_5^{6\sharp}$) és a bővített terckvartot (dúrban: $II_{\flat}^{6\sharp}$, mollban: $II_{\flat}^{6\sharp}$). Rövid megnevezéseik: bőszext, bőkvintszext, bőterckvart. Nevüket a basszushang és a valamelyik másik szólamban szereplő felemelt IV. fokú hang között feszülő disszonáns hangközről, a *bővített szextről* kapták. Az R) **ábra** mutatja be őket C-dúrban és a-mollban. Igen erős szubdominánsok, a basszushangjuk (amely dúrban lefelé módosított hang, mollban pedig skálahang, de kis szekundra van az V. foktól) lefelé vezet

az V. fok alaphangjára, a felemelt IV. fokú hangjuk mint vezetőhang fölfelé az V. fok alaphangjára, I. fokú hangjuk pedig mint felső váltóhang az V. fok tercére. A bőkvintszextben szereplő – dúrban leszállított – III. fokú hang fél hanggal magasabb az V. fok kvintjénél, így arra vezet, a bőterckvart még meg nem nevezett hangja pedig tagja az V. fokú hármashangzatnak. Így a bővített akkordok az adott hangnemben nem is vezethetnek máshova, mint – esetleg egy-kvartszexten át – az V. fokra. Ezzel indokoljuk azt, hogy bár a bőterckvart *nem enharmonikus semmilyen, a klasszikus összhangzattannak megfelelő hármashang- vagy négyeshangzattal*, mégis elfogadjuk az összes hangnemben konvergens akkordnak és szubdomináns funkciójának. Figyeljük meg, hogy a bőkvintszext enharmonikus az *öt kvinttel lejjebbi azonos típusú hangnem* domináns szeptimével, a bőszext pedig ugyanezen szeptimakkord kvinthiányos változatával. Így ezen két bővített akkord egyikét váratlanul átértelmezve elmodulálhatunk ebbe a távoli hangnembe. Ellenkező irányú hangnemváltás is lehetséges, amint a 2. fejezetben látni fogjuk: eredeti hangnemünk öt-szeptimét az öt kvinttel feljebbi hangnem bőkvintszextjévé értelmezhetjük át, ezzel ebbe az irányba is modulálhatunk. A bővítettek modulációs használatát a 41., 42. és 53., a hangnemváltás nélküli alkalmazását pedig a 30., 31. és 32. kottapélda mutatja be.

6. *Akkordtípus.* Tetszőleges hangnemben a terckettőzött bővített szext, a bővített kvintszext és a bővített terckvart.

A szubdomináns funkciót szintén színesítik és a kvintkörben lefelé irányuló modulációkat tesznek lehetővé a *mollszubdomináns* avagy szubdomináns mollbeli akkordok. Tekintsük a következő táblázatot, amelyen t a jóltemperált zongora valamely enharmonikusossági osztálya, és T jelöli az ezzel az I. fokú skálahanggal rendelkező dúr, t a moll és $P(t)$ a pikárdiai terces moll hangnemet.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
T	D	m	m	D	D	m	sz
P(t)	D	sz	m	m	D	B	sz
t	m	sz	B	m	D	D	sz

A táblázat a skálahangokból felépülő hármashangzatok típusait mutatja be. A hangnem definíciója alapján nem meglepő, hogy *egy adott alaphanggal rendelkező hangnemek dominánsai megegyeznek*. Ez persze azzal a kitétellel igaz, hogy a dúr hangnemben nem tekintjük határozottan domináns funkciójának a „felszűk” hét-szeptimet, hanem átemeljük a valóban erősebb hét-szűkszeptimet az azonos alapú moll hangnemből. Tulajdonképpen a hét-szűkszeptim is *mollbeli*, azaz a T maggiore hangnem konvergenciatartományába a t minore hangnem skálahangjaiból felépülő akkordjai közül átemelt hangzat. Általában ha X egy hármashang- vagy négyeshangzatnév a T -dúr hangnemhez képest, akkor mollbeli X -nek a t azonos nevű akkordját nevezzük. Könnyen ellenőrizhető, hogy T dominánsai

és konvergens mellékdominánsai megegyeznek a mollbelijeikkel (igaz, a mellékdominánsok mollbelijeit nem feltétlenül elemei $KT(t)$ -nek). Ugyanez igaz az emelt alapú négy-szükszeptimekre és a bővített akkordokra is. A bővített terckvarton kívül viszont nincs más olyan akkordja $KT(T)$ -nek, amely nem domináns funkciójú, nem domináns szeptim, nem szűkített szeptim és mégis megegyezik a mollbelijével.

Így számos mollbeli akkordot hozzávehetünk a T -dúr hangnem konvergenciatartományához. A tonikai funkciójúakkal óvatosan kell bánni: például a moll I. fok megszólalása véletlenszerű maggiore $\rightarrow$ minore váltásnak tűnhet. Így a tonikai akkordok közül csak a szubdomináns jegyeket is hordozó mollbeli VI. fokot fogadjuk el konvergensnek T -ben, viszont a szubdomináns mollbeliek avagy *mollszubdominánsok* közül mindet. Ezek használatát mutatja a 33. kottapélda, ez a példa azonban mesterséges; előzenében ilyen sok mollbeli akkord elveszi a dúr hangnem stabilitását és a hallgatóban is megcsömörlést válthat ki. Szinte az egész zeneirodalomra a mollbeliek visszafogott használata jellemző. A mollbeli IV. fokot szokás *mollszubdomináns főhármashangzatnak* vagy egyszerűen csak *mollszubdominánsnak* hívni.

7. *Akkordtípus.* Dúr hangnemben a mollbeli II. fokú szextakkord, IV. fokú alaphelyzetű hármashangzat és szextakkord, a VI. fokú alaphelyzetű hármashangzat és a kettő-szeptim minden fordítása. Ezenkívül a minore hangnem nápolyi szextje is, terckettőzve.

A nápolyi szext így dúr hangnemek közt is juthat modulációs szerephez. A t -moll hangnem konvergenciatartományát viszont – a zeneművek végén használatos pikárdiai I. fokon kívül – nem bővítjük a $KT_0(T)$ elemeivel, főként nem a negyedik fok vagy a kettő-szeptim fordításaival, mert ahogy már említettük, egy alterált dúr akkord megjelenése könnyen elveheti a moll hangnembeli tonalitás érzetét.

Táblázatunkból az is kitűnik, hogy míg a minore és a maggiore hangnem közös, skálahangokból álló hármashangzatai kizárólag a dominánsok (V. és VII. fok), az azonos alapú pikárdiai terces moll hangnemnek 4-4 közös hármasa van mindkét másik hangnemből. A moll hangnemből közös hármashangzatai a moll-lemma alapján a II. és IV. fokúak, a hangnem definíciója miatt pedig természetesen az V. és VII. fokúak is. A szeptimfüggvények bijektivitása garantálja, – vagy ettől függetlenül is észrevehetjük – hogy a három különböző fok: a III., VI. és I. típusainak sorozatát a két hangnemből permutáció viszi egymásba: a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$, amely az S_3 diédercsoport-reprezentációjában (D_3) a 120° -os forgatás generátora lehet.

A pikárdiai terces moll hangnemet a vele azonos alapú molltól megkülönbözteti a dúr első fok – de mi különbözteti meg a *csak mollbeli szubdominánsokat használó dúrtól*? Egyetlen akkord: a bő hatodik fok. A dúr hangnem konvergens mollbelijeit közé

felvett mollbeli VI. fokú hármashangzat dúr. Ez is alkalmazható álzárlatban (lásd a D fejezetet), kötelezően terckettőzve. Ugyanígy szerepelhet álzárlatban a pikárdiai terces moll hangnem VI. foka is. Bár disszonanciája miatt még kevésbé jelent nyugvópontot, mint egy dúr vagy moll VI. fok az V. fok után, kezdődhet vele teljes autentikus zárlat a hangnemben. Különbség az azonos alapú mollhoz képest a pikárdiai terces mollban, hogy konvergens a hét-mellékdomináns szeptim, amely a moll III. fokot váltja ki a dúr hangnemhez hasonlóan, ezt a III. fokot azonban erősen ajánlott szubdomináns irányba továbbvezetni (azaz az adott pillanatban tonikai funkciójának tekinteni), nehogy kiessünk a hangnemből, elveszítsük a tonalitást.

Amikor a 2. fejezetben a *sztemderd hétakkordos modulációkat* fogjuk tárgyalni, csak a dúr és moll hangnemek közötti váltásokkal foglalkozunk, mert ebben az erősen lecsupaszított modellben nincsen lehetőség olyan sok akkord lejátszására, hogy a pikárdiai terces moll hangnemet el tudjuk különíteni az azonos alapú dúr és moll hangnemtől is. Nem beszélve arról, hogy ha erre volna is lehetőség, a dúr–moll dualitásban gondolkozó zeneértő közönség akkor sem azt érezné, hogy megérkeztünk egy pikárdiai terces moll hangnembe, hanem hogy elértünk egy új alaphangot mint tonikát, de nem világos, hogy dúrba vagy mollba érkeztünk, vagyis a moduláció tökéletlen. Ne felejtsük: a pikárdiai terces moll önálló hangnemenként való kezelése nem csak a zeneelmélettel és zeneszerzéssel foglalkozók szándékán múlik, hanem azon is, hogy a befogadók elfogadják-e, hogy valóban létezik ez a dúr és moll közti átmeneti hangnem.

Befejeztük a hangnemek konvergenciatartományaiba tartozó akkordok felsorolását, így axiómarendszerünk teljessé tételéhez már csak a modulációs szerkesztési elvek bevezetésére van szükség. A dúr és moll hangnemek akkordjainak összefoglalását a G fejezet tartalmazza a Függelékben. Talán meglepő, hogy dúrban lényegesen több konvergens akkord van, mint mollban – ennek oka, hogy mollban kevesebb a konvergens mellékdomináns, több a szűkhármas, amelyeknek csak szextfordítását fogadjuk el, míg a többi hármashangzattípusnak minden fordítását, és a dúr hangnemhez számos mollbeli akkordot hozzávettünk, de a moll hangnemhez csak egyetlenegy dúrbelit.

1.8. A pikárdiai terces moll hangnem statisztikai vizsgálata

A következő kísérletet összhangzattani és matematikai statisztikai érdeklődésből végeztem, nem foglalkoztam a kérdés feltevésével kapcsolatos szociológiai és pszichológiai módszertani kérdésekkel, és azt sem tűztem ki célul, hogy a kapott eredményeknek valamilyen alapsokaságban való reprezentativitását feltételezhessük. A kísérlet során középiskolás, a terézvárosi Tóth Aladár Zeneiskolában továbbképzősként zenét tanuló növendékeket,

akik a dúr és moll hangnem fogalmával és néhány fontosabb konvergens akkordjával már tisztában vannak, arra kértem, hogy döntsék el, hogy az alábbi *pikárdiai terces moll hangnemű M* négyszólamú összhangzattanpélda (34. **kottapélda** a Függelék az E részében) hangneme dúr vagy moll-e. Ez a példa felvillantja a hangnem itt részletezett sajátosságait, például a dúr I. fokot, szűkített VII. fokú szeptimet és az álzárlatban használt bő VI. fokot. Más érvényes választási lehetőségük nem volt, a válaszukat egy papírlapra kellett felírniuk anélkül, hogy a többi kísérleti alany látta volna azt, majd érdeklődésüktől függő mértékben meséltem nekik a pikárdiai terces moll hangnem fogalmával és működésével kapcsolatos eredményeinkről.

Mivel nem volt előzetes információnk arról, hogy a „dúr” és a „moll” válaszok valószínűség-számítási szempontból máshogyan viselkednének, olyan döntési eljárást volt célszerű használnunk, amely az első- és másodfajú hibát egyszerre tartja alacsonyan. És minthogy nem egy adott mintához kerestünk hipotézisvizsgálati módszert, hanem a mintavétel megtervezése is a mi feladatunk volt, lehetőségünk volt szekvenciális próba alkalmazására, több lépésben való mintavételre. A kísérleteket és eredményeik vizsgálatát a Wald-Wolfowitz-tételre [7; p. 189-194.] támaszkodva kívántam elvégezni, zeneiskolám megfelelő korosztálybeli növendékei számának határáig. Feltételeztem, hogy a válaszok között a „moll” válaszok aránya Bernoulli(θ)-eloszlású, ahol $\theta \in]0, 1[$ az ismeretlen paraméter. Azt vártam, hogy a moll-lemmában felsorolt közös tulajdonságok miatt el tudjuk fogadni azt a hipotézist, hogy a hangnem nagy ($\theta = \frac{2}{3}$) valószínűséggel moll hangnemű. Ugyanakkor a meggondoltak alapján a „dúr” és a „moll” válaszok szempontjából szimmetrikus próbát terveztem: a

$$H_0 : \theta = \frac{2}{3} \text{ versus } H_1 : \theta = \frac{1}{3} \quad (1)$$

alternatívát vizsgáltam, $\varepsilon_1 = 0,05$ és $\varepsilon_2 = 0,05$ előírányzott első- és másodfajú hibával. A Wald-féle valószínűséghányados-próbát használtam, amely a Wald-Wolfowitz-tétel szerint az adott alternatívára az egyenletesen legerősebb próba. Ezen hipotézisvizsgálat próbastatisztikája n mintavétel $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ után az alábbi likelihood-hányados:

$$V_n = V_n(X_1, \dots, X_n) := \frac{L_{\frac{1}{3}}(X_1, \dots, X_n)}{L_{\frac{2}{3}}(X_1, \dots, X_n)} = \prod_{i=1}^n \frac{p_{\frac{1}{3}}(X_i)}{p_{\frac{2}{3}}(X_i)}, \quad (2)$$

ahol $p_\theta(x)$ jelöli a θ paraméterértékhez tartozó súlyfüggvényt. A Wald-féle valószínűséghányados-próba döntési eljárása $n \geq 1$ esetén:

- Ha $V_n \leq \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_1} = \frac{5}{95} \Rightarrow H_0$ -t elfogadjuk,
- Ha $V_n \geq \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{95}{5} \Rightarrow H_0$ -t elutasítjuk,

- minden más esetben újabb mintát veszünk (a mi kísérletünkben csak a növendékek létszámának erejéig),

vagyis végleges döntést akkor hozunk, amikor a „dúr” válaszok száma öttel meghaladja a „moll”-okét vagy fordítva. A kísérletsorozat során a z elemű mintát vettünk és ezután a H0-ttöttük. Kotta!!!!

2. Modulációk

A hangnemek konvergenciatartományait tehát ismerjük; a klasszikus összhangzattan axiómarendszerének teljessé tételéhez meg kell még határoznunk, hogy mit értünk *a klasszikus összhangzattannak megfelelő moduláció* alatt. Ezzel válik ténylegesen bizonyítottá a tonalitás alaptétele is. A *modulációs szerkesztési elvek* megalkotásához először Előre jelezzük, hogy a modulációkkal kapcsolatos kottapéldáink jóval kevésbé modellezik átfogóan a zeneirodalmi gyakorlatot, mint az eddig bemutatott, rögzített hangnemű példák. Ugyanis ahhoz, hogy egy moduláció megfeleljen a klasszikus összhangzattannak, bizonyos kritériumokat teljesítenie kell, – ezt fogjuk részletezni az új szerkesztési elvekben – de valójában nincs kötött hosszúsága, akkordszáma a szabályos modulációknak, egy összetettebb hangnemváltást tulajdonképpen tetszőlegesen hosszú ideig el lehet húzni. Így egyszerű, hétakkordos kottapéldáink csak kiindulópontot jelentenek az élőzenei modulációkhoz.

2.1. Szünetmentesség és akkordsorozatok: a szigorú négyszólamú szerkesztés megvalósítható modellje

Ahogy már az első fejezetben kifejtettük, számos előnyünk származott abból, hogy a szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneműveket topologikusan, a megvalósítható eseténél általánosabban tárgyaltuk. Ugyanakkor a klasszikus összhangzattannak megfelelő $T_1 \rightarrow T_2$ modulációk az 1.5.9 definíciója és az első modulációs axióma (az 1. szerkesztési elv) alapján ezek a hangnemváltások szünetmentesek, T_1 első fokú hármashangzatával kezdődik és T_2 első fokú hármashangzatával végződnek. Így a modulációk tárgyalásánál *elég a megvalósítható zeneművekkel foglalkozni*, mert az általános szigorú négyszólamú tárgyalás ennél sokkal bonyolultabb lenne és mégsem származna belőle többleteredmény. Így most – az előző fejezet hosszas, csaknem tisztán összhangzattani fejtegetései után – visszatérünk a matematikai eszköztár bővítéséhez, azzal a céllal, hogy utána egyszerűen, tömören és mégis szemléletesen szólhassunk a modulációkról. Egyrészt maguk a négyszólamú összhangzattanpéldák helyett áttérünk az *akkordsorozataik* vizsgálatára, másrészt a

jóltemperált zongora forgatás-invarianciája (Bach-törvény) kihasználásával konkrét kezdő- és célhangnem helyett a két hangnem kvintkörbeli egymáshoz képesti viszonyával jellemezzük a modulációkat a *modulációs félcsoport* segítségével. Tetszőleges M négyszólamú összhangzattanpélda esetén $A(M)$ jelölje az M akkordváltási pontjainak halmazát.

2.1.1. Definíció. Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, amelynek a végpontján kívül nincs göngyöltési pontja!

Az M jobbinvariáns szünetmentes kiterjesztése ($\mathcal{D}(M)$ -ről) $B(M)$ -re legyen: $\overline{M}$ ²⁸: $B(M) \rightarrow K^4$,

$$\overline{M}(t) = \begin{cases} M(t), & \text{ha } t \in \mathcal{D}(M), \\ M(\sup\{u | u \in \mathcal{D}(M), u < t\} - 0), & \text{ha } t \notin \mathcal{D}(M) \end{cases}$$

A következő négy egyszerű belátás igazolását az Olvasóra bízunk.

2.1.1. Állítás. Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztési zenemű, amelynek nincs göngyöltési pontja.

- (i) t akkordváltási pontja $\overline{M}$ -nek $\Leftrightarrow t$ akkordváltási vagy dallamkezdő pontja M -nek,
- (ii) $\overline{M}$ a legszűkebb értelmezési tartományú N szünetmentes zenemű, amelyre $\forall t \in \mathcal{D}(M) \quad \lim_{u \rightarrow t+} N(u) = \lim_{u \rightarrow t+} M(u)$,
- (iii) az $M \mapsto \overline{M}$ lezárási operátor, vagyis $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$,
- (iiii) legyen $Pa(\overline{M}) = \{N : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow K^4 \text{ szig.} \mid \overline{M} = \overline{N}\}$. Ekkor az elemek értelmezési tartományai közti tartalmazási reláció felfelé irányított rendezés $Pa(\overline{M})$ -en, amelyre $\sup Pa(\overline{M}) = \overline{M}$.

Hasonlóan definiálható M balinvariáns szünetmentes kiterjesztése, ez abban különbözik $\overline{M}$ -től, hogy definíciójában $M(\sup\{u | u \in \mathcal{D}(M), u < t\} - 0)$ helyett $M(\inf\{u | u \in \mathcal{D}(M), u > t\})$ szerepel. E zenemű bal oldali határértékei egyeznek meg M -ével, akkordváltási pontjai pontosan M akkordváltási vagy dallamvégpontjai.

A tonalitás alaptétele alapján fontoljuk meg, hogy szünetmentes zeneművekre a klasszikus összhangzattannak való megfelelés sokkal erősebb tulajdonság, mint általános kijavítható zeneművekre. Ezt mutatja a következő, igencsak negatív eredmény:

2.1.2. Állítás. Legyen M kijavítható zenemű, amelynek nincs akkordváltási pontja. Ekkor M minden pontjában megfelel a klasszikus összhangzattannak.

²⁸Ejtsd: M lezárt.

Ez alapján fölvetődik az igény, hogy akkordváltási szerkesztési elveink teljesülését ne csupán magára a kijavítható M zeneműre, hanem $\overline{M}$ -ra követeljük meg. Azonban a zeneirodalomban vannak olyan példák, amikor egy szünetek közé beiktatott átvezető akkord teremt kapcsolatot a zenemű két részlete között úgy, hogy a mű szünetmentes kiterjesztése nem felel meg a klasszikus összhangzattannak. Bár a zenemű felszabdálása, indokolatlanul sok szünet alkalmazása ellentétes a klasszikus összhangzattan szemléletével, mértékletesen azért lehet támaszkodni arra, hogy a szünetek feloldják az akkordváltási szerkesztési elveket. Így például az S) **ábra** minden pontban tonális, de nem kijavítható, mert a C-dúr és az ugyanolyan akkordokból felépülő F-dúr rész között nincs a klasszikus összhangzattannak megfelelő moduláció. A szünet ideje pedig enyhíti is a szabálytalan akkordváltások erejét. Hasonló jelenség, hogy Bach a korálfeldolgozásaiban általában nem alkalmazza a *keresztállásokat*, de korona után (lásd a B.1 definíciót) igen; itt a korona megállítja a zenemű állandó sebességgel való lejátszásának folytonosságát, a következő akkord – bár a tonalitást meg kell őrizni – bizonyos értelemben újrakezdésnek tekinthető.

A jobbinvariáns szünetmentes kiterjesztés segítségével definiáljuk a négyszólamú összhangzattanpélda *akkordsorozatát*.

2.1.2. Definíció. Legyen M négyszólamú összhangzattanpélda, amelynek végpontján kívül nincs göngyölítési pontja és legyen $\overline{M}$ kezdőpontja t_0 , akkordváltási pontjai pedig $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, ahol $t_n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Az $\langle M \rangle : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow K^4$, $n \mapsto \overline{M}(t_n)$ sorozatot az M akkordsorozatának nevezzük.

Most megmutatjuk, hogy az élőzenei gyakorlatban betöltött szerepük mellett milyen elméleti szerepe van a *lejátszásfüggvényeknek*:

2.1.3. Állítás (A lejátszás mint homotópia.). *Legyenek M_1 és M_2 szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneművek, amelyek akkordhosszainak infimuma pozitív és $\langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle$. Ekkor $\exists \theta \in PL(\mathbb{R}) : \overline{M}_2 = \overline{M}_1 \circ \theta$.*

Bizonyítás. Legyen $\overline{M}_1$ kezdőpontja t_0 , akkordváltási pontjai $t_1 < \dots < t_n$ ($n \in \mathbb{N} \cup \infty$), $\overline{M}_1$ kezdőpontja u_0 , akkordváltási pontjai pedig $u_1 < \dots < u_n$.

Definiáljuk θ -t: $\theta(t_i) := u_i$, $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ és $\forall i$ -re legyen θ a $[t_i, t_{i+1}]$ intervallumon elsőfokú polinom. Ha $n < \infty$, akkor $\forall t \in [t_n, \infty[$ $M(t) := u_n + t$, vagyis θ ezen a szakaszon is lineáris. Ekkor $\overline{M}_2 = \overline{M}_1 \circ \theta$, θ pedig folytonos, szigorúan monoton növény, $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ bijektív függvény, amely a $[t_i, t_{i+1}]$ (és $[t_n, \infty]$, ha $n < \infty$) alakú szakaszok belsejében végtelenszer differenciálható és deriváltja nem tűnik el. Így $\theta \in PL(\mathbb{R})$. $\square$

Ez alapján beszélhetünk *egy akkordsorozat kijavíthatóságáról, klasszikus összhangzattannak való megfeleléséről, tonalitásáról*. Kijavíthatóságáról és a klasszikus összhang-

zattannak való megfeleléséről akkor, ha az adott akkordsorozattal rendelkező összes *pozitív minimális akkordhosszúságú* négyszólamú szerkesztésű összhangzattanpélda ilyen tulajdonságú. Tonalitásáról pedig akár még általánosabban is: akkor, ha az összes, ezzel az akkordsorozattal rendelkező szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű tonális (ezen zeneművek akkordhosszainak infimuma lehet 0, de legfeljebb a végpontjuk lehet göngyölítési pontjuk). Egy $(M(t_k), k = 0, \dots, n)$ akkordsorozat egy *szakasza* alatt az $(M(t_k), k = l, \dots, m, 0 \leq l < m \leq n)$ akkordsorozatot értjük.

2.2. A modulációs félcsoport

A kvintkör szimmetriája alapján érezzük, hogy két hangnem közötti modulációs lehetőségek csak attól függenek, hogy a hangnemek milyen típusúak és milyen távolságra helyezkednek el a kvintkörben. Ezen intuíció alapján szeretnénk hangnempárok bizonyos halmazait azonosítani, erre a célra vezetjük be a következő algebrai struktúrákat.

Legyen $(\mathfrak{D}; +)$ és $(\mathfrak{M}; +)$ két tizenkét elemű, $\mathbb{Z}_{12}$ -vel izomorf, additív írásmóddal adott ciklikus csoport. Az összeadásra nézve $\mathfrak{D}$ nullelemét jelölje T , generátorát (a $\mathbb{Z}_{12}$ gyűrű egységelemét) pedig D és $(\mathfrak{D}; +)$ -ot nevezzük a továbbiakban *dúr csoportnak*. Hasonlóan $\mathfrak{m}$ nullelemét jelölje T' , generátorát D' , $(\mathfrak{m}; +)$ neve pedig legyen mollcsoport.

A *dúr csoport műveleteinek szemléletes jelentése*: a csoport tizenkét elemét tekinthetjük a jóltemperált zongora tizenkét enharmonikussági osztálya egy-egy reprezentánsának. Ezek egyike a T , $nD = \underbrace{D + \dots + D}_{ndb}$ ($n = 0, 1, \dots, 11$; $0D = T$) pedig a T -től a kvintkörben felfelé haladva n . enharmonikussági osztályt jelöli. D a domináns irányra utal $-D$ -t éppen ezért jelölhetjük S -sel is a szubdomináns irányra, azaz a kvintkörben lefelé való haladásra utalva. Ekkor ha adott egy (T_1, T_2) dúr hangnemekből álló pár az E enharmonikussági tartományban, akkor a dúrcsoportbeli kivonással $T_2 - T_1 = nD$ esetén n éppen azt adja meg, hogy T_1 -től T_2 a kvintkörben fölfelé haladva hány kvintlépéssel érhető el. Így maga az nD csoportelem *mint kivonáseredmény* tekinthető azon $T_1 \rightarrow T_2$ modulációk osztályának, amelyeknél a kezdő- és a célhangnem is dúr és $T_2 - T_1 = nD$. T helyére T' -t és D helyére D' -t helyettesítve ugyanilyen jelentés tulajdonítható moll, E -beli T_1 és T_2 esetén $T_2 - T_1 = kD$ -nél k -nak a mollcsoportbeli kivonásnál.

Szeretnénk egy olyan, *modulációs félcsoporthoz* nevezett $(\mathfrak{MD}; +)$ asszociatív algebrai struktúrát létrehozni, amely a dúr- és a mollalgebra összes elemét tartalmazza, de más eleme nincs, az ezeken belüli összeadás-műveleteket megtartja, e két részstruktúra közötti *komplexusművelet* pedig szintén jól modellezi a modulációosztályok tulajdonságait. Most megadjuk ezt a műveletet, majd ezen részfejezet végén, még részletesebben pedig a Függelék H fejezetében indokoljuk, hogy miért így választottuk meg. Legyen a

dúr- és a mollesoport között a komplexusművelet a *kételemű jobbzeró félsoporté*, melynek

Cayley-művelet táblája:

$+$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{m}$
$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{m}$
$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{m}$

A $\mathbb{Z}_{12}$ ciklikus csoport és a kételemű jobbzeró félsoport asszociativitása alapján könnyen ellenőrizhető, hogy ha $\mathfrak{Mod}$ összeadása asszociatív. Az összeadást ezért végezhetjük úgy $\mathfrak{Mod}$ -ban, hogy az egymás mellett álló $\mathfrak{D}$ -beli vagy $\mathfrak{m}$ -beli tagcsoportokat összevonjuk, így kapunk egy olyan összeget, amelyben bármely két szomszédos tag különböző részcsoportba tartozik, ekkor a végeredmény a jobbzeró tulajdonság miatt az utolsó tag lesz. Minden $\mathfrak{D}$ -beli elemnek a T nullelemre vonatkozóan létezik ellentettje (additív inverze), a $\mathfrak{m}$ -beli elemeknek pedig a T' -re vonatkozóan van ellentettje. T és T' a félsoport idempotens elemei és egyben jobb oldali egységelemei ($\forall X \in \mathfrak{Mod} \quad XT = T, XT' = T'$), bal oldali egységelem nincs a struktúrában. Vegyük észre azt is, hogy tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{Mod}$ esetén $XY = YX$ pontosan akkor áll fent, ha mindkét elem a dúrcsoporthoz vagy mindkettő a mollesoporthoz tartozik.

Figyeljük meg, hogy T és T' tetszőleges megválasztása esetén egymással izomorf modulációs félsoportokat kapunk, vagyis a dúr- és mollesoportot algebrai szempontból bárhol összeilleszthetjük egymással. Zeneelméleti megfontolások alapján a *parallel modulációs félsoportban* fogunk dolgozni a modulációk vizsgálatánál. Itt T a C-dúr (enharmonikusági osztálya a zongorán), T' pedig az a-moll(é), tehát $T' = |T, D' = |D$. Így D azon modulációk osztálya, amelyeknél a kezdő- és a célhangnem kvintkörbeli viszonya megegyezik a C-dúr $\rightarrow$ G-dúr modulációéval, D' pedig az a-moll $\rightarrow$ e-moll modulációéval. Tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{Mod}$ esetén $X + Y$ azt a modulációosztályt reprezentálja, amely $n + k \pmod{12}$ kvintet lép fölfelé, ahol $X = nD \vee X = nD'$ és $Y = kD' \vee Y = kD'$, és nem tudjuk, milyen típusú a kezdőhangnem (ez mutatja, hogy az összeadás nem csoportművelet), de a célhangnem pontosan akkor dúr, ha Y a dúrcsoport eleme. Azért a célhangnem típusára vonatkozó információt részesítjük előnyben a kezdőhang típusára vonatkozóval szemben, mert – amint a Függelék H fejezetében erről részletesen írunk – miután egy modulációnak elkezdődött a zárószakasza, ahol már az összes akkord eleme a célhangnem konvergenciatartományának, ott még nem egyértelmű, hogy dúrba vagy mollba fogjuk-e lezárni a modulációt. És amint hamarosan látni fogjuk, bármely dúr hangnemből bármely dúrba és bármely moll hangnemből bármely mollba modulálhatunk közvetlenül. Ezért az új hangnem elérésekor véletlenszerű – a klasszikus összhangzattannak nem feltétlenül megfelelő! – $\text{minore} \leftrightarrow \text{maggiore}$ váltásokkal bármely hangnemből bármely másikba modulálhatunk, a moduláció zárószakasza nem ad információt arról, hogy a kezdőhangnem dúr vagy moll volt-e.

Vegyük észre még azt, hogy $\mathfrak{Mod}$ pontosan egy elemének, a $6D$ -nek kétszerese T és pontosan egy másik elemének, a $6D'$ -nek kétszerese a T' . Ez arra utal, hogy a kvintkörben átellenes, 6 kvintre lévő azonos típusú hangnembe vezető modulációkra (pl. C-dúr $\rightarrow$ Fisz-dúr, a-moll $\rightarrow$ esz-moll) igaz lehet az, hogy a két hangnem szerepét felcserélve, a moduláció akkordneveit változatlanul hagyva szintén érvényes modulációt kapunk, amely visszajuttat a célhangnemből a kezdőhangnembe. Hamarosan fogunk példát látni olyan C-dúr $\rightarrow$ Fisz-dúr *kromatikus modulációra*, amelyre ez valóban teljesül²⁹.

2.3. A klasszikus összhangzattannak megfelelő modulációk

Eljött az ideje, hogy kiegészítsük és teljessé tegyük a klasszikus összhangzattan axiómarendszerét a modulációkra vonatkozó szabályok megadásával. A szabályrendszer szintetikus felépítése helyett itt azt az utat választjuk, hogy minden szerkesztési elvet először kimondunk, majd közvetlenül ezután rövid magyarázattal indokoljuk. Ezután következik az egyszerűsített négyszólamú modell, a *sztenderd hétakkordos modulációk* kottapéldáinak bemutatása, amely – mint említettük – csak bevezetést és nem általános receptet ad a modulációk komponálásához.

2.3.1. Definíció (Alapmoduláció, moduláció akkordsorozata). Legyen M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű, amely tartalmaz egy $T_1 \rightarrow T_2$ modulációt, amely teljesíti az 1.5.9 definíciót és az az 1. szerkesztési elvet (az első modulációs axiómát). Ekkor a modulációt alapmodulációnak nevezzük.

Az alapmoduláció az első modulációs axióma miatt T_1 első fokú alaphelyzetű hármashangzatával kezdődik, legyen ezen akkord kezdőpontja t_0 és T_2 ugyanilyen akkordjával zárul, legyen ennek végpontja t_1 . Azt is tudjuk, hogy moduláció definíciója miatt $M' = M|_{[t_0, t_1]}$ megvalósítható zenemű. Az $\langle M' \rangle$ akkordsorozatot nevezzük az adott moduláció akkordsorozatának.

Az, hogy egy moduláció akkordsorozata megfelel a klasszikus összhangzattannak, azt jelenti, hogy minden ilyen akkordsorozatú moduláció megfelel a klasszikus összhangzattannak.

²⁹Ahogy említettük, pikárdiai terces moll kezdő- vagy záróhangnemű modulációkkal nem fogunk foglalkozni, de ha mégis szeretnénk, akkor felvehetnénk egy harmadik $\mathbb{Z}_{12}$ -vel izomorf ciklikus csoportot, a $\mathfrak{P}$ pikárdiai terces mollcsoportot a dúr- és a mollcsoportok mellé, és a három részcsoporthoz közti komplexusművelet az előbbi érvelés alapján lehetne a *háromelemű jobbzerő félcsoporthé*. Ekkor $\mathfrak{P}$ nulleleme, T'' is jobb oldali egységelem lenne, és továbbra is igaz maradna, hogy csak az egy részcsoporthoz tartozó elemek kommutálnak egymással.

3. Szerkesztési elv. Ha egy $T_1 \rightarrow T_2$ moduláció megfelel a klasszikus összhangzattan-nak, akkor alapmoduláció. Ezenkívül az előző definíció szerinti t_0 pontban M (nem csak gyengén!) tonális és a hangnem T_1 , t_1 -ben pedig M' tonális és a hangnem T_1 .

Vagyis a $T_1 \rightarrow T_2$ moduláció kezdetén úgy vesszük, hogy a modulációt indító T_1 -beli I. fokú akkord kezdőpontjában a hangnem T_1 , vagyis a modulációs szakasz egy olyan zenemű részlete, ahol a T_1 -beli *funkciós tonalitást biztosító* domináns illetve szubdomináns funkció már ezen akkord előtt szerepelt. Ha garantálnunk kéne a T_1 -beli tonalitást is, nem is lenne elég hét akkord a modulációkra. Viszont a T_2 -beli tonalitást a modulációs szakasz záróakkordjaival kell garantálni, vagyis úgy kell megérkezni a modulációt befejező T_2 -beli I. fokú hármasra, hogy előtte már szerepelt T_2 -ben domináns és szubdomináns funkciójú akkord is. A szubdomináns funkció a befejezettség-érzet előidézésén túl amiatt is nagyon fontos, hogy el tudjuk különíteni a dūr és a moll hangnemet egymástól a záróakkord előtt³⁰.

4. Szerkesztési elv. Legyen $\langle M \rangle$ a 3 axiómát teljesítő $T_1 \rightarrow T_2$ modulációs akkordsorozat. Ha $\langle M \rangle$ megfelel a klasszikus összhangzattan-nak, akkor:

(i) nincs benne az eddigi szerkesztési elvekkel ellentétes akkordváltás,

(ii) felosztható három diszjunkt, lefedő szakaszra, a következő sorrendben:

- N (neutral phase – semleges szakasz): ennek minden akkordja $KT(T_1)$ eleme, nem domináns szeptim(fordítás), nem szűkített szeptim(fordítás) és ha T_1 -ben alterált, akkor mollbeli akkord vagy a nápolyi szext,
- F (fundamental step – fundamentális lépés): ha nem teljesül, hogy $T_2 - T_1 = \pm D$ a $\mathfrak{D}$ dúrcsoportban, akkor $F \neq \emptyset$.

Ekkor F -nek létezik olyan eleme, amely nem skálahangokból álló akkord T_1 -ben, F utolsó eleme domináns funkciójú vagy konvergens mellékdomináns T_2 -ben, amely kiváltással lép tovább T_2 egy skálahangokból felépülő akkordjára. Ezenkívül F elemei páronként különböző hangnemek domináns funkciójú akkordjaival enharmonikusak. Ha F -nek egynél több eleme van, akkor az utolsó olyan akkordváltás, amely F elemei között történik, lehet kiváltás, minden más F -beli akkordváltás elíziós lépés vagy enharmonikus akkordok fordításai közti váltás. Ha T_1, T_2 moll hangnemek, F tartalmazhat bő hármashangzatot is.

³⁰Lásd a moll-lemmát és vö. azzal, hogy miért nem foglalkozunk olyan modulációkkal, ahol T_1 vagy T_2 pikárdiai terces moll

A moduláció zárószakasza teljes autentikus zárlat T_2 -ben, a következő funkcióséma szerint: T vagy S -re vezető mellékdomináns $\rightarrow S$: skálahangokból álló szubdomináns vagy váltódomináns $\rightarrow D \rightarrow T = T_2$ I.fokú alaphelyzetű hármashangzata. Az utolsó tonikán kívül a funkcióséma többi eleme jelenthet több, egymás utáni, azonos funkciójú akkordot is T_2 -ben.

- Ekkor a moduláció zárlati részének azon szakasza, amely már nem tartalmaz alterált akkordot: C (cadence – kadencia, zárlat).

(iii) T_1 első fokú alaphelyzetű hármashangzata csak a moduláció első akkordjaként, T_2 ugyanilyen akkordja csak a moduláció utolsó akkordjaként szerepel.

Megjegyzések a szerkesztési elvhez:

1. A klasszikus összhangzattan általános esztétikai elve, hogy a moduláció legyen sima, lehetőség szerint szinte észrevétlen. Ez különösen akkor lehetséges, ha T_1 és T_2 közel vannak egymáshoz a kvintkörben (az előjegyzések alapján, tehát a parallel modulációs félcsoport szerinti értelemben, vagyis például a C -dúrhoz a moll hangnemek közül az a -moll van legközelebb). A simaság egyik feltétele, hogy nem sűtjük el egyből – például az F utolsó akkordja után, ha az T_2 -nek dominánsa, ami általában teljesül – az I. fokú alaphelyzetű hármashangzatot T_2 -ben, először más basszusú tonikai akkordokat (I^6 , VI) vagy S -re vezető mellékdominánsokat használunk és csak a végén válik nyilvánvalóvá, hogy a T_2 I. foka lett az új tonika.
2. Ahogy már az 1.7 bevezetésénél kifejtettük, alterált hármashangzatok megszólaltatása brutális váltásnak tűnhet, megint csak a moduláció simaságát veszélyezteti. Ezért alkalmazunk F -ben – összetettebb esetekben egymás után elízióval – domináns és szűkített szeptimakkord(fordítás)okat, a szerkesztési elv alapján F -nek legfeljebb az utolsó akkordja lehet hármashangzat.
3. A T_1 -beli I. fokú kezdőakkord miatt a klasszikus összhangzattannak megfelelő modulációkban $N \neq \emptyset$, az pedig a szerkesztési elvből is nyilvánvaló, hogy $C \neq \emptyset$.

A moduláció simasága érdekében kapcsolatot kívánunk teremteni a T_1 és a T_2 között. Ezt alapvetően háromféleképpen tehetjük meg.

2.3.2. Definíció (Diatonikus, enharmonikus és kromatikus moduláció). Legyen $\langle M \rangle$ $T_1 \rightarrow T_2$ modulációs akkordsorozat, amely teljesíti a 4-t az akkordváltási szerkesztési elveken (vagyis az (i) ponton) kívül. Ekkor a moduláció

- (i) diatonikus, ha N utolsó akkordja $KT(T_2)$ skálahangokból álló eleme, mollszubdominánssá vagy nápolyi szextjé,
- (ii) kromatikus, ha tartalmaz valamelyik szólamban kromatikát, amelynek legalább egy akkordja F eleme,
- (iii) enharmonikus, ha létezik N utolsó vagy F első akkordjával enharmonikus eleme $KT(T_1)$ -nek és $KT(T_2)$ -nek is, amelyeknek létezik egyenlő hangja, és ezen akkord után $\langle M \rangle$ -ben minden akkord $KT(T_2)$ eleme³¹.

5. Szerkesztési elv (Gyenge trichotómia-axióma.). Legyen $\langle M \rangle$ olyan modulációs akkordsorozat, amely teljesíti a 4-t az akkordváltási pontokon kívül. $\langle M \rangle$ pontosan akkor felel meg a klasszikus összhangzattannak az akkordváltási pontokon kívül, ha diatonikus, kromatikus vagy enharmonikus. Ha ezen felül teljesíti a 3 (i) pontját is, akkor megfelel a klasszikus összhangzattannak.

A 4-t nem teljesítő akkordsorozatú modulációk nem felelhetnek meg a klasszikus összhangzattannak.

A $T_1 \rightarrow T_2$ hangnembváltás simaságát, az átmenet folytonosságának érzetét végső soron három dolog teremtheti meg. A legnyugodtabb átvezetésre akkor van lehetőség, ha a két hangnem közel van egymáshoz a kvintkörben és létezik *közös akkord*, amely mindkét hangnemből áll, vagy esetleg csak az egyikben, de akkor a másikban szubdomináns mollbeli vagy a nápolyi szext. A közös akkord igen gyakran dúr vagy moll hármashangzat. *Diatonikus moduláció* során ezt N -ben megszólaltatjuk, úgy értelmezzük, mint T_2 konvergens akkordját, innentől a hangnem már T_2 , F gyakran csak T_2 domináns szeptimének egy konvergens fordításából áll, ezen akkord után rögtön C kezdődik. *Enharmonikus modulációt* leggyakrabban akkor hajtunk végre, amikor közös akkord már nincs a kezdő- és a célhangnemből, de T_1 egy konvergens szűkszeptim- vagy bőhármashangzat fordítása, esetleg a két hangnem egyikének bővített (kvint)szextje enharmonikus T_2 egy konvergens akkordjával, ezt értelmezzük át N és F határán úgy, hogy ettől az akkordtól kezdve a T_2 hangnem szerint értelmezzük és választjuk az akkordokat. Fontos, hogy az enharmonikus hangzattár tagjainak legyen közös hangja, hiszen egyébként nincs valódi változás a két akkord szerepe között, csak annyi a különbség, hogy máshogy nevezzük meg a hangokat (például Fisz-Aisz-Cisz ↔ Gész-Desz-Besz, lásd az 1.6.4 részfejezetben leírtakat). A kromatikus moduláció a legfeltűnőbb, legkevésbé sima hangnembváltástípus, de

³¹Az akkordváltási szerkesztési elveket ilyenkor úgy kell érteni, hogy az átértelmezendő akkordra vezető lépés még az akkord $KT(T_1)$ -beli formája alapján, az akkordról való továbblépés már $KT(T_2)$ -beli formája alapján feleljen meg a klasszikus összhangzattannak. Kottapéldáinkban mindig a célhangnem szerinti formában szerepelnek az akkordok.

mégis a – leggyakrabban a basszusban jelentkező – kromatika gördülékenyen vezet át az új hangnemre. *Kromatikus moduláció* esetén figyelni kell az új hangnem megerősítésére, ilyenkor gyakori, hogy N csak egy akkordból, a kezdő T_1 -beli első fokból áll.

A trichotómia-axióma azért gyenge, mert *a három modulációtípus nem zárja ki egymást páronként*. A diatonikus és az enharmonikus moduláció ritkán valósul meg egyben, mert ha van közös akkord, nincs szükség enharmonikus átértelmezésre. Viszont ha például $T_1, T_2 \in \mathfrak{D}$ és $T_2 - T_1 = \pm D$, akkor T_1 első foka közös akkord, de a modulációba beépíthető valamelyik már ismert elíziós lépés is, ilyenkor a moduláció egyszerre diatonikus és kromatikus (lásd: 37. **kottapélda**). Egyszerre kromatikus és enharmonikus (tercrokonságra épülő) moduláció látható a 42. b) **kottapéldában**. Figyeljük meg a következőt is:

2.3.1. Állítás. *Ha egy modulációra igaz az 5. szerkesztési elv (i) pontja és $\sharp F \leq 3$, akkor a moduláció kromatikus.*

Ezzel a klasszikus összhangzattan axiomatizálását befejeztük, a tonalitás alaptételének igazolását véglegesítettük. Következő célunk, hogy a modulációs szerkesztési elveinkben rögzített és az azokat követő megjegyzésekben részletezett tulajdonságú modulációs összhangzattanpéldákat írjunk, az egyes hangnemek közti modulációs lehetőségeket vázoljuk és a jellegzetes hangnemváltási típusokat, fordulatokat felvillantsuk. Ezt részletesen a Függelék a H fejezetében fogjuk megtenni. Ott megadunk minden dúr hangnemből az összes többi dúrba és minden mollból az összes többi mollba egy-egy a klasszikus összhangzattannak megfelelő *sztemderd hétakkordos modulációt*, és ezzel egyrészt vázoljuk a széles körben használt, kevésbé összetett modulációs lehetőségeket a hangnemek között, másrészt pedig igazoljuk a következő, több mint két évszázada ismeretes tételt (lásd például: [1; p. 235]):

2.3.1. Tétel (A moduláció alaptétele). *Legyen T_1 és T_2 is dúr hangnem vagy mindkettő moll. Ekkor létezik a klasszikus összhangzattannak megfelelő $T_1 \rightarrow T_2$ moduláció, amely hét akkordból áll.*

2.4. Körzeneművek, periodikus zeneművek és kijavíthatóságuk

A zeneirodalomban számos kísérlet ismert *cirkuláris zeneművek* alkotására, az egyik legismertebb William Billings 1794-ben született *The Continental Harmony* című alkotása. Ezek formálisan nem a valós pozitív félegyenesről, hanem az $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ egységkörvonalról képeznek a jóltemperált zongora szólamszámától függő kitevőjű hatványába. Ebben a részben definiáljuk a *szigorú négyszólamú körzeneműveket*. Mivel minden

összefüggő egydimenziós differenciálható sokaság $\mathbb{R}$ -rel vagy S^1 -gyel homeomorf, a körzeneművek leírása után már tetszőleges egydimenziós sokaságon értelmezni tudjuk a szigorú négyszólamú szerkesztést. A körzeneművek kapcsolódnak a könnyűzenében igen népszerű *kváziperiodikus*, vagyis végtelenített, egy idő után egy részletüket periodikusan ismétlő darabokhoz, amelyeket itt szintén tárgyalunk. A legkönnyebben tárgyalható végtelen négyszólamú összhangzattanpéldák bizonyára a (kvázi)periodikusak.

Az algebrai topológia (homotópia-elmélet) eredményei közül felhasználjuk, hogy $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ és hogy az S^1 univerzális fedőtere $\mathbb{R}$ az $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$ sztenderd fedőleképezéssel.

2.4.1. Definíció (Körzenemű). Legyen K jóltemperált zongora, $n \in \mathbb{N}^+$! Az $(\mathbb{R}^2$ altér-topológiája szerint) Borel-mérhető $M : S^1 \rightarrow K^n$ függvényt n -szólamú körzeneműnek nevezzük. Az M négyszólamú körzeneművet szigorú négyszólamú körzeneműnek hívjuk, ha $\exists M' : [0, 1[\rightarrow K^4$ négyszólamú összhangzattanpélda ($B(M) = [0, 1[$), amelyre $\exp \circ M = M'$, azaz a következő diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1[& \xrightarrow{\exp} & S^1 \\ & \searrow M & \downarrow \cong \\ & & K^4 \end{array}$$

Vagyis szemléletesen a körzeneművet egy véges intervallumon értelmezett zenemű kezdő- és végpontjának összeragasztásával kapjuk.

2.4.2. Definíció. Legyen $M : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow K^4$ négyszólamú összhangzattanpélda, amelynek legfeljebb a végpontja göngyölítési pont, $\langle M \rangle = (H_0, H_1, H_2, \dots)$ akkordsorozattal. M periodikus akkordsorozatú zenemű, ha $\exists n \in \mathbb{N}^+$, hogy $\forall k \geq K \ H_{k+n} = H_k$ ³².

M kváziperiodikus akkordsorozatú, ha $\exists K \in \mathbb{N}$, hogy az $\langle M \rangle (H_K, H_{K+1}, \dots)$ szakasza egy periodikus zenemű akkordsorozata.

2.4.3. Definíció. Az $M : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow K^4$ ($B(M) = [0, \infty[$ szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű kváziperiodikus, ha $\exists T > 0, \exists p > 0$, amelyre $\forall t > T, \forall n \in \mathbb{N} : M(t+np) = M(t)$, és a feltételt teljesítő p -k infimuma pozitív.

Ha M kváziperiodikus zenemű, akkor a feltételt teljesítő legkisebb T -t az M periodikus szakasza kezdőpontjának, a feltételt teljesítő p -k infimumát az M periódusának nevezzük. Ha a periodikus szakasz kezdőpontja $\inf \mathcal{D}(M)$, akkor M -et periodikus zeneműnek hívjuk.

³²Itt konkrétan az akkordok négyszólamú alakjainak egyenlőségét követeljük meg, nem csak az akkord-neveket

Nyilvánvaló, hogy a periodikus zeneművek akkordsorozata periodikus, a kváziperiodikusaké pedig kváziperiodikus.

2.4.4. Definíció. Legyen M periodikus zenemű T kezdőponttal és p periódussal ($B(M) = [T, \infty[$)! Ekkor az $M_0(t) = M(T + tp)$ zeneművet az M sztenderdizáltjának nevezzük.

Igen könnyen belátható, hogy ha M periodikus zenemű (tetszőleges nemnegatív kezdőponttal és pozitív periódussal), akkor sztenderdizáltja, M_0 is periodikus, periódusa 1, kezdőpontja 0 és burka $([0, \infty[$). Igen szemléletes kapcsolat áll fent a periodikus zeneművek között. Az állítással kapcsolatban gondoljunk arra, hogy az $\exp$ fedőleképezés t változóban periodikus 1 periódussal.

2.4.1. Állítás. Az $M : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow K^4$ ($B(M) = [0, [$) négyyszólamú összhangzattanpélda periodikus $\Leftrightarrow \exists N : S^1 \rightarrow K^4$ szigorú négyyszólamú körzenemű és $\lambda > 0$, melyre

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [n\lambda, (n+1)\lambda[\quad M(t) = N(\exp(\frac{t - n\lambda}{\lambda})) \quad (3)$$

.

Bizonyítás. $\Leftarrow$ Ha M periodikus zenemű, $\forall t \in [0, 1[\quad N(\exp(t)) := M_0(t)$. Ezzel egyértelműen megadtunk egy N körzeneművet, amely teljesíti az állítás feltételét.

$\Rightarrow$ Tegyük fel, hogy az ekvivalencia jobb oldalán álló feltétel teljesül az M négyyszólamú összhangzattanpéldára és legyen $t \in [n\lambda, (n+1)\lambda[\quad k, n \in \mathbb{N}, t \in [k\lambda, (k+1)\lambda[$. Ekkor

$$M(t + n\lambda) = N(\exp(\frac{t + n\lambda - (k+n)\lambda}{\lambda})) = N(\exp(\frac{t - k\lambda}{\lambda})) = M(t), \quad (4)$$

ahol a (3) azonosságot alkalmaztuk az első egyenlőségnél $(t+n)\lambda \in [(k+n)\lambda, (k+n+1)\lambda[$ -ra, a harmadiknál pedig t -re. $\square$

Hasonlóan a periodikus és kváziperiodikus akkordsorozattal rendelkező zeneművek is kapcsolódnak a körzeneművekhez. Ezt a viszonyt itt nem kívánjuk formálisan kidolgozni, csak szemléletesen bemutatni. Az $S^1 \exp$ általi fedését $[0, \infty[$ -ra megszorítva kapott függvényt úgy is felfoghatjuk, hogy a $t = 0$ időponttól kezdve végig pozitív forgásirányba haladva, *egyenletes sebességgel* végigmegyünk az egységkörvonalon, amelynek minden pontjához előzetesen hozzárendeltünk egy akkordot egy szigorú négyyszólamú körzenemű szerint, és minden egyes időpillanatban megszólaltatjuk a kör adott pontjához tartozó hangzatot, egy teljes fordulat pedig mindig egy másodpercig tart. Egy periodikus akkordsorozatú zeneműnél ugyanezt tesszük azzal a különbséggel, hogy a kör bejárásának sebessége nem feltétlenül egyenletes. Így a létrejövő zenemű időben nem feltétlenül periodikus, de akkordsorozata igen, hiszen ugyanazon körzenemű akkordjait ismételtetjük. Ha

a végtelen sok fordulathoz szükséges összidő véges (azaz a fordulatok hosszai összegezhetőek), akkor a zenemű véges időn belül befejeződik és végpontja göngyölítési pont lesz. Előfordulhat az is, hogy a körbejárás végtelen sokáig tart, de az akkordhosszak infimuma 0. Ha a körzeneművel a 2.4.1 definíció szerint kommutatáló $[0, 1[\rightarrow K^4$ négyszólamú összhangzattanpéldának nincs göngyölítési pontja és a körön való körbehataladási sebesség nagysága (mint az $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ körbejárófüggvény $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ értelemben vett deriváltjának normája – tetszőleges normában, hiszen véges dimenzióban minden norma ekvivalens) korlátos, akkor biztos, hogy a kapott zenemű akkordhosszainak infimuma pozitív, vagyis bármely időpontban megállítva a körbehataladást megvalósítható zeneművet kapunk.

Definícióink alapján kimondhatjuk a kijavíthatóság szükséges és elégséges feltételét a kváziperiodikus akkordsorozatú tonális zeneművekre. Az állítás a modulációk témaköréhez kapcsolódik, bizonyítása pedig – miután bevezettük a hangnemváltási szerkesztési elveket – következik a tonalitás alaptételével kapcsolatban meggondoltakból.

2.4.1. Tétel (Kváziperiodikus zenemű kijavíthatósága). *Legyen M szünetmentes kváziperiodikus zenemű. M pontosan akkor kijavítható, ha tonális, akkordhosszainak infimuma pozitív és csak véges sok modulációt tartalmaz.*

Az eredmények összegzése

Az axiomatizálási munka eredményei

Amint a dolgozat során többször hangsúlyoztuk, fő célunk a klasszikus összhangzattan több mint kétszáz éve ismert és részletkérdésektől tekintve elfogadott szabályrendszerének logikai rendezése, struktúrájának bemutatása és az egyes szerkesztési elvek lehető legnagyobb általánosítása volt. Bár a tényleges összhangzattanpélda-írás menetét a szigorú négyszólamú szerkesztést ismerő zenészek számára az *akkordváltási szerkesztési elvek* határozzák meg, amelyek hagyományos formájukban is szinte matematikai pontosságúak, mégsem ezekre épül az itt vázolt axiómarendszer. Az alapvető zeneelméleti fogalmak bevezetése után a struktúrát a *kijavíthatóság definíciója* – illetve ami ezzel ekvivalens: a tonalitás alaptétele – alapozza meg. Újabb zenemű-szerkezeti jellegű szükséges feltételeket szabnak a négyszólamú összhangzattanpéldák klasszikus összhangzattanának való megfelelésére a *modulációs szerkesztési elvek*. A klasszikus összhangzattan ezen szabályait úgy adtuk meg, hogy ha nincs köztük ellentmondás, akkor egymáshoz képest szintén ellentmondásmentes akkordváltási szerkesztési elvekkel nem lehet ezt a konzisztenciát megbontani. A kijavíthatóság definíciójának tulajdonságaiból pedig következik, hogy *ha az ebben a dolgozatban megadott axiómák rendszere konzisztens, akkor teljes is*. Természe-

tesen egy négyszólamú összhangzattanpélda kijavíthatóságát vagy tonalitását nem feltétlenül vagyunk képesek ellenőrizni – véges akkordsorozatú vagy egyéb okból jól kezelhető (pl. kváziperiodikus akkordsorozatú vagy egy adott ponttól kezdve egyetlen hangnem konvergenciatartományában mozgó) művek esetében igen. Ez igaz lesz akkor is, ha bizonyos akkordváltási szerkesztési elveket elhagyunk a rendszerből vagy hozzáveszünk. Ezért tekinthetjük befejezettnek elméleti szempontból az axiomatizálást anélkül, hogy aprólékosabban, sok ritka, különleges esettel is foglalkozva kidolgoztuk volna az akkordváltási szabályokat, például hogy a legkisebb mozgás elvét legalább bizonyos szólamok, hangszerek, fekvéstípusok esetén részleteztük volna. És az axiómarendszer felépítésének ezen tulajdonsága verifikálja azt is, hogy a matematikai pontossággal kimondott akkordváltási szerkesztési elveinket a hozzájuk tartozó kottapéldákkal együtt a Függelékbe helyeztük, az alterált akkordok tárgyalását pedig igen rövidre szabtuk. Ugyanakkor reméljük, hogy a kottapéldák és a formalizált szabályokhoz fűzött magyarázatok segítséget nyújtanak az Olvasónak abban, hogy kivételesebb esetekben is képes legyen elbírálni, hogy egy akkordváltás vagy szólamvezetés megfelel-e *a klasszikus összhangzattan szemléletének*.

A matematikai eredmények értékelése

Matematika BSc szakdolgozatról lévén szó – amelyet egy matematikus közönségnek szóló TDK-dolgozatból kiindulva, annak átdolgozásával és folytatásával készítettünk, befejezve az ott megkezdett axiomatizálási munkát – nagyobb súlyt fektettünk a matematikai fogalom- és modellalkotásra valamint a lehetséges általánosítások kidolgozására, mint a csak zeneelméleti szempontból szükséges részletekre. Utóbbiak egy részét – különösen az első fejezetben az alapfogalmakat – is precízen meg kellett adnunk ahhoz, hogy felépíthessük a klasszikus összhangzattan szerkesztési elveinek rendszerét, az axiomatizálás fő csapásirányától eltérítő részleteket viszont csak tömören fogalmaztuk meg és egy jelentős részüket a Függelékbe helyeztük. Ezen dolgozattal – amint a Bevezetésben már említettük – szeretnénk logikai megalapozást és strukturális segítséget adni egy új magyar középiskolai összhangzattan-tankönyv megalapozásához, ebben a tankönyvben sokkal hangsúlyosabbak lesznek az itt háttérbe szorult zeneesztétikai megfontolások és a zeneirodalmon alapuló gyakorlati összhangzattanpélda- és korálírási tanácsok. És persze középiskolás növendékek számára az itteni mértékű matematikai formalizálás nem befogadható és tanulmányaik szempontjából nem is szükséges.

Zeneelméleti szempontból talán a legfontosabb új eredménye a dolgozatnak – amely ugyanakkor a legszegényesebb matematikai eszköztárt használó részfejezetben szerepel – a hangnemek trichotómiája. Az itt bevezetett pikárdiai terces moll hangnem akkordjainak

konvergenciájára és használatára a másik két hangnemtípus, a dúr és a moll működése alapján következtettünk. Következtetéseink igazolásához – mivel a zeneirodalomra kevésbé támaszkodhattunk és kíváncsiak voltunk jelenlegi összhangzattan-tanuló középiskolások véleményére is – a matematikai statisztika eszköztárát, a Wald-Wolfowitz-tételen alapuló szekvenciális próbát alkalmaztunk.

Ez az egyetlen fejezet, ahol valószínűség-számítási megfontolásokat alkalmaztunk, bár távlati céljaink között szerepel négyszólamú korálok írásának kísérlete Markov-láncok segítségével, újragondolva a [5] munkában alkalmazott módszereket. Matematikai szempontból a dolgozatban egyrészt végig jelen vannak az axiomatizáláshoz nélkülözhetetlen logikai megfontolások, másrészt viszont a munka nagy része a topológia témaköréhez tartozik. A valós pozitív félegyenesről a diszkrét jóltemperált zongorába képező függvényekként értelmezzük a szigorú négyszólamú szerkesztésű zeneműveket. A legkomolyabb bizonyítás a dolgozatban a tonalitás alaptételéé, ennek nehezebb iránya (a feltétel szükségessége a tonalitáshoz) a Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle kritériumának bizonyítására emlékeztető, tisztán topológiai alapú érvelés. Maga az állítás a klasszikus összhangzattan szemlélete alapján nyilvánvalóan igaz, de a matematikai formalizálás nélkül nem is tudnánk megfogalmazni, így mégis újdonságot jelent. Számos, az élőzenéhez is kapcsolódó általánosításra (pl. periodikus zeneművek tárgyalása, göngyölítési pont létezése) adott lehetőséget a szigorú négyszólamú szerkesztés topologikus tárgyalása, amely lényegesen általánosabb a megvalósítható modellnél. Ezenkívül a topologikus leírás adott lehetőséget arra is, hogy a klasszikus összhangzattan négyszólamú modelljéhez legközelebb álló élőzenei műfajra, a Bach-korálra olyan matematikai pontosságú definíciót adjunk meg, amely a műfaj képviselőinek jó részét leírja.

A modulációk – különösen a legegyszerűbbek: a sztenderd hétakkordosak – tárgyalását azonban már indokolatlanul elbonyolította volna, ha a négy összhangzattanpéldák topologikus modelljét használjuk, így itt egyszerűsítettük a leírást az azonos akkordosozatú zeneművek azonosításával. További könnyebbséget jelentett a hangnemváltások jellemzésénél a modulációs félcsoporthoz a bevezetése, ezzel a kvintkörben azonos viszonyú hangnempárokat azonosítottuk. Így már kevesebb technikai nehézséggel járt a modulációs szerkesztési elvek kimondása és a moduláció alaptételének – amely a tonalitás alaptételével ellentétben nem a mi új eredményünk, hanem a klasszicizmus kora óta ismert zeneelméleti eredmény, amely csaknem közvetlenül származtatható a jóltemperált zongora konstrukciójából – igazolása. Végül a kör- és periodikus zeneművek tárgyalásánál ismét érdemes volt visszatérnünk a topologikus leíráshoz, ezzel végeredményben tetszőleges egydimenziós differenciálható sokaságon ismertetve a szigorú négyszólamú szerkesztést.

Hivatkozások

- [1] Dave Benson: *Music: A Mathematical Offering*, University of Aberdeen, 2008. Elérhető a <http://homepages.abdn.ac.uk/mth192/pages/html/music.pdf> honlapon.
- [2] Ligeti György: *Döntés és automatizmus Pierre Boulez Structure 1a című művében*, 1957, fordította: Kerékfy Márton. In: Ligeti György válogatott írásai, Rózsavölgyi és Társa Kiadó, Budapest, 2010.
- [3] Keszler Lőrinc: *Összhangzattan*, középiskolai tankönyv. Editio Musica Budapest, 1952.
- [4] Dmitrij Tymoczko: *The Geometry of Musical Chords*, in: Science 313, 72 (2006).
- [5] Christopher A. Thorpe: *C.P.U. Bach: Using Markov Models for Chorale Harmonization*, Harvard College, Cambridge, Massachusetts, 1998.
- [6] Johann Sebastian Bach: *Vierstimmige Choralgesänge*, szerk. Sulyok Imre, Editio Musica Budapest, 1982.
- [7] Bolla Marianna – Krámlí András: *Statisztikai következtetések elmélete*, Typotex Kiadó, 2005.

Függelék

A. Hangközök elnevezése a jóltemperált zongorán

Ha egy hétfokú skálában két skála- vagy valahányszorosan módosított, egymástól legfeljebb 14 félhang távolságra lévő hang között az alacsonyabbnál a magasabb $(\text{mod } 7)$ k fokkal van feljebb, akkor a köztük lévő hangköz neve:

1. ha $k = 0$ és a két hang 2 félhangnál közelebb van egymáshoz: prím. Ha a hangköz 0 félhanggal enharmonikus: tiszta prím (T1), ha 1-gyel: bővített prím (B1),
2. ha $k = 1$: szekund. Ha a hangköz 1 félhanggal enharmonikus: kis szekund (K2), ha 2-vel: nagy szekund (N2), ha 3-mal: bővített szekund (B2),
3. ha $k = 2$: terc. Ha a hangköz 2 félhanggal enharmonikus: szűkített terc (SZ3), ha 3-mal: kis terc (K3), ha 4-gyel: nagy terc (N3),
4. ha $k = 3$: kvart. Ha a hangköz 4 félhanggal enharmonikus: szűkített kvart (SZ4), ha 5-tel: tiszta kvart (T4), ha 6-tal: bővített kvart (B4),
5. ha $k = 4$: kvint. Ha a hangköz 6 félhanggal enharmonikus: szűkített kvint (SZ5), ha 7-tel: tiszta kvint (T5), ha 8-cal: bővített kvint (B5),
6. ha $k = 5$: szext. Ha a hangköz 8 félhanggal enharmonikus: kis szext (K6), ha 9-cel: nagy szext (N6), ha 10-zel: bővített szext (B6),
7. ha $k = 6$: szeptim. Ha a hangköz 9 félhanggal enharmonikus: szűkített szeptim (SZ7), ha 10-zel: kis szeptim (K7), ha 11-gyel: nagy szeptim (N7),
8. ha $k = 0$ és a két hang 2 félhangnál messzebb van egymástól: oktáv. Ha a hangköz 11 félhanggal enharmonikus: szűkített oktáv (SZ8), ha 12-vel: tiszta oktáv (T8), ha 13-mal: bővített oktáv (B8).

Ábra: C). Ha $k = 1$ és a hangköz 1 és 2 oktáv közé esik, akkor a hangköz neve nóna. Amilyen típusú szekundot kapunk a nónából egy tiszta oktávot levonva, úgy nevezzük a nónát is ($\rightarrow$ kis nóna (K9), nagy nóna (N9), bővített nóna (B9)). Hasonlóan ha $k = 2$ és a hangköz 1 és 2 oktáv közé esik, akkor a hangköz neve decima, a decimából egy oktávot levonva tercet kapunk, ennek típusa a decima típusa (szűkített (SZ10), kis (K10) és nagy decima (N10)). A latin sorszámnevek sorozatát (undecima, duodecima ...) folytatva teljes indukcióval minden zongorahangközt el tudunk nevezni. A hangköz típusát mindig úgy

kapjuk, hogy levonjuk a hangközből a lehető legtöbb tiszta oktávot, amelyet tartalmaz, és a megmaradó 0–11 félhangnyi hangköz típusa (a fokszámkülönbség alapján, tiszta, kis, nagy, szűkített vagy bővített) lesz a vizsgált nagyobb hangköz típusa.

A.1. Állítás. *Az 1.1.1 fejezetben definiált hangköznevezések (tiszta prím, oktáv, kvint és kvart, kis és nagy terc) enharmonikusság erejéig megfelelnek az itt megadott hangköznevezéseknek.*

A.1. *Megjegyzés.* A 6 félhangnyi, azaz fél oktávnyi hangközt, akár bővített kvart, akár szűkített kvint, tritonusznak (vö. 3 egész hang) nevezzük.

Különösen akkor használjuk a tritonusz kifejezést, ha kontextuson, hétfokú skálán kívül kerül szóba a 6 félhangnyi hangköz.

B. A négyszólamú korálok topologikus definíciója

B.1. Definíció. A $\mathfrak{K}$ négyszólamú zeneművet négyszólamú korálnak nevezzük, ha létezik olyan M véges minimális akkordhosszú, ívhosszparaméterezésű, kompakt tartójú³³ szigorú négyszólamú szerkesztésű, szünetmentes ($\mathcal{D}(M) = B(M)$) zenemű, melyre $\forall x \in \mathcal{D}(M)$ -re az x tartományának hossza az identikus lejátszás szerint egy fix c érték, és

(1) $\mathfrak{K}$ előáll M -ből a következő lépések (az ún. figurációk) alkalmazásával. Az alkalmazás véges sok $x \in \text{Dom } M$ -re történik úgy, hogy az egymást kizáróakat ugyanazon x -re nem végezzük el.

Figurációk:

- i) **Késleltetés:** $M(x)$ tartományát az identikus lejátszás szerint megfelezzük, a másodikban $M(x)$ hangzik ($\forall y : \mathfrak{K}(y) = M(x)$), az elsőben viszont egy vagy két szólamban nála egy szekunddal magasabb hang, amely az M előző akkordjában szólt ebben a szólamban, a többi szólamban $M(x)$ megfelelő hangja.
- ii) **Előlegzés:** $M(x)$ tartományát az identikus lejátszás szerint két egyenlő részre osztjuk, az elsőben $M(x)$ hangzik, a másodikban viszont pontosan egy szólamban az a hang, amely M következő akkordjában szól majd ebben a szólamban, és a szólam előző hangjától egy szekundra van, a többi szólamban $M(x)$ megfelelő hangja szól.
- iii) **Átmenőhang:** tegyük fel, hogy $M(x)$ és az M utána következő akkordja között valamely szólamban terc távolság van — például az i . szólamba; több ilyen szólam

³³Értsd: $\overline{\mathcal{D}(M)}$ kompakt.

is lehet. Azt mondjuk, hogy átmenőhangot rakunk az i . szólamba, ha $M(x)$ tartományát megfelezzük, az első részen $\mathfrak{R}(y) = M(x)$, a másodikban viszont $pr_i \circ \mathfrak{R}(z)$ egy szekundra van $M(x)$ -től abba az irányba, amerre a következő akkord i . szólam-beli hangjához a terclépés vezet. Azokban a j . szólamokban, ahová nem rakható átmenőhang, $pr_j \circ \mathfrak{R}(z) = M(x)$ a második fél intervallum minden z pontjára.

iv) **Akkordduplikálás:** az $M(x)$ intervallumát megfelezzük, az első felén $M(x)$ szól, a második felén pedig egy másik hármas-vagy négyeshangzat.

(2) A kapott zeneművet egy olyan Θ lejátszással tekintjük, amely az identikustól annyiban tér el, hogy $\exists m \in \mathbb{N}$, melyre az M minden m . akkordjához tartozó intervallumot Θ a k -szorosára nyújtja, ahol $k \in]1, 2[$ konvencionálisan elfogadott szorzótényező. Ekkor azt mondjuk, hogy minden m . akkordon a korálban **korona** van³⁴.

C. A dūr és moll hangnemek bizonytalan funkciójú, skálahangokból felépülő akkordjai

1. A III. fokú alaphelyzetű hármashangzat dūrban (dūr hangnemben) átmenet a tonikai és szubdomináns funkció között: mivel moll akkord, elég stabil, de tartalmazza a hangnem vezetőhangját. Önmagában gyenge domináns, főleg mivel két hangját is tartalmazza a tonikai főhármashangzatnak. Ha dominánsként oldódik, akkor leginkább VI. fokra (autentikus lépéssel). Viszont a domináns főhármashangzatnak is két hangját tartalmazza. Szextfordítása már erősebb domináns érzetet kelt, ezt szokták alkalmazni diszsonáns szubdominánsok és az V. fok közé közbeiktatva.

Diszsonáns szubdominánsok V. fokra vezetésére mindenfajta hangnemben használhatjuk az I_4^6 -et. Ez meglepő lehet: hogyan válik a tonikai főhármashangzat egyik fordítása domináns funkciójúvá, kötelezően a domináns főhármashangzatra vagy az abból származó öt-szeptimre vezető akkorddá? A kérdés megválaszolásához először tegyük fel a kérdést fordítva: honnan származik eredetileg az I. foknak ez a fordítása, amely domináns hangzású és kötelezően V. fokra vezet? A zenetörténeti magyarázat az, hogy az V. fokú hármashangzat a késleltetését, amikor a terchang késik a felső váltóhangjáról³⁵, a barokkban előszeretettel használták (például Bach is a koráljaiban), majd a korszak végén elkezdték úgy használni, hogy a kvinthang is készen, így

³⁴A lehető legegyszerűbb módon igyekeztünk definiálni a korált a szigorú négyszólamú szerkesztésből, de persze a korálszerzők a gyakorlatban jellemzően nem úgy dolgoznak, hogy egy összhangzattanpéldát írnak, majd a lehetséges helyen ellátják figurációkkal.

³⁵A késleltetett akkord hangjai V., I., II., V. fokúak, azaz szó-dó-ré-szó szolmizációjúak.

viszont a késleltetett akkord éppen az egy-kvartszext lett, amely stabil, konszonáns hangzásával a bécsi klasszicizmusban már önálló (korál formájú négyszólamú zeneműben egész hangot elfoglaló), kötelezően az V. fokra vezető hármashangzatként is megállja a helyét. A legtöbb szubdomináns akkord, köztük – amint az 1.7 fejezetben láthatjuk – igen disszonáns alterált akkordok is, továbbvezethető az I_4^6 -en keresztül az V. fokú hármashangzatra vagy szeptimre. Van azonban erre is ellenpélda, amely a D fejezet alapján nyilvánvaló: a terckettőzött négy-szext után nem következhet egy-kvartszext, mert ennél a lépésnél nem elkerülhető az oktávpárhuzam. A leggyakoribb I_4^6 -ot tartalmazó akkordmenet minden hangnemben az $I \rightarrow IV \rightarrow I_4^6 \rightarrow V \rightarrow I$ teljes autentikus zárlat.

2. Mollban az a különbség ehhez képest, hogy a III. fok bő hármashangzat, így erősen disszonáns, vonzódik az I. fokhoz úgy is, hogy két hangjuk közös. Nem esünk akkor sem komoly hibába, ha tisztán domináns funkciójúnak tekintjük a moll III. fokot. A III^6 itt is lehet V. fokra átvezető akkord, de mivel önmagában is disszonáns, óvatosan kell vele bánni a szubdominánsról való átvezetésnél!
3. Dúrban a VI. fok mollhármás, miközben mindhárom főhármás dúr. Így ez az akkord csak színesíti a hangnemet, kevésbé erős és kemény hatású, mint azok, stabil tonikai funkciójú, de nem ad befejezettségérzetet. Gyakran vezet II. fokra (autentikus lépés!) és ennek analógiájára IV.-re is. Általában dúr és moll hangnemben is az V-VI. lépést *álzárlatnak* nevezzük, mivel gyakran használják meglepő fordulatként: ahelyett, hogy egy V-I. lépéssel befejeződne a darab, VI. fok jön, ami után még folytatódnia kell a zenének.
4. Mollban viszont a VI. fok dúrhármás, miközben a főhármások közül csak a domináns dúr (és az is csak a módosított vezetőhang miatt), a többi moll. Emiatt bár van tonikai jellege a VI. foknak és álzárlatot is lehet a segítségével írni mollban is, bizonyos helyzetekben szubdomináns hatást kelthet.
5. A skálahangokból felépülő (ún. diatonikus) szeptimakkordok funkciós tulajdonságai a következők. Az I. fokú szeptimakkord, annak ellenére, hogy tartalmazza a hangnem vezetőhangját, mégis szubdomináns felé vezet: hamarosan látjuk, hogy a szeptimhang lefelé való vonzódása erősebb, mint a vezetőhang felfelé tartása. Mollban rendkívül disszonáns az I. fokú szeptim, így nem gyakran használják. A II. fokú szeptimakkord – dúrban mollszeptim, mollban³⁶ „felsőűk” (lásd a szeptimakkordok

³⁶Pikárdiai I. fok esetén is!

táblázatát!) – erős szubdomináns, minden fordításban gyakran használják, például Bach koráljai záró részében a II_5^6 és nem a IV a szubdomináns. A III. fokú szeptim dúrban mollszeptim, ez gyengén vonzódik a hangnemben szintén nem meghatározó szerepű VI. fokra – ezt is csak ritkán használják. Mollban a III. fokú hármashoz hasonlóan disszonáns, erős domináns a $\text{III}_{5\sharp}^7$ is, de használata nem túl gyakori. A IV. fokú szeptimet sem dúrban, sem mollban nem tudjuk skálahangra oldani, hiszen a VII. fok szűkített, és alapja nincs tiszta kvintre a négy-szeptim alapjától, így ezen szeptimet alig tudjuk használni a hangnemen belül maradva. Az V. fokú szeptimről láttuk, hogy a legfontosabb dominánsok közé tartozik minden hangnemben. A VI. fokú szeptimről dúrban hasonló mondható el, mint a III. fokúról: ritkán használatos, a II. fokra vonzódik. Mollban nem tudjuk a hangnemen belül oldani, ezért csak hangnemváltásra, modulációra használható. A VII. fokú szeptim mollban igen erős domináns, dúrban ennek analógiájára alkottuk meg a hét-szűkszeptimet, a dúr hangnemben a „félszűk” VII^7 önmagában csak gyenge domináns, mollos hatást kelt, nem hangzik kiváltó akkordnak.

D. A klasszikus összhangzattan akkordváltási szerkesztési elvei

Ebben a fejezetben nem érdemes a matematikai formalizálást túlzásba vinni. Egy esztétikai szabályrendszert akarunk leírni, és bár a szabályrendszer szigorú és preskriptív, egy adott akkordváltás vagy szólamvezetés elfogadásának vagy elutasításának kérdésénél sokszor nem logikailag pontosan leírható szabályok, hanem a zeneirodalmi gyakorlat és esztétikai szempontok alapján döntünk. Az is fontos szerepet játszik az akkordváltások elbírálásánál is, hogy milyen jellegű összhangzattanpélda-írásról van szó: megadott akkordsorozatot akarunk felépíteni a szerkesztési elveknek megfelelően, megadott basszust vagy szopránt harmonizálunk, esetleg a szigorú négyszólamú szerkesztéshez közel álló létező zenemű egyes lépéseinek helyességét akarjuk az akkordok alapján elbírálni. Különösen igaz ez a legkisebb mozgás elvével kapcsolatos döntésekre.

Általában a *lépés* az összhangzattani szóhasználatban két különböző dolgot is jelent. Egyrészt ha azt mondjuk, hogy *valamely szólam lép*(ésszerűen mozog) egy adott akkordváltási pontban, az azt jelenti, hogy az akkordváltásnál következő hang egy szekundra van az előzőtől. Másrészt ha H és G egymás után következő hármas- illetve négyeshangzatnevei egy négyszólamú összhangzattanpéldáknak, akkor szokás $H \rightarrow G$ lépésről beszélni, ahogy $H \rightarrow G$ akkordváltási pontról is. Azt mondjuk, hogy egy adott szólamban a kö-

zős hangot megtartjuk egy adott t akkordváltási pontban, ha a pont előtti akkord azonos fokszámú az utána következővel *a zenemű lejegyzéséhez használt T hangnem szerint*. A szerkesztési elvek betartásának gyakorlatát néhány (természetesen nem moduláló, hanem végig egy adott dúr vagy moll hangnemben lévő) példával is illusztráljuk, amelyek azt is mutatják, hogy leírt elméletünknek létezik modellje (vagy legalábbis itt nem találtunk az elméletben inkonzisztenciát). Az 1.7 részfejezet kapcsán következnek a még mindig nem moduláló, de alterált akkordokat az itt következőknél bátrabban és célirányosabban használó kottapéldák, végül a második fejezet alapján a modulációkat modellezők.

6. Szerkesztési elv (Szeptimhang-axióma). Legyen H olyan szeptimakkord, G pedig olyan hármashang- vagy négyeshangzat, amely szerepel egy adott T hangnem konvergenciatartományában, t pedig a a tonalitás alaptétele feltételét teljesítő M négyszólamú összhangzattanpélda egy $H \rightarrow G$ akkordváltási pontja.

Ha M t -ben megfelel a klasszikus összhangzattanának, akkor G és a szólamvezetés olyan, hogy M H szeptimhangját tartalmazó szólama lépésszerűen lefelé mozog vagy megtartja a közös hangot. Ez a szabály minden más, erre a szólamra vonatkozó szerkesztési elvet – így például a most következő vezetőhang-axiómát is – felülír.

7. Szerkesztési elv (Vezetőhang-axióma). Legyen t a a tonalitás alaptétele feltételét teljesítő M négyszólamú összhangzattanpélda egy $H \rightarrow G$ akkordváltási pontja. Tegyük fel, hogy $\exists T$ hangnem, amelyre $H, G \in KT(T)$, H tartalmazza T vezetőhangját és a következő három akkordnak legalább az egyike domináns funkciójú T -ben: *a)* H , *b)* a H alaphelyetű fordításával megegyező basszusú domináns szeptim, *c)* a H alaphelyzetű fordításával megegyező basszusú szűkített szeptim. Ekkor a következők teljesülnek:

- (i) H pontosan egy szólamban tartalmazza ezt a vezetőhangot.
- (ii) Ha ez a szólam a szoprán, akkor az lépésszerűen felfelé mozog t -ben vagy megtartja a közös hangot.
- (iii) Tegyük fel, hogy t -ben van hangnem, T_0 . (Ekkor szükségképpen $H, G \in KT(T_0)$. Ekkor ha T vezetőhangja a T_0 módosított hangja, akkor ez bármely szólamban van, ez a szólam t -ben lépésszerűen mozog vagy megtartja a közös hangot. Ha H dominánsa G -nek (azaz G dúr vagy moll hármashangzat és ezt H kiváltja), akkor lehetőség van arra is, hogy a vezetőhangot tartalmazó szólam egy kis vagy nagy tercet ugorjon lefelé t -ben, ha ez a szólam nem a szoprán.

8. Szerkesztési elv (Lefelé módosított hang vezetésének axiómája.). Legyen t a tonalitás alaptételének feltételét teljesítő M négyszólamú összhangzattanpélda egy $H \rightarrow G$

akkordváltási pontja, melyben a hangnem T_0 . Ha H egyik szólama tartalmazza T_0 egy (egyszeresen) lefelé módosított hangját, akkor G -ben a T_0 skálája szerint ugyanebben a szólamban ugyanilyen fokú vagy egy fokkal lejjebbi hang szerepel.

Bár azt mondtuk, hogy csak a domináns szeptim és a szűkített szeptim rendelkeznek a kiváltó (domináns) tulajdonsággal, a szeptimhang-axióma mégis domináns szerepet ad a többi szeptimakkordnak is. Például a C-dúr hangnemben tekintjük a „félszűk” VII. fokú diatonikus szeptimet, azt pontosan ugyanúgy kell III. fokra vezetni, mint a valóban domináns hét-szűkszeptimet (VII^{7b}):

Kottapélda a két akkord azonos vezetési módjáról: 1a, 1b, 1c.

1a) $I^5 II VII^{7b} I$ 1b) $I^3 II VII^7 I$ 1c) $I^8 II VII^{7b} I$

Vagy szintén C-dúrban: a váltódomináns szeptim (II_4^7), azaz a domináns G-dúr hangnem domináns szeptime, amely a C-dúr hangnemhez képest módosított (fi szolmizációjú) vezetőhangot is tartalmaz, így nagyon erősen vezet az V. fokra. A szeptimhang- és a vezetőhang-axióma miatt ezzel az akkorddal pontosan megegyező módon kell az V. fokra vezetni a a diatonikus kettő-szeptimet, amely egy módosított hang nélküli mollszeptim, tehát a felhangrendszer alapján lényegesen gyengébben vonzódik a domináns főhármas-hangzathoz.

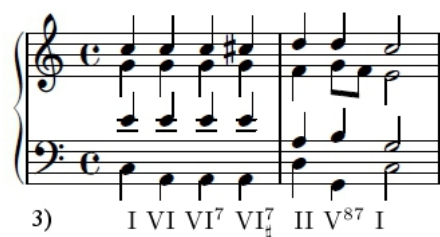
Kottapélda a két akkord azonos vezetési módjáról: 2a, 2b. A 2b) példa utolsó akkordváltásánál megfigyelhetjük a nem szopránbeli vezetőhang lefele való, szabályszerű tercugrását az I. fok kvintjére. Bach koráljainak záró kadenciáiban igen gyakoriak az ilyen ugrások az $V^{(7)} \rightarrow I$ lépéseknél, sőt alkalmanként mellékdomináns szeptimek oldódásánál is. Vegyük észre, hogy a 7. szerkesztési elv (*iii*) pontjában éppen a mellékdomináns akkordok nem szopránbeli vezetőhangjának lefelé való tercugrását engedjük meg.

2a) $I^8 II II_4^7 V I$ 2b) $I^3 II_5^6 I_4^6 V^7 I$

Leggyakrabban akkor tartjuk meg közös hangként a szeptimhangot, ha egy szeptimakkord nem egyből oldódik a neki – a szeptim- és vezetőhang-axióma szerint – megfelelő

hármashangzatra, hanem először a nála erősebb, módosított hangot tartalmazó mellékdomináns változata szólal meg és azt vezetjük tovább, ugyanoda, ahova már a gyengébb szeptimakkord is vezet. (Ennél persze sokkal összetettebb példák is vannak a szeptimhang megtartására és az utána következő fordulatokra.)

Kottapélda: 3.; a II. fokú mollhármásra vezet már a diatonikus hat-szeptim is, de ez mellékdomináns ($VI_{\sharp}^7$) szeptimre módosítva még erősebben vonzódik a II. fokhoz. A $VI^7 \rightarrow VI_{\sharp}^7$ váltásnál egyedül a domináns szeptim módosított vezetőhangját tartalmazó szólam mozog. Igen gyakori mind Bachnál, mind a klasszikában az V^{87} módon jelölt *átmenő-szeptim*, amely topológiai szempontból tekinthető egy négyszólamú korálokra jellemző átmenőhang-mozgásnak vagy akár egy négyszólamú összhangzattanpélda olyan akkordváltásának, ahol nem mindegyik szólam szólaltat meg ténylegesen új hangot. Természetesen az átmenő-szeptim szeptimhangjára is érvényes a szeptimhang-axióma. Bach koráljaiban igen gyakran szerepel az előbb látott (nem szopránbeli) szeptimhang-leugratás a művet záró $V \rightarrow I$ lépésnél, különösen ha az V. fokon átmenő-szeptim van, lásd például az e fejezet végén látható 10b) példa utolsó akkordváltását!



A szeptimhang-axióma erősebb a vezetőhang-axiómánál is, így például az I. fokú diatonikus szeptimakkord szeptimhangját is mindig lépésszerűen lefelé kell vinni:

Kottapélda: 4.



Hangzásra is igen könnyen felismerhető a szeptimakkordok szekundfordítása. Az V. fokú szekunda szeptimhang-axióma miatt minden hangnemben I^6 akkordra oldódik, alap-helyzetű I. fokra nem mehet tovább.

Kottapélda: 5.



Következnek az oktáv- és kvintpárhuzamra vonatkozó tilalmak. A klasszikus összhangzattan esztétikai axiómarendszere a párhuzamokat tehát nem rútnak vagy ördögtől valónak titulálja, hanem a *független szólamvezetés* megtartása érdekében veti el, kapcsolódva ahhoz az elvhez, hogy négyszólamú korálnak mind a négy szólama önálló, önmagában is értelmes dallam legyen – annak ellenére, hogy a figurációkat leszámítva minden pontban hármashangzatot vagy szeptimakkordot kell alkotniuk, ami nagy mértékben csökkenti a szólamok önállóságát. Ha két szólam között oktáv- vagy kvintpárhuzam van, az a klasszika szemlélete szerint olyan, mintha csak egy szólamot hallanánk. Ezen dolgozat keretén kívül, a feloldozhatóság témakörében megkísérlem majd matematikai eszközökkel értelmezni, hogy mit is jelenthet pontosan a szólamfüggetlenség.

9. Szerkesztési elv (Oktáv- és kvintpárhuzamok kerülése.). Legyen t a tonalitás alaptétele feltételét teljesítő M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű egy $H \rightarrow G$ akkordváltási pontja. Ha M t -ben megfelel a klasszikus összhangzattannak és a t -beli lekottázásra használt T hangnemben H két szólama (vagy-vagy-vagy)

- (i) (egész számú oktáv plusz) egy tiszta kvintre van egymástól,
- (ii) egész oktávra van egymástól, azaz foksámuk megegyezik és legalább 10 félhang a távolságuk,
- (iii) hangja megegyezik³⁷,

és nem teljesül, hogy G -nek ezen mindkét szólamában ugyanaz a hangja, mint H -nak, akkor G ugyanezen két szólama nem rendelkezik ugyanezzel az adott tulajdonsággal.

A párhuzamok tilalma miatt szomszédos fokú főhármashangzatok vagy szextakkordok között *ellenmozgást* használunk: példánkban dúr $IV \rightarrow V$ váltást tekintünk, itt a basszus fölfelé lép, minden további szólam lefelé mozog és így kerüljük el a párhuzamokat.

Kottapéldák az ellenmozgásról a szomszédos fokok között: 1a, 1b, 1c, 4.

Ha a vezetőhang a szopránban van az $V^7 \rightarrow I$ lépésnél, akkor ezt fölfelé kell léptetni az I. fok alapjára, a basszushang szintén erre az alaphangra lép, a szeptimhang lelép az I. fok

³⁷Azaz a tiszta prímpárhuzamot is kerülni kell.

tercére, az V^7 kvinthangja pedig nem léphet az I. fok kvintjére, mert akkor kvintpárhuzamba kerülne a basszussal. Ilyenkor a klasszikus összhangzattan hivatalosan *megengedi a kvinthiányos, 3 db alaphangot és egy terchangot tartalmazó I. fokú hármashangzat alkalmazását*, de ebben az esetben célszerűbb a teljes V^7 helyett hiányosat vagy V. fokú hármashangzatot alkalmazni, így az I. fokú akkord teljes lehet.

Wolfgang Amadeus Mozart-kvintpárhuzamnak (WAM5) a $SZ5 \rightarrow T5$ típusú kvintpárhuzamot nevezzük. Nagyon jó hangzású és jóval kevésbé veszélyezteti a szólamfüggetlenséget, mint a $T5 \rightarrow T5$ típusú kvintpárhuzamok, hiszen a kvintpárhuzamban mozgó két szólam közötti hangköz *nagysága* a lépés során megváltozik, csak a neve nem ³⁸. Mozart gyakran használta $V_3^4 \rightarrow I^6$ váltásoknál, felfelé léptetett szeptimhanggal és leggyakrabban a szoprán és az alt között. Itt a szeptimhang-axióma is sérül – lásd a 6b. **kottapéldát** – és az 1.7 fejezetben sorra kerülő emelt alapú négy-szűkszeptim $\rightarrow$ V. fok(ú szekund) és bővített kvintszept $\rightarrow$ V. fok váltásoknál, ahol viszont nincs szabálytalan szeptimhangmozgás ³⁹. Előbbi esetben van lehetőség az ilyen kvintpárhuzamot elkerülő szólamvezetésre, utóbbinál bizonyos helyzetekben nincsen. Megjegyezzük, hogy a klasszikus összhangzattan (és főleg az oktatása) a szextakkordok között előnyben részesíti az alapkettőzöttet, ha az valamilyen szerkesztési elv miatt nem hozható létre egy adott akkordváltásnál, akkor is a kvintkettőzöttet. Terckettőzött szextakkordot csak akkor szabad leírni, ha másfajta-ra nincs lehetőség – itt a szabályos változatnál például nincs, hiszen az egyik E hang a basszusban van rögzítve, a másik pedig a szeptimhang-axióma miatt kötelezően jelentkezik. Nem elvetendő gondolat, hogy a kvintkettőzött akkordra való váltás jobban hangzik, mint a terckettőzöttre történő.

Kottapélda: a szerkesztési elveknek megfelelő $V_3^4 \rightarrow I^6$ váltásra a 6a, a Mozart-kvintpárhuzamra a 6b. Figyeljük meg, hogy a Mozart-kvintlépés után sokkal simább, kevesebb ugrást igényel az akkordvezetés, mint a terckettőzött egy-szextre való szabályos vezetés után! Az 1c példában pedig a hét-szűkszeptimről az első fokra való továbblépésnél elkerülhetetlen a Mozart-kvintpárhuzam.

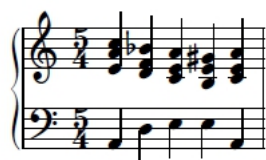


³⁸Hasonló okból nem tiltja a klasszikus összhangzattan a $T5 \rightarrow SZ5$ típusú kvintpárhuzamokat sem.

³⁹A bécsi klasszikusoknál gyakori a Mozart-kvintpárhuzam, megtalálható például Haydn C-dúr nagyszónátájában [Hob. XVI. 50.] vagy Mozart Varázsfuvolája nyitányának 189. ütemében.

Ugyanakkor az érzékeny hangok kettőzésének tilalma miatt (lásd az 1.2.6 definíciót és kiegészítő pontját) több szextakkordfajta csak terckettőzött formában engedélyezett. Ilyen például a hét-szext: a VII. fokú hármashangzat minden hangnemben szűk, és mivel alapja a vezetőhang, az nem szerepelhet két szólamban, tehát az alaphelyzetű akkordot és az alapkettőzött szextfordítást eleve el kell vetnünk a klasszikus összhangzattan szerint. Ugyanakkor a hármashangzat alapja és kvintje közti tritonusz eleve nagyon erős disszonancia, amit fölerősít az alap vezetőhang tulajdonsága a hangnemben, így a kvintkettőzött szextfordítást és a kvartszextfordítást is kizárjuk, így csak a terckettőzött hét-szext engedélyezett a fordítások közül. Ez erős dominánsa a hangnemnek, Bach koráljaiban mindig ezt az akkordot használja és a hozzá hasonló öt-terckvartot soha. A moll hangnem szűk II. fokának fordításaira és helyzeteire vonatkozó korlátozások nem ilyen szigorúak: a VII. foknál csak a vezetőhang tulajdonság miatt kizárt felrakások engedélyezettek. Azonban a moll II. foknak is a terckettőzött szextfordítás a leggyakrabban használt változata, a tritonusz túlzott erősségének mérséklése miatt. Sőt a moll hangnem kettő-szextből a II. fokú hang leszállításával létrejövő, tragikus hatású szubdominánsa, a II^{6b} *nápolyi szext* csak terckettőzött formában elfogadott.

Kottapélda a nápolyi szext használatára: 7. Ez első példánk arra is, amikor az I_4^6 segít a disszonáns szubdomináns hármashangzat V. fokra vezetésében.



7) I II^{6b} I_4^6 V I

Sem a dolgozat műfaja, sem terjedelme nem teszi lehetővé, hogy a bővített szekundlépéssel kapcsolatos vádak⁴⁰ okára fényt derítsünk és ezen vádakkal szemben megvédjük ezt a lépést. Azt a zenetörténeti megjegyzést fűzzük csak hozzá a most következő könnyen formalizálható szerkesztési elvhez, hogy Johann Sebastian Bach, akire még nem vonatkoztak a klasszikus összhangzattan preskriptív szabályai, zenekari és zongoraműveiben előszeretettel használta a bővített szekundlépést, de négyszólamú koráljaiban mindig mellőzte. Ennek valószínűleg az volt az oka, hogy a zeneileg alacsonyan képzett, az elénekelendő korál kottáját gyakran csak helyben megismerő kórusénekeseket elbizonytalaníthatta, a szólamok önálló előrehaladását megtörhette volna, ha a középső szólamok valamelyiké-

⁴⁰Például Keszler Lőrinc írja: [3; p.51.]: „A bővített másod és hozzátehetjük: minden bővített lépés nehéz intonálhatósága és csekély dallam-szépsége az indoka annak, hogy gyakorlatainkban mellőzzük és a tilos menetek csoportjába sorozzuk.”

be bővített szekundlépést írt volna a mester, a szopránban lévő cantus firmusokra nem volt jellemző ez a lépés (szemben rengeteg eurázsiai etnikum népzenejével), amelyet Bach a basszusban is elkerült. Valószínűleg Bach koráljainak meghatározó hatása a később kialakított klasszikus összhangzattani axiómarendszerre az oka a bővített szekundlépés tilalmának, amelyet itt csak *vokális* művekre mondunk ki⁴¹. Haydn, Mozart és különösen Beethoven gyakran használták a bővített szekundlépést, de vokális művekben ők is lényegesen kevésbé, mint másutt (azért esetenként ott is: például Mozart a Requiem Dies irae tételében a szopránban).

10. Szerkesztési elv (Bővített szekundlépés kerülése.). Ha t a a tonalitás alaptétele feltételeit teljesítő M négyszólamú, vokális szólamot is tartalmazó összhangzattanpélda $H \rightarrow G$ akkordváltási pontja, ahol M a klasszikus összhangzattannak megfelel, és létezik olyan szólam, amelynek H - és G -beli hangja között a távolság 3 félhanggal enharmonikus, akkor ez a távolság kis terc.

Szokás általában megtiltani a bővített nevű lépéseket, de más bővített lépés kérdése igen ritkán merül fel a tonális zenében. Szomszédos skálahangok közti bővített szekund távolság mollban fordul elő (pikárdiai tercesben is). A leggyakrabban használt akkordváltások, ahol figyelemmel kell lenni a bőszekundlépés kerülésére: $II^6 \rightarrow V$, $IV \rightarrow V$, $V \rightarrow VI$, $VI^{(6)} \rightarrow VII^6$. Az *ellenmozgás* általában elég védelmet jelent a bővített szekundlépés ellen, – persze ha nem a basszusban van kötelezően ez a lépés⁴² – ahogy azt a következő példák is mutatják:

Kottapéldák mollban a bőszekundlépés elkerülésére: 8a, 8b.



8a) I IV V[#]I



8b) I IV⁶ V⁷_# I

Speciális helyzet alakul ki a moll hangnemben az $V \rightarrow VI$ lépésnél (álzárlatnál). Ha itt a VI. fokú hármashangzatot a szokásos módon, két alap-, egy terc- és egy kvinthanggal

⁴¹Ezzel összhangban áll Keszler Lőrinc megjegyzése az előző lábjegyzetben idézett szövegrészlet után [3; p.51]: „Azt hiszem, nem kell külön hangsúlyoznom, hogy amennyiben nem külön énekszólamokra írt, hanem oly szerkesztésről van szó, amelyben az egyes szólamok számára nem a *legtermészetesebb* mozgást kell választani – mint például a zongoránál, ahol a hangszer természete folytán a bővített lépés is könnyű és egyszerű – vagy ahol a hangok természetének megfelelő speciális mozgásra nem helyezünk súlyt, a bővített lépések tilalma elesik.”

⁴²A bővített szekund inverze, a szűkített szeptim meglephető, de a szólamok hangterjedelmi korlátai miatt nem mindig.

raknánk fel, és a párhuzamok elkerülése végett a szokásos módon ellenmozgást használnánk, akkor a vezetőhangnak (szi szolmizáció) bőszekundlépéssel kellene lefelé mennie az alapra. Ezért ennél a lépésnél a VI. foknak nem az alapja, hanem *a terce szerepel két szólamban*, – már Bach korálfeldolgozásaiban is – amely a moll hangnem I. fokú hangja, ezzel a változtatással az egyébként nem teljesen határozott tonikai funkciójú, részben szubdomináns jellegű VI. fokú dúr hármashangzat már erős tonika. Ez a funkcióerősítés dúr hangnemben is jól használható az $V \rightarrow VI$ lépésnél, ráadásul ha az V. fok vezetőhangja a szopránban van, akkor az ellenmozgás itt is problémát jelentene: ha bővített szekundlépés nincs is, a vezetőhangot lefele kellene léptetni, hogy két alapot hagyjunk. Ezért rögzítjük a következő mellékszabályt és a példához hasonlóan alkalmazzuk:

11. Szerkesztési elv (Terchang kettőzése álzárlatnál). Moll hangnemben $V \rightarrow VI$ lépésnél következő VI. fokú alaphelyzetű hármashangzatra az 1.2.6 definíció (iii) pontja helyett a következő érvényes (a definíció többi pontja pedig változatlanul igaz): ez a VI. fokú hármashangzat az I. fokot tartalmazza két szólamban. Dúrban ezen módosított és az eredeti (iii) pont közül az egyiket kell betartani, vagyis a terckettőzés fakultatív⁴³.

Kottapéldák álzárlat szerkesztésére dúrban: 9a, mollban: 9b.

9a) I II V VI IV V⁸⁷ I

9b) I II V[#] VI IV V^{7b} I

Már említettük, hogy a plagális akkordvezetés elkerülése érdekében megtiltjuk az $V \rightarrow IV$ lépéseket. Ezen tilalom annyiban különbözik a többi, akkordváltási szerkesztési elvtől, hogy nem egy szólam kötelező vagy megtiltott mozgási irányát határozza meg és nem is a szólamok egymáshoz képesti viszonyát, hanem két *hármashangzatnév* közötti akkordváltást zárja ki.

12. Szerkesztési elv (Domináns→szubdomináns lépés tilalma). Legyen t a a tonalitás alaptétele feltételeit teljesítő M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű értelmezési tartományának egy pontja. Ha M t -ben megfelel a klasszikus összhangzattannak, akkor $\sharp T$ hangnem, amelyben $V \rightarrow IV$ alaphelyzetű (skálahangokból felépülő) hármashangzatok közötti akkordváltás van t -ben.

⁴³A 38. kottapéldában látható, hogy $V^7 \rightarrow VI$ lépésnél gyakran célszerűbb az alapot, mint a tercet kettőzni.

A hangnemek fajtáinak ismeretében láthatjuk, hogy a $(\text{mod } 7)$ eggyel alacsonyabb fokra való lépések közül ezzel a dúr $\rightarrow$ dúr és a dúr $\rightarrow$ moll alaphelyzetű hármasok közti lépéseket zártuk ki, a moll $\rightarrow$ moll és a többi fajtájú lépések engedélyezettek.⁴⁴ Könnyen látható, hogy az V. fok bármely helyzetből továbbvezethető IV. fokra úgy, hogy a domináns $\rightarrow$ szubdomináns lépés tilalmán kívül más szerkesztési elv ne sérüljön – használva az ellenmozgást. A reneszánsz zenében még igen gyakori volt nem csak az $V \rightarrow IV$, de a $I \rightarrow VII$ lépés is dúrban, ez a leszállított alapú VII. fokú hármashangzat a szubdomináns funkciót erősítette, még egy plagális lépéssel IV. fokra, majd onnan V.-re vezethető, de gyakran közvetlenül V. fokra vezették. Az összetett plagális menetek kizárásával azonban a leszállított VII. fok kikerült a hangnem konvergenciatartományából. Bachnál már nem túl jellemző az $V \rightarrow IV$ lépés, de például a *Hilf, Gott, Daß Mirs Geling*e kezdetű korál feldolgozása⁴⁵ ilyen lépéssel kezdődik, és alkalmanként a bécsi klasszikusoknál is találkozhatunk ilyen lépéssel (például Haydn visszafelé is olvasható scherzójában). Ezen mű tervezett folytatásában, a feloldozhatóság kérdésénél foglalkozni fogunk a domináns $\rightarrow$ szubdomináns lépésének tilalma és a többi szerkesztési elv viszonyával, az ilyen lépések engedélyezésével létrejövő alternatív összhangzattani axiómarendszerekkel.

Egy már megismert *alterált akkord* például a dúr hangnemből a hét-szűkszeptim. Ezen akkordok használata esetén, hasonló okokból, mint a bővített szekundlépésnél, zavart okozhat, ha a bennük szereplő módosított hang egy másik szólamban szerepel feloldva a következő akkordban. Ezt a jelenséget nevezzük *keresztállásnak*.

13. Szerkesztési elv (Keresztállás tilalma). Legyen t a a tonalitás alaptétele feltételét teljesítő M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű egy $H \rightarrow G$ akkordváltási pontja. Tegyük fel, hogy $\exists T$ hangnem, amelynek H alterált akkordja, és létezik olyan, T -hez képest módosított hangja H -nak (X'), amellyel megegyező fokú skálahang (X) szerepel G -ben.

Ha M t -ben megfelel a klasszikus összhangzattannak, akkor X' és X ugyanabban a szólamban szerepelnek (X sem szerepel másokban⁴⁶).

⁴⁴Az $V^6 \rightarrow IV^6$ lépés engedélyezett a klasszika szemlélete szerint, ha a négy-szext terckettőzött. Kesztler Lőrinc így fogalmaz *Összhangzattan* című, először 1952-ben megjelent tankönyvében [3]: „A terckettőzés következtében a felső szólamok valamelyikében a basszus dallamával ellenkező menet mutatkozik, mely az V-IV. fokoknak önmagában véve nem természetes egymásutánjának (D-S!) bizonyos átmeneti jelleget kölcsönöz (...) a IV. fokú szextakkordot ilyenkor nem annyira S hangzatnak, mint a D akkord két alakját összekapcsoló dallamos láncnak érezzük.”

⁴⁵[BWV. 343, a Vierstimmige Choralgesange 1982-es EMB kiadásában (ezt forgalmazzák ma is utánnyomott változatban) a 170. sorszámú].

⁴⁶Az érzékeny hangok kettőzésének tilalma miatt X' más szólamban nem is szerepelhet. Az összhangzatos moll skála VII. fokát, a pikárdiai terces moll hangnem III. és VII. fokát is módosítottak tekintjük

Következnek a túlzottan nagy hangközugrásokat kizáró axiómák, amelyek a zeneművek kiegyensúlyozottságát és természetességét szolgálják a klasszika szemlélete szerint. A *közös hang megtartását* előírányzó szerkesztési elv még igen könnyen formalizálható általános hangterjedelmű esetben is:

14. Szerkesztési elv (Közös hang megtartása). Legyen t a a tonalitás alaptétele feltételét teljesítő M négyszólamú összhangzattanpélda $H \rightarrow G$ akkordváltási pontja. Ha M t -ben megfelel a klasszikus összhangzattanának:

- (i) ha H -nak és G -nek van azonos fokú hangja, akkor M megtartja a közös hangot (azaz ezen hangok azonos szólamban szerepelnek) minden olyan esetben, amikor ebből nem következik más szerkesztési elv megsértése⁴⁷,
- (ii) ha több szólamban van lehetőség egyszerre megtartani a közös hangot más szerkesztési elv megsértése nélkül, akkor M mindegyiket megtartja,
- (iii) ha H -nak két szólama létezik, amelyben ugyanaz a hangja szerepel (oktáv-ekvivalencia erejéig), és ezek közül bármelyikben megtarthatja M a közös hangot más szerkesztési elvek megsértése nélkül, de egyszerre csak az egyikben, akkor M ezek közül az alsóban tartja meg azt.

Így például $I \rightarrow VI$ lépéseknél az I., $VI \rightarrow IV$ lépéseknél a VI. (de álzárlatnál I.!) fokú hangok közül mindig az alsót tartjuk meg, lásd a 3. és 9b példákat. Végül tárgyaljuk a *legkisebb mozgás elvét*, amely a klasszika szemlélete szerint talán a legfontosabb szerkesztési elv. Formalizálni itt nem fogjuk, mivel pontos alkalmazása nagy mértékben függ attól, hogy milyen hangszerekre vagy énekszólamokra írjuk négyszólamú összhangzattanpéldánkat – ebből következik, milyen hangterjedelemben mozoghatnak a szólamaink – és milyen fekvést használunk – ebből következik, hogy a szomszédos szólamok milyen mértékben közelíthetik meg egymást és mennyire távolodhatnak el egymástól. A szerkesztési elv lényege, hogy mind szólamonként, mind egy akkordváltásnál összességében törekedni kell a lehető legkevesebb mozgásra. A közös hangokból minél többet tartsunk meg, tercnél nagyobb ugrás legfeljebb egy szólamban legyen, ha lehetséges. A legkisebb mozgás elve adja a négyszólamú összhangzattanpéldák formájának alapját, de a szeptimhang-, vezetőhang-, párhuzam- és bőszekund-axiómák lokálisan, egy adott akkordváltásnál erősebbek nála.

ebben a szerkesztési elvben.

⁴⁷Előre rögzített szólamra (cantus firmus) természetesen ez a szabály nem igaz: ha például az előre megadott szoprán nem tartja meg a közös hangot, de létezik olyan akkord, amelynek egy másik hangja szerepel az akkordváltás után a szopránban, mint addig, akkor elfogadható ugyanolyan nevű akkorddal folytatni az akkordváltás után, mint amilyen előtte volt.

Például két szomszédos fok között a legkisebb mozgás elve önmagában azt kívánná, hogy minden szólam egy szekundlépést tegyen ugyanabba az irányba. Ez azonban oktáv- és kvintpárhuzamot, esetleg más problémákat is vonna maga után⁴⁸.

Leginkább vokális műveknél, amikor a szoprán, alt, tenor, basszus kifejezések valóban az adott énekszólamot jelentik, szoktunk *szűk- és tágfekvésről* beszélni. A tágfekvést használta Bach négyszólamú korálfeldolgozásaiban, itt a basszust és a tenort basszuskulcsban, az altot és a szopránt violinkulcsban szoktuk lekottázni, és a szólamok közötti távolságok nagyjából egyenletesek. Ezzel szemben a szűkfekvésnél csak a basszus szerepel basszuskulcsban, a tenor gyakran a férfiszólamnak megfelelő magasság fölött énekel, a szólamvezetés nem élőzene-szerű – de ebben a fekvésben tisztábban szemléltethetők a szerkesztési elvek, mint a tágfekvésben, így az összhangzattanpéldák írásának oktatásában ezt használják gyakrabban. **Kottapéldák** tágfekvésű művekre dúrban: 3, 9a; a 9b pedig tágfekvésben írt moll példa. A többi példa szűkfekvésű. A négy énekszólamra vonatkozó konvencionális hangmagasság-tartományokat használó szűkfekvésű műből konvencionális hangterjedelmű és elrendezésű tágfekvésű művet kaphatunk, ha az altot és a basszust egy-egy oktávval lejjebb vesszük, ezek lesznek a tágfekvésű zenemű férfiszólamai. Ha az eredeti szigorú négyszólamú szerkesztésű kórusmű a klasszikus összhangzattannak megfelelt, általában ugyanez lesz igaz a kapott tágfekvésű műre is, legfeljebb kvintpárhuzam keletkezhet az eredeti kvartpárhuzam helyett.

E. Kottapéldák az alterált akkordok használatáról

10.) I⁵ II^{6b} VII⁷ I

11.) I⁵ II^{6b} V^{#1} I II^{6b} V^{#7} I

⁴⁸Az ilyen akkordváltásokból felépülő szerkesztés a *mixtúrás akkordvezetés*, amelynek sok példáját láthatjuk Bartók Béla műveiben, például A kékszakállú herceg várában az 5. ajtó kinyitása utáni részben („Lásd, ez az én birodalmam...”).



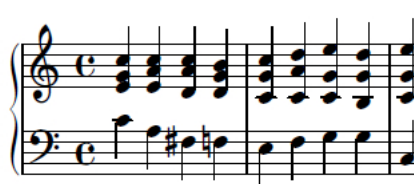
12.) I II III IV (V) VI VII



13.) I⁸ II II⁷_♯ I⁶₄ V⁷ I



14.) I⁸ II II^{6♯}_{4♯} V⁶_♯ I



15.) I⁸ VI II⁶₅ V²_♯ I⁶₅ I⁶₄ V I



16.) I³ IV IV^{7♭}_♯ V I



17.) I⁵ IV IV⁷_♯ I⁶₄ V⁷ I



18.) I⁵ IV^{7♭}_♯ V²_♯ I⁶₅ IV V⁷ I



19.) I IV II^{6♯}₅ III II⁶₅ V I



20.) I VII⁷_{5♯} III II⁶₅ V I



21.) I II VII⁶₅ III^{4♯}₂ VI⁶₅ II^{4♯}₂ V⁶ I



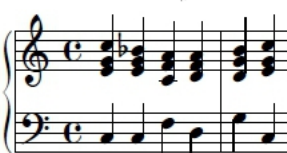
22.) I V III⁶₅ VI II V⁷ I



23.) I V⁶₅ I²_♭ IV⁶ II V⁷ I



24.) I IV IV²_♭ VII⁶ I⁶ IV V⁷ I



25.) I I^{7♭} IV II V I



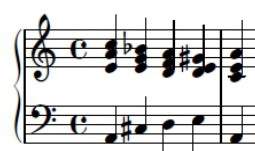
26.) I III V⁷_♯ VI II III⁶ V I



27.) I II II⁷_♯ III IV V⁷ I



28.) I I^{4♯}₂ IV⁶ I⁶₄ V⁷_♯ I



29.) I III^{7♭} IV V⁷_♯ I

30.) I IV IV^{6♯} I₄⁶ V_♯⁷ I 31.) I III VI IV^{6♯} V I 32.) I II₃⁴ II₃^{4♯} V I

33.) I II_{5b}⁷ V⁷ VI_b^{5b} IV IV^b V² I_b⁶ II_b^{6b} I₄⁶ V VI_b⁶ IV_b⁶ I₄⁶ V⁷ I

34.) I[♯] II² VII⁷ I_♯⁷ IV V[♯] VI^{5♯} II⁷ V_♯⁷ I[♯]

F. A nápolyi szextakkord kötelező terckettőzéséről

Lássunk egy egyszerű példát az akkordváltási szerkesztési elveink rendszere mint matematikai axiómarendszer működésére. A D rész 7. kottapéldájánál kijelentettük, hogy a nápolyi szext mindig terckettőzött. Most megmutatjuk, hogy ha közvetlenül V. fokra vezet a klasszikus összhangzattannak megfelelően, akkor nem is lehet másmilyen.

F.0.2. Állítás. *Legyen t a tonalitás alaptételének feltételeit teljesítő M négyszólamú összhangzattanpélda egy akkordváltási pontja, ahol moll hangnem van: u , és u szerint t -ben $N = \text{II}^{6b} \rightarrow D = \text{V}^{(7)}_{\sharp}$ lépés van. Ha M t -ben megfelel a klasszikus összhangzattannak, akkor az N nápolyi szext terckettőzött.*

Bizonyítás. Ha N alapkettőzött lenne, akkor a 8. szerkesztési elv szerint mindkét szólamban lefelé kéne léptetni vagy közös hangként, feloldva megtartani. Mivel az V. fokban nincs I. fokú hang, csak feloldva megtartani lehetne mindkét szólamban, ami oktávpárhuzam. Ha N kvintkettőzött lenne, akkor az egyetlen alaphangot az imént meggondoltak szerint feloldva meg kell tartani, ebben és csak ebben a szólamban fog szerepelni az V. fok kvinthangja. Ha az V. fokú akkord hármashangzat, akkor a nápolyi akkord két kvinthangja közül pontosan egynek kell az V. fok alaphangjára oldódni, a másik viszont szükségképpen az u vezetőhangjára (az V. fok tercére) lép, ami bőszekundlépés (vagy szűkített szeptim lépés, amely a legkisebb mozgás elvét sérti). Ha az V. fokú akkord szeptimakkord, akkor is csak a nápolyi szextakkord két kvinthang közül vezethet valamelyik az u vezetőhangjá-

ra, hiszen a II^{6b} alaphangja kötelezően feloldódik az V. fok kvinthangjává, a basszushang pedig az V. fok alaphangjára vezet. Azonban a szexthangra továbbra is csak bővített szekundlépéssel vezethetnek ezek a szólamok.

Így kizártuk az alap- és a kvintkettőzést. Terckettőzés esetén van olyan helyzet, amikor a vizsgált akkordváltások megvalósíthatóak, amint a 11. **kottapélda** mutatja. $\square$

A következő szerkesztési elvet említhettük volna már a D fejezetben is, de az ott szereplő kottapéldákban nem került szóba.

15. Szerkesztési elv (Első tritonuszvezetési axióma). Legyen t a tonalitás alaptételének feltételeit teljesítő M szigorú négyszólamú szerkesztésű zenemű egy $H \rightarrow G$ akkordváltási pontja. Ekkor ha M t -ben megfelel a klasszikus összhangzattannak:

- (i) ha G basszusa H basszusánál egy tritonusz+ n egész oktávval magasabb ($n \in \mathbb{Z}$), akkor $n = -1$, vagyis G basszusa egy szűkített kvinttel alacsonyabb H basszusánál, tehát a tritonuszlépés lefelé történik.

Gondoljuk meg a bizonyítás alapján, hogy a közbeiktatott I_4^6 nélküli $\text{II}^{6b} \rightarrow \text{V}_{\sharp}^{(7)}$ pontosan akkor lehet a klasszikus összhangzattannak megfelelő, ha a fekvés olyan, hogy a második (nem basszusbeli) terchang leugratható a vezetőhangra (az V. fok tercére). Most már látjuk, hogy tritonusz-felugratás a klasszikus összhangzattan szerkesztési elvei értelmében nem lehetséges, Dmitrij Tymoczko pedig széleskörű általánosítással megmutatta, hogy a szólamkeresztezés a legkisebb mozgás elvével ellentétes (lásd: [6; p. 4.]). Emiatt a szokásos, összhangzattan-oktatásban használatos szűkfekvésben csak oktávhelyzetű I. fokról indulva van esély az I_4^6 kihagyásával a nápolyi szextről az V. fokra jutni moll hangnemben (lásd a 11. kottapélda első ütemét). V. fokú szeptimre még nehezebben: a 11. kottapélda második felében kitágul a szűkfekvés, és könnyen ellenőrizhető, hogy jobb megoldás nincs.

G. A dūr és a moll hangnemek konvergenciatartományának áttekintése

A következő táblázatok foglalják össze a dūr és moll hangnemek konvergenciatartományának elemeit. A *Hármasok* oszlop az akkordok parciális hármashangzatait tartalmazza, a *Jel* pedig itt is C-dúrra illetve a-mollra vonatkozó jelöléseket mutatja. A *Tipikus követő akkord* oszlopban az V. fokot a szubdomináns funkciójú akkordoknál úgy kell érteni, hogy esetleg egy-kvartszexten vagy három-szexten átvezetve következik az V. fok – egy-két

kivételes helyzetet leszámítva, amikor a szerkesztési elvek nem engedik. Ilyen kivételes példa a terckettőzött négy-szext. Ugyanez az akkord a ritka példa arra, amikor a hangnem konvergenciatartománya egy elemének valamelyik négyszólamú alakja nem következhet a hangnem I. foka után.

Dúrban:

Fok	Akkordtípus	Jel	Hármasok	Konv. fordítások	Funkció	Tipikus követő akkord
első fok		I	D	mind	T	$KT(T)$ csaknem $\forall$ eleme
második fok		II	m	alap, szext	S	$V^{(7)}, II_{\sharp}^7$
harmadik fok		III	m	alap, szext	T/D	IV, VI, $III_{\sharp}^7$
negyedik fok		IV	D	mind	S	$V^{(7)}, II, IV_{\sharp}^{7b}, I$
ötödik fok		V	D	alap, szext	D	I, VI, $III_{\sharp}^6, V_{\sharp}^7$
hatodik fok		VI	m	alap, szext	T	II, IV, $VI_{\sharp}^7$
hetedik fok		VII	sz	szext (terckett.)	D	$I^{(6)}, VII^{7b}$
egy-szeptim		I^7	D, m	mind	T	IV
kettő-szeptim		II^7	m, D	mind	S	V
három-szeptim		III^7	m, D	mind	-	VI
négy-szeptim		IV^7	D, m	mind	néha S	VII^6, V
öt-szeptim		V^7	D, sz	mind	D	I, I_b^2
hat-szeptim		VI^7	m, D	mind	(T)	II, $VI_{\sharp}^7$
hét-szeptim		VII^7	sz, m	mind	gyenge D	I, III
emelt alapú egy-szükszeptim		$I_{\sharp}^{7b}$	sz, sz	mind	-	II, $II_2^{4(\sharp)}$
emelt alapú kettő-szükszeptim		$II_{\sharp}^7$	sz, sz	mind	-	III, $III_2^{4(\sharp)}$
emelt alapú négy-szükszeptim		$IV_{\sharp}^{7b}$	sz, sz	mind	S	V, V^2
emelt alapú öt-szükszeptim		$V_{\sharp}^7$	sz, sz	mind	-	VI, $II_2^{4(\sharp)}$
hét-szükszeptim		VII^{7b}	sz, sz	mind	D	I, $I^{2(b)}$
egy-mellékdomináns szeptim		I^{7b}	D, sz	mind	T (-> S)	IV, IV_b^2
váltódomináns szeptim		$II_{\sharp}^7$	D, sz	mind	S	V, V^2
három-mellékdomináns szeptim		$III_{\sharp}^7$	D, sz	mind	-	VI, $VI_2^{4(\sharp)}$
négy-mellékdomináns szeptim		IV^{7b}	D, sz	csak a szekund	(S)	VII^6
hat-mellékdomináns szeptim		$VI_{\sharp}^7$	D, sz	mind	-	II, $II_2^{4(\sharp)}$
hét-mellékdomináns szeptim		$VII^{5\sharp}$	D, sz	mind	-	III, $III_2^{4(\sharp)}$
bővített (négy-) szext		$IV_b^{6\sharp}$	(D, sz)	szext (terckett.)	S	V
bővített (négy-) kvintszext		$IV_{5b}^{6\sharp}$	(D, sz)	kvintszext	S	V
bővített (kettő-) terckvart		$II_{43b}^{6\sharp}$	-	terckvart	S	V
mollbeli második fok		II^{5b}	sz	szext	S	$V^{(7)}$
mollbeli kettő-szeptim		II_{5b}^7	sz, m	mind	S	$V^{(7)}$
mollbeli nápolyi szext		II_b^{6b}	D	szext (terckett.)	S	V
mollbeli negyedik fok		IV^b	m	alap, szext	S	$V^{(7)}$
mollbeli hatodik fok		$VI_{\flat}^{5b}$	D	alap	T (S)	V, II, IV

Mindösszesen 96 konvergens akkordfordítás.

Mollban:

Fok	Akkordtípus	Jel	Hármasok	Konv. fordítások	Funkció	Tipikus követő akkord
első	fok	I	m	mind	T	$KT(T)$ csaknem $\forall$ eleme
második	fok	II	sz	szext	S	$V_{\sharp}^{(7)}, II\ 5_{\sharp}^{(7)}$
harmadik	fok	$III^{5\sharp}$	B	alap, szext	T/D	IV, VI, I
negyedik	fok	IV	m	mind	S	$V_{\sharp}^{(7)}, II, IV_{\sharp}^{(7)}, I$
ötödik	fok	$V^{\sharp}$	D	alap, szext	D	I, VI
hatodik	fok	VI	D	alap, szext	T/S	II, IV, $V^{\sharp}$
hetedik	fok	$VII_{\sharp}$	sz	szext (terckett.)	D	$I^{(6)}, VII_{\sharp}^{(7)}$
egy-	szeptim	$I_{\sharp}^{(7)}$	m, B	mind	-	IV
kettő-	szeptim	$II_{\sharp}^{(7)}$	sz, m	mind	S	$V_{\sharp}^{(7)}$
három-	szeptim	$III_{\sharp}^{(7)}$	B, D	mind	T/D	VI, $V_{\sharp}^{(7)}, I$
négy-	szeptim	$IV_{\sharp}^{(7)}$	m, D	mind	néha S	$VII_{\sharp}^{(6)}, V_{\sharp}$
öt-	szeptim	$V_{\sharp}^{(7)}$	D, sz	mind	D	I, $I_2^{4\sharp}$
hat-	szeptim	$VI_{\sharp}^{(7)}$	D, m	mind	T	II
hét-	(szűk)szeptim	$VII_{\sharp}^{(7)}$	sz, sz	mind	D	I, $I_2^{4\sharp}$
emelt alapú három-	szűkszeptim	$III_{\sharp}^{(7b)}$	sz, sz	mind	-	IV, $IV_2^{4(\sharp)}$
emelt alapú négy-	szűkszeptim	$IV_{\sharp}^{(7)}$	sz, sz	mind	S	$V^{\sharp}, V_2^{4\sharp}$
egy-	mellékdomináns szeptim	$I_{\sharp}^{(7)}$	D, sz	mind	T (-> S)	IV, IV^2
	váltódomináns szeptim	$II_{\sharp}^{(7)}$	D, sz	mind	S	$V^{\sharp}, V_2^{4\sharp}$
bővített (négy-)	szext	$IV_{\sharp}^{(6)}$	(D, sz)	szext (terckett.)	S	$V^{\sharp}$
bővített (négy-)	kvintszext	$IV_{\sharp}^{(6)}$	(D, sz)	kvintszext	S	$V^{\sharp}$
bővített (kettő-)	terckvart	$II_{\sharp}^{(4)}$	-	terckvart	S	$V^{\sharp}$
pikárdiai terces első	fok	$I^{\sharp}$	D	alap	T	nincs (zárákkord)
nápolyi (kettő-)	szext	$II_{\sharp}^{(6b)}$	D	szext (terckett.)	S	$V^{\sharp}$
	domináns nónakkord	$V_{\sharp}^{(9)}$	D, sz, sz	alap (hiányos)	D	I

Mindösszesen 67 konvergens akkordfordítás. Figyeljük meg, hogy a IV. fokon kívül nincs hangnemi kitérésre lehetőség (vö. a mollok közötti diatonikus modulációknál meg gondoltakkal), a nem IV. fokra vezető összes akkord határozott funkciójú vagy két funkció között ingadozik.

A dolgozatban nem foglalkoztunk a *nónakkordokkal*, mert azok önálló (értsd: nem csak figurációkban való) alkalmazása túlmutat a négyszólamú szerkesztésen, és inkább már a romantikára jellemző, mint a klasszikára.

Legyen K a mindkét irányban végtelen jóltemperált zongora, E pedig az enharmonikus tartomány. Ekkor K^5 illetve E^5 azon elemeit, amelyek egy rögzített hétfokú skála szerint egy szeptimakkordból és a szeptimhangnál egy terccel magasabb hangból (ez a *nónahang*, mivel nóna hangközre van az ötöshangzat alapjától) épülnek fel, *nónakkordoknak* nevezzük. Egy nónakkordnak tehát három parciális hármashangzata és két parciális szeptimakkordja van. A hangnemek skálahangokból felépülő nónakkordjai közül egyedül a(z esetleg pikárdiai terces) moll hangnem V. fokú nónakkordjára igaz, hogy mindkét parciális négyeshangzata ugyanazzal a határozott funkcióval rendelkezik. Ezért ezt az V. fokú ötöshangzatot *domináns nónakkordnak* nevezzük és alaphelyzetben, kvinthiányos formában a szigorú négyszólamú szerkesztésben is használhatjuk. Ez a lehető legerősebb domináns tulajdonságú akkord. Alaphangja megegyezik a tonika kvintjével, a másik három hangja pedig mint vezetőhang, szeptimhang és nónahang az I. fok egy-egy (páronként különböző)

hangjára. A nónahang a szeptimhanghoz hasonlóan mindig lépésszerűen lefelé vezetendő.

Dúrban, mint láttuk, a diatonikus hét-szeptim nem elég erős domináns, de hasonló igaz az V. fokú nónakkord oldódására, mint amit itt a moll hangnem esetében elmondunk. Viszont a szigorú négyszólamú szerkesztésű dúr zeneművekben az akkord önálló használata ritkább.

H. Sztenderd hétakkordos modulációk – a moduláció alaptételének igazolása kottapéldákkal

Hét akkordot kell egymás után írunk négy szólamban, az első T_1 első foka, – előtte már garantált a T_1 -beli tonalitás – az utolsó T_2 első foka, és be kell tartanunk a modulációs szerkesztési elveket. Ez a cél a hétakkordos, szigorú négyszólamú szerkesztésű, oktatási célú modulációk megalkotásánál. Itt a bécsi klasszikusok zenekari műveiben is gyakori, összetett, hosszú kromatikus meneteket tartalmazó modulációk megkonstruálására nincs lehetőség, hét hangzat csak arra elég, hogy T_1 I. fokától az N , F és C szakaszokon át eljussunk T_2 I. fokáig. Általában F egyetlen akkordból, a T_2 V. fokú hármas- vagy négyeshangzatából vagy hét-szűkszeptiméből áll, ritkán, bizonyos kromatikus modulációknál kettőből (37. **kottapélda**). Gondoljuk meg, hogy a hét akkord közül az első T_1 első foka, az utolsó T_2 első foka, az utolsó előtti pedig skálahangokból álló domináns T_2 -ben, így F számossága általában 1 és 4 között változhat, de szomszédos dúr hangnemek esetén kivitelezhető a teljesen sima váltás is, amikor F elmarad és csak C -ben szólal meg T_2 ötödik foka (35. **kottapélda**). A hétakkordos modellben szeretnénk igazolni a *moduláció alaptételét*, melyet a 2.3 fejezet végén mondtunk ki.

A modulációs félcsoporttal kapcsolatban meggondoltak alapján feltehetjük, hogy előjegyzés szempontjából T_1 a legkellemesebb: C-dúr illetve a-moll: a tétel bizonyításához elég, ha ezekből a hangnemekből tudunk az összes többi, azonos típusú hangnembe hét akkord alatt modulálni. Most megadjuk az azonos típusú kezdőhangnemek közötti közös akkordokat (diatonikus modulációs lehetőségeket) és enharmonikus akkordokat, majd a kottapéldák következnek. Jegyezzük meg, hogy a távoli hangnemekben vezető diatonikus modulációk az alterációk és disszonanciák miatt jóval kevésbé simák és észrevétlenek, mint a mindkét hangnemben skálahangokból felépülő közös akkordokat tartalmazó, legfeljebb két kvintre lévő hangnemekben élő diatonikus átvezetések. A bécsi klasszikus szerzők, különösen egyszerűbb formájú zeneműveikben, legtöbbször a kvintkörben előjegyzés szerint szomszédos hangnemekben ($\mathfrak{Mod}_{||}$ -ben T -ből D , S , p , Dp , Sp egyikébe) vezető modulációkat alkalmazták. Táblázatainkban az enharmonikusan átértelmezendő akkordokat a

kezdőhangnembeli formájukban írjuk le, de alattuk megtalálható a célhangnembeli értelmezésük is.

Hangnem	$\mathfrak{D}: T_2 - T_1$	Egyéb jel	Közös hármások (C szerint)	Enharm. lehetőségek	Példa (közös akkord)
C	T		az összes akkord	(tercrokonság)	-
G	D		I, III, V, VI		35. (III), 36. (VI ⁶)
D	2D		V, III		37. (III)
A	3D	$\text{med}^{-1}(T) = \star \ T$	II, IV (A: IV ^b , VI ^{5b})	tercrokonság	38. (II)
E	4D		VI, IV (E: IV ^b , VI ^{6b})		39. (VI ⁶)
H	5D		nincs	V ⁷ (H: bővített ⁶ , ⁶ / ₅)	40. (C : V ⁷ ~ H : IV ^{6#} _{5b})
Fisz ~ Gesz	6D=6S	$\text{med med}^{(-1)}(T)$	nincs	tercrokonság	42.a) (krom.), b) (+terc.)
Desz	5S		nincs	b ⁶ ₅ , ⁶ / ₅ (Desz: V ⁷)	41. (C : IV ^{6#} _{5b} ~ Desz : V ⁷)
Asz	4S		IV ^b , VI ^{6b} (Asz: VI, IV)		43. (nápolyi)
Esz	3S	$\text{med}T = \ \star T$	IV ^b , VI ^{5b} (Esz: II, IV)	tercrokonság	44. (IV ^b)
B	2S		II, IV		45. (IV)
F	S		I, II, IV, VI		46. (VI, II)

Hangnem	m: $T_2 - T_1$	Egyéb jelölés	Közös hármások (a szerint)	Enharm. lehetőségek	Kottapélda
a	t		az összes akkord	(tercrokonság)	-
e	d		I, nápolyi ⁶		47. (I ⁶)
h	2d		nincs		48. (krom.)
fisz	3d	$\text{med}^{-1}(t) = \ \star t$,	nincs	tercrokonság	49. (a : VII ^{6#} ₅ ~ fisz : VII ^{6#} ₄)
cisz	4d		nincs	bőhármások enh.	50. (a : III ⁶ ₅ ~ cisz : III ^{5#} ₃)
gisz	5d		V	V ⁷ _# (gisz: bőv. ⁶ , ⁶ / ₅)	51. (V)
disz ~ esz	6d=6s	$\text{med med}^{(-1)}(t)$	nápolyi ⁶	tercrokonság	52. (II ^{6b})
b	5s		VI	b ⁶ ₅ , ⁶ / ₅ (b: V ⁷ _#)	53. (a : IV ^{6#} ₅ ~ f : V ⁷ _#)
f	4s			bőhármások enh.	54. (III ^{5#} -ford.)
c	3s	$\text{med}T = \star \ T$	nincs	tercrokonság	55. (a : VII ^{6#} ₄ ~ c : VII ^{6#} ₅)
g	2s		nincs		56. (krom.)
d	s		IV		57. (IV ⁶)

Látható, hogy a moll hangnemek közt sokkal kevesebb a közös akkord, mint a dúrok között⁴⁹. Ezt az okozza, hogy a kvintkörben szomszédos moll hangnemek skálái nem csak egy hangban különböznek, – mint a szomszédos dúr hangnemekéi – hanem a mesterséges vezetőhangok különbsége miatt három hangban. Az a-moll és a tőle a kvintkörben mindössze két hangnemre lévő g-moll között sem közös akkord, sem terc- vagy bőhármárokonság nincs. Azonban mivel minden hangnemben mindhárom szűkített szeptimnek van konvergens fordítása, enharmonikus moduláció itt is lehetséges (56. **kottapélda**). Az a-molltól a másik irányban két hangnemre lévő, vele közös akkordokkal szintén nem rendelkező h-mollba is vezethet kromatikus moduláció (49. **kottapélda**). A 35. és a 47. kottapélda mutatja, hogy C-dúrból G- vagy F-dúrba való moduláció során $F = \emptyset$ előfordulhat. A hatodik fokú szextakkord megjelenése dúrban szinte mindig D irányú modulációt nyit, ilyenkor gyakran terckettőzött (a 36. és kottapéldán kívül lásd a 40.-t is). Hasonlóan átértelmezett közös akkordok helyettesítik F -et a 47. (C→F) kottapéldában. Ilyen esetekben az F új hangnembeli domináns szeptimakkordjának szerepét az utolsó N -beli (közös) akkord vezeti át, amelyet már csak az új hangnemben érvényes

⁴⁹A szélsőségesen messzire vezető, az a-moll V. fokának és az gisz-moll VI. fokának egyezésén alapuló a-moll→gisz-moll diatonikus moduláció felfedezését Wolfgang Amadeus Mozart nevéhez kötik. Az első ismert ilyen modulációk Mozart *Requiem*jének *Confutatis* tételében találhatók (az ide vonatkozó *Dies irae*-szövegrészlet „Oro supplex et acclinis, Cor contritum quasi cinis: Gere curam mei finis”).

módon vezetünk tovább.

Különleges a 43. a) és 43. b) kottapéldákon szereplő kromatikus moduláció C-dúrból Fisz-dúrba⁵⁰. Egyrészt, mert szűkített szeptimes, b) változata egyszersmind enharmonikus moduláció is, amely a tercrokonságot használja ki. Másrészt mert ez a példa azon egyetlen nemtriviális (vagyis $T_1 \neq T_2$ típusú) a modulációosztályba tartozik, amelyre a 2.2 részfejezetben említettek szerint $2a = T$: a 43. a)-beli *akkordneveket változatlanul hagyva, csak a két hangnem szerepét kicserélve* a klasszikus összhangzattannak megfelelő modulációt kapunk Fisz-dúrból C-dúrba! Ezt mutatja 43. c) kottapélda⁵¹. Vegyük észre azt is, hogy az (a) és a (c) változatokban semmilyen közös vagy enharmonikus akkord nincs a két hangnem között, az összeköttetést csak a basszusbeli kromatika jelenti. Viszont abban, hogy ez a moduláció hatásosan működik és jól hangzik, nagy szerepe van annak, hogy a célhangnem öt-szekundja csak egy hangban különbözik a kezdőhangnemmél való tercrokonságot létrehozó szűkített szeptim egy fordításától.

Diatonikusan egy dúr hangnem és a parallel modulációs félcsoporthoz közeli (p , Sp , Dp , vagyis C-dúr esetén a-moll, d-moll, e-moll) moll hangnemek között is modulálhatunk. Ezekből az 59. ($C \rightarrow a$; közös akkord a kezdőhangnem szerint: IV^6), 60. ($e \rightarrow C$; I^6) és 61. ($C \rightarrow d$; I) kottapéldák adnak ízelítőt.

Nehezebb a helyzet viszont akkor, amikor az azonos alapú hangnemek között akarunk modulálni. A mollbeli akkordok bevezetésénél meggondoltuk, hogy a két hangnem között a közös akkordok mind domináns funkciójúak. Ha megszólaltatjuk az egyik domináns akkordot és azzal nem az eredeti, hanem az azonos alapú hangnem egy tonikai akkordját váltjuk ki, akkor semmivel sem kapunk simább, folytonosabb átvezetést, mint ha véletlenszerűen egyszer csak az azonos alapú hangnemben folytatnánk a zeneművet. Márpedig, mivel a két hangnem mellékdominánsai megegyeznek (ha a konvergenciájuk nem is), mindenképpen eljutunk egy olyan pontra, – F előtt, közben vagy után – ahol a dominánst minden előzmény nélkül a minore hangnem helyett a maggioreban vagy a maggiore helyett a minoréban kell továbbvezetni. A zeneelmélettel foglalkozók éppen ezért gyakran nem is tekintik modulációnak, csak *váltásnak* a minore $\rightarrow$ maggiore és a maggiore $\rightarrow$ minore áttérést, és a zeneirodalomban gyakoriak az ilyen váltások közül a felvezetés nélküliek.

Ha a tercrokonságra, bőhármass-rokonságra vagy a bővített kvintszext átértelmezésére támaszkodva a *kvinttkörben távoli, különböző típusú* hangnemek között kívánunk modulál-

⁵⁰Ezt a modulációt Dr. Serei Zsolttól, jelenlegi összhangzattan-tanáromtól ismerem, akinek szóbeli közlése szerint a budapesti Zeneakadémia zeneszerzés szakján a felvételi anyagát képezi ezen moduláció ismerete.

⁵¹Moll hangnemek között az ugyanilyen akkordnevekből álló moduláció nem szabályos: a célhangnem moll I. foka miatt nincs a basszusban kromatika.

ni, akkor is beleütközünk abba a problémába, hogy a moduláció végén véletlenszerűen kell váltani egy dúr hangnem és a vele azonos alapú moll között (oda- vagy visszafelé). Ilyenkor a váltás természetesen végrehajtható a moduláció zárlatának elején, ezt elkerülni nem is lehetne. Ezt a váltást beépítve a $\mathfrak{D}$ -beli és $\mathfrak{m}$ -beli modulációink zárószakaszába *tetszőleges két hangnem között megadhatunk modulációt*, de ahol a hangnemek típusa különböző és az átmenet nem diatonikus, mindig gyengíti a moduláció erejét, hogy a dúr→moll vagy moll→dúr váltás véletlenszerű, ezért az ilyen hangnemváltások a zeneirodalomban ritkák. Ezen véletlenszerűség miatt definiáltuk $\mathbf{mod}$ -ban a $\mathfrak{D}$ és a $\mathfrak{m}$ közti *komplexusműveleteket* jobbzéró félcsoporthként: a modulációban megjelenő dúr–moll viszony végső soron csak a záróhangnem típusától függ.

35.) N C 36.) 37.)

C: I V III V⁶ I C: I VI⁶ C: I
 G: V I VI I⁶ IV V⁷ I G: V II⁶ V⁷ I⁶ IV V I D: IV V⁶ I² IV⁶ II V⁷ I

38.) 39.)

C: I II C: I VI⁶
 A: IV^b V⁴ I⁶ IV V I E: IV⁶ V⁷ VI IV V I

40.) 41.)

C: I H: IV⁶_{5b} V⁷ V VI IV V I C: I IV⁶_{5b} Desz: V⁷ VI IV I⁶₄ V I

42.a) 42.b)

C: I C: I VII^{7b}
 Fisz: V² I⁶ IV I⁶₄ V I — Fisz: VII⁴_{5b} I⁶ IV I⁶₄ V I —

42.c) 43.)

Fisz: I C: I II^{6b}
 C: V² I⁶ IV I⁶₄ V I Asz: IV⁶ V VI IV V I

44.) 45.) 46.)

C: I IV^b II V VI IV V⁷ I C: I IV B: V VI IV I⁶₄ V I C: I VI II F: V III VI IV III⁶ V I

47.) 48.) 49.)

a: I I⁶ e: IV IV⁶ V⁷₂ VI II⁶₅ V[#] I a: I I⁶ h: V⁶₃ I⁶ IV V[#] I a: I VII⁶₅ fisz: VII⁴₃ I⁶ IV I⁶₄ V[#] I

50.) 51.)

a: I III⁵₄ cisz: III⁶₄ III⁶₅ VI IV V[#] I a: I V[#] gisz: VI V[#] VI IV V[#] I

52.) 53.)

a: I II⁶₅ esz: V⁶₅ VI IV III⁶₅ V⁷₂ I a: I IV⁶ b: V⁷₂ VI IV V⁷₂ I N F C

54.) 55.) 56.)

a: I III⁵₄ f: III⁶₅ III⁶₄ III⁵₄ IV II⁷ V⁷₂ I a: I VII⁷ VII⁴₃ c: VII²₅ VII⁶₅ I⁶ IV V[#] I a: I g: II⁶₅ V²₄ I⁶₅ IV V[#] I

57.) 58.)

a: I IV⁶ d: I⁶ V⁶₃ I⁶ IV V⁷₂ I C: I VI⁶ a: I⁶ V⁶₃ I⁶ IV V⁷₂ I

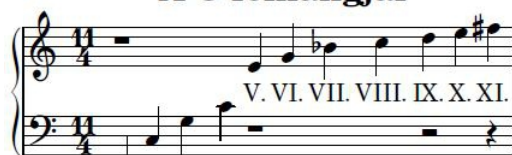
59.) 60.)

e: I I⁶ C: I I⁶ IV⁶ d: I⁶ II⁶₅ III⁶₅ V⁷₂ I

Ha a kezdőhangnembben feltüntetett utolsó akkord alatt szerepel a célhangnembeli megnevezés is, akkor a moduláció diatonikus. Kivéve, ha a két megnevezés közt $\sharp$ jel van, ekkor a moduláció enharmonikus. Ha az előző két mondatban szereplő feltételek egyike sem teljesül, akkor a moduláció biztosan kromatikus.

I. Ábrák

A C felhangjai



A) I. II. III. IV.



C-dúr skála a jóltemperált zongorán



C) T1 B1 K2 N2 B2 K3 N3 T4 B4 sz5 T5 B5 K6 N6 B6 K7 N7 T8



D) K D D K K K D K K K D D K

A jóltemperált zongora egy oktávnál nem nagyobb hangközei. A D-vel jelöltek disszonánsak. A K-val jelöltek konzonánsak, de a velük enharmonikus összes többi hangköz disszonáns.



E) 5 8 3

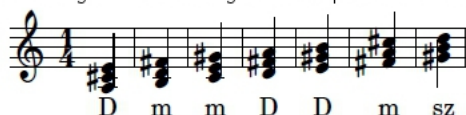


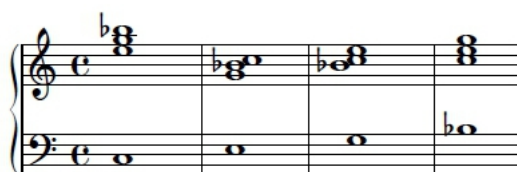
F) Alap Szext Kvartszext

G) Az a-moll hangnem skálahangokból felépülő hármashangzatai



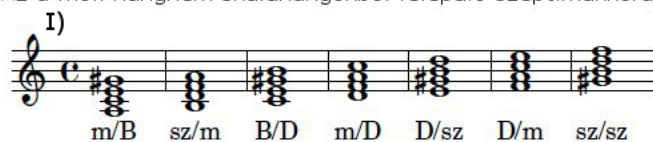
Az A-dúr hangnem skálahangokból felépülő hármashangzatai



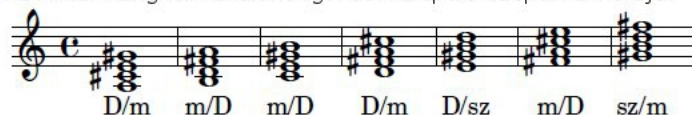


H) Szeptim Kvintszext Terckvart Szekund

Az a-moll hangnem skálahangokból felépülő szeptimakkordjai



Az A-dúr hangnem skálahangokból felépülő szeptimakkordjai



Modális skálák I. fokú hangjai

Példa összhangzatos modális skálára: összhangzatos dór

Az A alaphangú hangnemek skálái



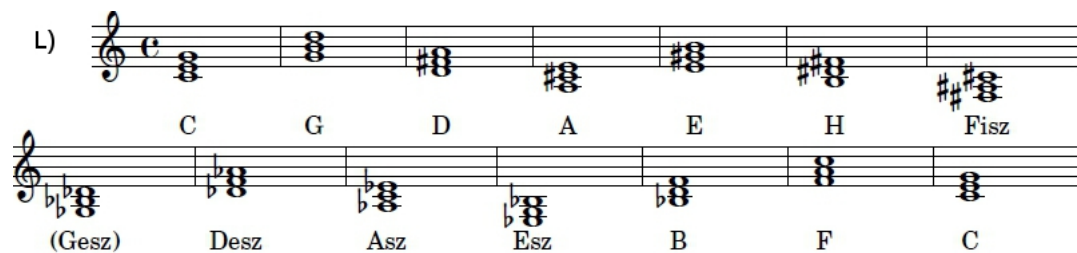
összhangzatos a-moll skála



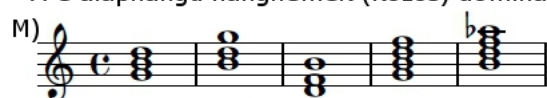
pikárdiai terces a-moll skála



A-dúr skála

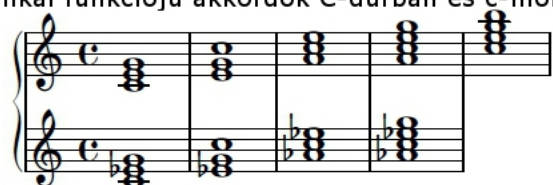


A C alaphangú hangnemek (közös) dominánsai



C-dúrban: V V⁶ VII⁶ V⁷ VII^{7b}
(pik.) c-mollban: V^b V^{6b} VII^{6b} V^{7b} VII^{7b}

Tonikai funkciójú akkordok C-dúrban és c-mollban



N) I I⁶ VI VI⁷ (I⁷)

Szubdomináns funkciójú akkordok a C-dúr és a c-moll skálában



o) IV IV⁶ II II⁶ II⁷



P) a cis f



Q) g b cisz e



R) Szext Kvintszext Terckvart Szext Kvintszext Terckvart
C-dúr a-moll (pikárdiai terces is)



S) C-dúr: F-dúr: