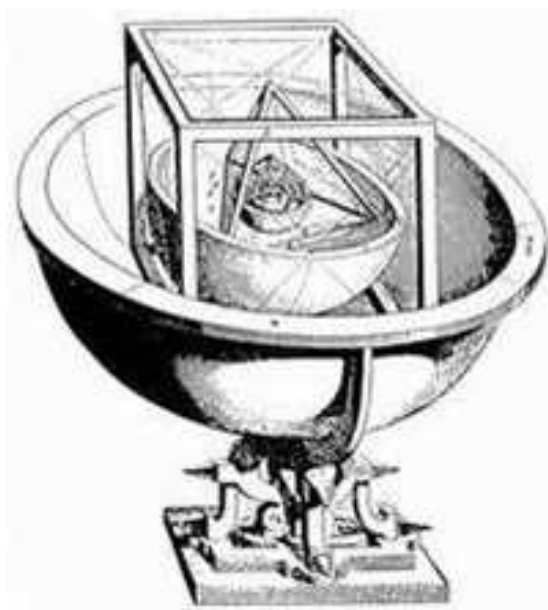


Csodálatos geometria
avagy
a kapcsolatteremtés tudománya.

G.Horváth Ákos

2011



1. ábra. Kepler modellje a világegyetemről

Tartalomjegyzék

Előszó helyett...	vii
Bevezetés	xi
1. Abszolút geometria	1
1.1. Az alapok	1
1.1.1. Illeszkedés	2
1.1.2. Rendezés	2
1.1.3. Egybevágóság	7
1.1.4. Folytonosság	9
1.2. Abszolút tételek	11
1.3. Euklidész párhuzamossági axiómája	20
1.4. Párhuzamosság a hiperbolikus síkon	22
1.5. Merőlegesség az abszolút terekben	32
1.6. Egyenesek kölcsönös helyzete a térben	36
1.7. Trigonometria	41
1.8. Euklidész	45
1.9. Bolyai	53
1.10. Lobacsevszkij	61
1.11. Hilbert	67
2. Elliptikus és projektív síkgeometriák	73
2.1. Elliptikus sík	73
2.2. Projektív sík	75
2.2.1. Illeszkedési sík és a Desargues tétel	76
2.2.2. Projektív sík és a Pappous-Pascal tétel	88
2.2.3. Kettősvizony	94
2.2.4. Kúpszeletek	96
2.3. Kúpszeletek az Euklidészi térben	98
2.3.1. Ellipszis	100
2.3.2. Hiperbola	105

2.3.3.	Parabola	111
2.3.4.	Kúpszelet és egyenes metszéspontjai	111
2.3.5.	A metrikus alapfogalmak projektív jellemzése	117
2.3.6.	Az affinitások használata kúpszeleteknél	121
2.3.7.	Közös fókusz, Ivory tétele	129
2.4.	Pascal	133
2.5.	Riemann	149
3.	Egybevágóságok szintetikus kezelése	163
3.1.	Az euklidészi sík egybevágóságai	163
3.2.	A hiperbolikus sík egybevágóságai	167
3.3.	Az euklidészi tér egybevágóságai	170
3.4.	Klein	177
4.	Modellek	185
4.1.	Ellenpélda modellek	185
4.1.1.	A kombinatorikai modell	185
4.1.2.	A rendezett egyenes ötponútú modellje	186
4.1.3.	A Fano-féle hétponútú sík	186
4.1.4.	Veronese példája nem Archimédeszi rendezett egyenesre	187
4.1.5.	Moulton példája nem Desargues-i síkra	188
4.1.6.	Nem-archimédeszi kommutatív számtest	189
4.2.	Poincare gömb és féltér modellje	189
4.2.1.	Inverzió és tükrözés	190
4.2.2.	A féltérmodell és a normáltranszverzális	194
4.2.3.	Ciklusok és szférák	196
4.2.4.	Egybevágóságok a fűlsíkmodellben	197
4.3.	A Cayley-Klein vagy projektív modell	199
4.3.1.	Térelemek kölcsönös helyzete, valós projektív tér . . .	199
4.3.2.	Térelemek merőlegessége a projektív modellben . . .	200
4.4.	A körmodellek megfeleltetése	202
4.5.	A hiperboloid modell	207
4.6.	Az euklidészi sík modelljei	212
4.6.1.	A paraszféra	212
4.6.2.	A hiperciklus modell	213
4.7.	Az elliptikus illetve szférikus modellek	214
4.8.	Cayley	217
	Középszó	227

5. Analitikus geometria	229
5.1. Vektorok a 3-dimenziós euklideszi térben	229
5.2. Egyenestartó leképezések E^3 -ben	235
5.2.1. O fixpontú tükrözések, merőleges vetítések, forgatások.	237
5.2.2. Pontok homogén koordinátái	240
5.3. Az n -dimenziós euklideszi tér	246
5.3.1. Másodrendű felületek osztályozása.	250
5.4. Az n -dimenziós hiperbolikus tér	254
5.4.1. Távolság	255
5.4.2. Egybevágóságok	256
5.5. Az n -dimenziós szférikus tér	267
5.5.1. Elemi formulák	267
5.5.2. Nevezetes vonalak	275
5.5.3. Egybevágóságok	278
5.6. Descartes	279
6. A térfogatfogalom	293
6.1. Terület az euklidészi síkon	294
6.2. Terület a hiperbolikus síkon	299
6.3. Térfogat az euklidészi térben	303
6.3.1. Max Dehn tétele	304
6.3.2. Cavalieri-elv	305
6.4. Integrálfogalmak	307
6.4.1. Jordan mérték és a Riemann integrál	307
6.4.2. Lebesgue mérték és Lebesgue integrál	309
6.5. Hiperbolikus térfogat	312
6.5.1. Paraciklus koordinátarendszer	313
6.5.2. Térfogat a féltérmodellben	315
6.5.3. Derékszögű és gömbi koordinátarendszer	316
6.5.4. Térfogat a Cayley-Klein modellben	322
6.5.5. Konkrét térfogatok	323
6.6. Szférikus térfogat.	331
6.7. Poincare	335
7. Poliéderek	345
7.1. Topológiai alapfogalmak.	345
7.2. Konvex poliéderek	349
7.2.1. Az euklideszi eset	349
7.2.2. A hiperbolikus eset	351
7.3. Euler tétel	352
7.3.1. A konvex és csillagszerű poliéderek esetei	352

7.3.2.	Zárt poliedrikus felületre vonatkozó bizonyítás	354
7.3.3.	Az n -dimenziós formula	356
7.3.4.	Euler-Poincare formula	358
7.3.5.	Cauchy-féle poliéder tétel	366
7.4.	A csodák birodalma	372
7.4.1.	Szabályos poliéderek kombinatorikus típusai	372
7.4.2.	Háromdimenziós szabályos poliéderek	374
7.4.3.	Arany metszés	378
7.4.4.	Különleges testek	393
7.5.	n -dimenziós szabályos poliéderek	399
7.5.1.	Kombinatorikus típusok	402
7.5.2.	Szimplex, kocka, keresztpolitóp	404
7.5.3.	Négydimenziós szabályos poliéderek	407
7.6.	Euler	417
7.7.	Euklidész: Elemek XII. és XIII. könyvei	421
A	A téridő	427
A.1.	A skaláris szorzat általánosításai	427
A.1.1.	Fél-skaláris szorzat	427
A.1.2.	Indefinit-skaláris szorzat	433
A.1.3.	Fél-indefinit skaláris szorzatos tér	434
A.2.	Általánosított tér-idő modell	436
A.2.1.	A modell definiálása	437
A.2.2.	Differenciálgeometria általánosított téridő modellben	441
A.3.	Négy fontos hiperfelület	452
A.3.1.	A H képzetes egységgömb	452
A.3.2.	A de Sitter gömb	458
A.3.3.	A fénykúp	462
A.3.4.	A beágyazó $(V, [\cdot, \cdot]^-)$ tér egységgömbje	463
A.4.	Elő-sokaságok az általánosított téridő modellben	466
A.4.1.	Ívhossz, görbület, Meusnier-tétel	467
A.4.2.	H^+ izometriái	472
A.5.	Minkowski	479
	Utószó helyett	493
	Böngésző	495
	Ábrák jegyzéke	506
	Tárgymutató	507

Előszó helyett...

Előszó helyett álljanak itt [Blaise Pascal](#) örökérvényű gondolatai a geometriáról, az igazságról, az útról, annak kereséséről és az emberi szívről.

∞ ∞ ∞

... Kétfajta gondolkodás létezik tehát: az egyik gyorsan és teljes mélységükben felfogja az alaptételekből származó következményeket, ezt nevezhetjük hibátlan gondolkodásnak; a másik egyszerre sok törvényt képes felfogni, anélkül, hogy összezavarná őket, és ez az igazi geometriai gondolkodás. Az egyik az értelem ereje és tévedhetetlensége, a másik az értelem átfogóképessége. Mármost e kettő nagyon jól meglehet egymás nélkül, az emberi szellem ugyanis egyaránt lehet erős és ugyanakkor korlátolt, vagy átfogó, de ugyanakkor gyenge. ...

∞ ∞ ∞

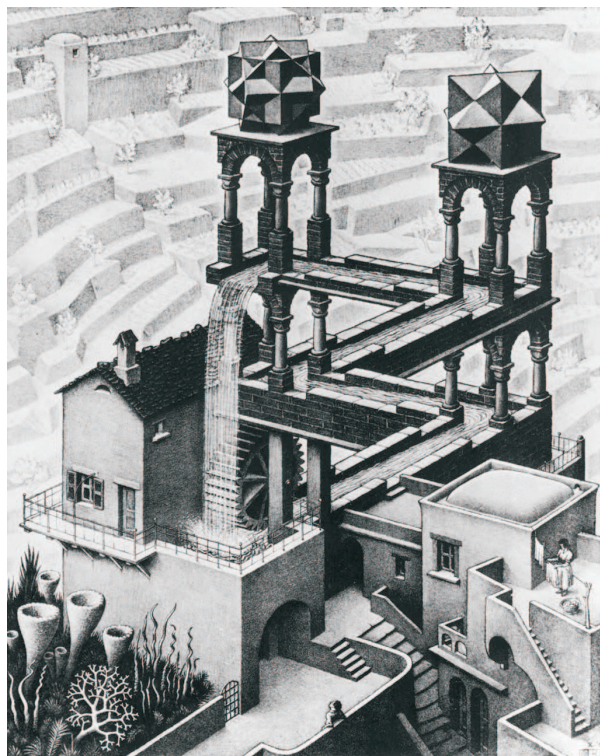
A magunk lelte magyarázatok általában jobban meggyőznek bennünket, mint azok, amelyek másoknak jutottak eszükbe.



2. ábra. Leonardo tanulmánya Vitruvius arányairól

Sohasem magukat a dolgokat keressük, hanem a dolgok keresését.

Nemcsak eszünkkel ismerjük meg az igazságot, hanem szívünkkel is. Ez utóbbi révén fedezzük fel az alapelveket, s az okoskodás, melynek semmi szerepe sincs benne, hiába igyekszik cáfolni őket. ... Mert az olyan alapelvek ismerete, mint az, hogy van tér idő, mozgás, számok, oly szilárd, amilyen egy sincsen okoskodásainkkal megszerezhető ismereteink között. ...



3. ábra. Escher vizesése

Amikor valamely művet írunk, legutoljára tudjuk meg, mivel is kezdjük.



4. ábra. Botticelli: Szent Ágoston

Mi hát az idő? Ha senki sem kérdezi, tudom; ha kérdik tőlem, s meg akarom magyarázni, nem tudom. Merem állítani, hogy egyet tudok; azt tudniillik, hogy nem volna múlt idő, ha nem volna mulandóság; nem volna jövő idő, ha nem volna jövőendő történés; nem volna jelen idő, ha egyáltalán semmi sem volna.

Szent Ágoston: Vallomások XI.könyv

Bevezetés

Akár akarjuk, akár nem, a geometria születésünk pillanatától, halálunkig kíséri életünket, hiszen elsődleges tárgya a minket körülvevő világ. A geometriai törvényszerűségek figyelembe vétele nélkül, nem alakulhatott volna ki munkaeszköz, szálláshely, közlekedési eszköz, emberi civilizáció.

Minden gyerek megtanulva néhány szabályt, automatikusan, módszerként használja a geometriát, tudja, hogy a nagyobb tárgy nem fér a nála kisebb dobozba; ha ügyesen pakolja el holmiját több fér a fiókba; a háromlábú szék nem billeg, mint a négylábú, habár könnyebb felborulni vele; megtalálja a legrövidebb utat otthona és iskolája között, hogy minél tovább aludni tudjon reggel. Amikor rajzol, a perspektíva szabályait alkalmazza, hogy kétdimenziós képe hűebben adja vissza a lerajzolt háromdimenziós tárgyat, elcsodálkozik a vonatsinpár összetartásán, rájön, hogy a nagy dolgok is kicsinek látszanak, ha messze vannak tőlünk. Előbb vagy utóbb felismeri a derékszög és párhuzamosság szerepét, maga is elkezdi alkalmazni mondjuk szobájának rendberakása közben. Tudja, mi a kör, gömb, négyzet és kocka, ezek definíciójára magától is rátalál. Egyszóval számára a geometria a megismerés módszere.

Nem véletlen tehát, hogy a matematika megismerésének módszere éppen a geometria vizsgálata nyomán alakult ki a jelenleg elfogadott axiomatikus formára.

Az axiomatika kezdetben azon illúzióval kecsegtetett, hogy az emberi kíváncsiság a logika szabályainak alkalmazásával maradéktalanul és eldönthető módon kielégíthető. Ez a tézis a múlt század elején végérvényesen megdőlt. Jelenleg úgy gondoljuk, hogy érdemes axiomatikus alapokon logikailag jól követhető rendszereket kialakítani, azokat tanulmányozni, de ha a rendszer keretein belül felmerülő valamely kérdésre nem tudunk választ adni, azon sincs mit csodálkozni. Ilyen esetben rendszert változtatunk, az adott kérdést megválaszolni képes új rendszer keretén belül gondolkozunk tovább.

Evvel persze a matematikai megismerés módszere is beáll a sorba, követi a legegyszerűbb mintát, a gyerek felnőtté válásának folyamatát. Kinőve a kiságyat az élettér a szoba lesz, szoba viszont több is van a lakásban, mindegyik más érdekességet tartogat, majd következik az óvoda sok-sok újabb szobá-

val és a közlekedés lehetőségével, stb.... A válogatást az érzelmek irányítják, azt a szobát inkább választjuk tartózkodási helyünknek, melyben szeretünk lenni, mint azt, ahol nem. Ugyanakkor meg sem próbáljuk a létező összes szobát figyelembe venni döntéseink során, adott helyiségek közül választjuk ki a pillanatnyilag legmegfelelőbbet. A geometria a kapcsolatteremtés legtermészetesebb módszere, kapcsolatot hoz létre a matematika különböző ágai között a szemléltető gondolkodás útján; matematika, elméleti fizika és kísérleti fizika hármásában a modellalkotás segítségével; matematika és mérnöktudományok között a tér szerkezetének leírása és ábrázolása útján, matematika és művészet között a logikai és esztétikai szépség együttes megjelenésének tárgyaként.

Jelen könyv szerzője nem akar bevezetni a geometriába, hiszen úgy gondolja, hogy ezen minden emberi lény a neki fontos mértékben már túlesett, nem akarja megmondani, hogy mi a geometria, mert úgy gondolja igazából nem lehet, és különösképpen nem akarja megmondani mi fontos és mi hasznos a geometriában mert úgy gondolja ezen kérdésekre adható válaszok nem lehetnek örökérvényűek. Szeretné könyvében vezérfonálnak megőrizni a bennünk létező gyerek rácsodálkozását mindarra ami szép, arról írni, ami tetszik neki és úgy, ahogy ez geometriai munkássága során kialakult benne.

Ha a könyv olvasása során örömet okoz, már elérte célját. Haszonnal forgathatja mindaz, aki geometriát középiskolai, egyetemi szinten tanul, vagy csak érdeklődik a könyvben feldolgozott területek iránt. Javasolható továbbá mindazoknak, akiknek a szellemi élmény is tud örömet okozni.

Szeretném megköszönni a támogatás minden formáját, melyet a könyv elkészítése illetve megjelentetése kapcsán kaptam; családomnak a türelmet, tanáraimnak a megalapozott tudás megszerzésének a lehetőségét, hallgatóimnak a késztetést a könyv megírására és kollégáimnak a segítséget a kivitelezésben, mely eszmei és anyagi támogatásban egyaránt megnyilvánult.

G.Horváth Ákos



5. ábra. Vízcseppek (fotó: G.Horváth Csenge)

Babits Mihály: Bolyai

*„Semmiből egy új, más világot teremtettem.”
Bolyai János levele atyjához.*

Isten elménket bezárta a térbe.
Szegény elménk e térben rab maradt:
a kapzsi villámölyv, a gondolat,
gyémántkorlátját még csak el sem érte.

Én, boldogolván azt a madarat
ki kalitjából legalább kilátott,
a semmiből alkottam új világot,
mint pókhálóból sző kötél a rab.

Új törvényekkel, túl a szűk egen,
új végtelent nyitottam én eszemnek;
király gyanánt, túl minden képzetén.

kirabolván kincsét a képtelennek
nevetlek, mint Istennel osztozó,
vén Euklides, rab törvényhozó.

1. fejezet

Abszolút geometria

1.1. Az alapok

A matematikához nem vezet királyi út.

Euklidész

Az alapok kérdésében nehéz eredeti módon nyilatkozni. Monográfiák tartalmazzák az axiomatikus vizsgálatok történetét, legfontosabb személységeinek munkásságát, azok eredményeit, az eredmények értelmezéseit és az értelmezések kritikáit. Számos könyv és tanulmány foglalkozik a filozófiai és módszertani következményekkel, tehát mindezekről még egyszer írni felesleges. A szépség, amit egy szisztematikus felépítés rejt, és az öröm, amit annak készítése okoz, továbbá látni, ahogy lépésről-lépésre helyükre kerülnek a dolgok, nem mindennapi élmény. Ahogy az első találkozásról mondja Ady Endre "Vajjon milyennek láttál?" c. versében:

Minden vagyok, amit vártál

Minden vagyok, amit nem sejtst

Minden vagyok, mi lehetnék.

Ebben a fejezetben ezt az élményt próbáljuk tolmácsolni. Alapfogalmakat, alaprelációkat definiálunk, ezekre vonatkozóan alaptételeket, axiómákat rögzítünk bizonyítás nélkül. Újabb definíciók kimondása után ezekre vonatkozó állításokat fogalmazunk meg, melyeket már bizonyítottunk is. Nem törekszünk precíz felépítésre, de szeretnénk áttekinteni a geometriai fogalmak megjelenésének pontos helyét. Axiómarendszerünk, alapvetően a Hilbert-féle axiómarendszer, de a könnyebb haladás érdekében a szükségesnél erősebb axiómákat is megfogalmazunk.

1.1.1. Illeszkedés

A világ megismerésének, a létezők csoportosításának kulcskérdése, az összetartozó dolgok összetartozásának felismerése. A matematikában általában az *elemek* reláció bevezetése a szokásos megoldás, ez azonban aszimmetriát sugall, így a geometriai összetartozást a szimmetrikusabbnak tűnő illeszkedés fogalma alapján építjük fel.

Alapfogalmak: Pont, egyenes, sík.

Alapreláció: Illeszkedés.

Egy pont illeszkedik egy egyenesre vagy egy síkra. Egy egyenes illeszkedik egy síkra, ha pontjai illeszkednek rá.

I1. Axióma. *Két (különböző) pont egyértelműen meghatároz egy egyenest.*

I2. Axióma. *Három nem egy egyenesre illeszkedő pont egyértelműen meghatároz egy síkot.*

I3. Axióma. *Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes összes pontja illeszkedik rá.*

I4. Axióma. *Van négy, nem egy síkra illeszkedő pont.*

I5. Axióma. *Ha két síknak van egy közös pontja, akkor van egy további közös pontjuk is.*

Az első két axióma jellemzi az egyenes egyenesszerűségét illetve a sík síkszerűségét, a harmadik összekapcsolja az egyenes és sík fogalmát, a negyedik és ötödik pontosan három dimenzióra rögzíti terünk méretét.

Egy egyenesre, illetve egy síkra illeszkedő pontok esetében használhatjuk a *kollineáris*, illetve *komplanáris pontok* kifejezéseket is.

1.1.2. Rendezés

A világegyetem térben és időben létezik. Az időbeli létezés alapján természetesen képünk van a lineáris rendezés fogalmáról. Beszélhetünk korábban, egyidőben, vagy később megtörtént eseményekről. Ezeket minden nyelv meg tudja különböztetni egymástól. Természetes vágyunk, hogy a sorrendiség fogalmát a térbeli, egyidőben létező objektumok fogalmára is kiterjesszük, és azok között rendet, sorrendet teremtsünk. A rendezés gondolata elvezet számos komoly probléma felvetéséhez és megoldásához, továbbá új geometriai alapobjektumok bevezetéséhez. Így jelentősen hozzájárul a tér fizikai megismeréséhez is.

Az abszolút geometriák rendezése a „között” fogalma alapján

Alapreláció : „közte van”.

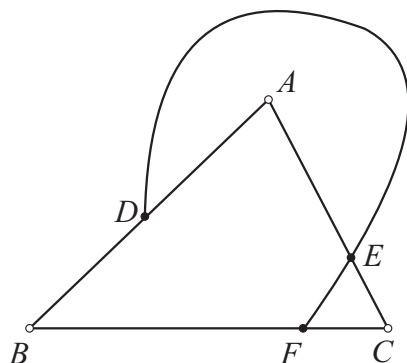
Jelölése: (ACB) , ami tehát azt is jelenti, hogy a három pont kollineáris és a C pont az egyenes két, A és B pontja között van.

R1. Axióma. Ha (ACB) , akkor (BCA) .

R2. Axióma. Az egyenes három pontja közül pontosan egy van a másik kettő között.

R3. Axióma. Az egyenes A, B pontpárjához található olyan C pont is, amire (ABC) teljesül.

R4. Axióma (Pasch). Legyen A, B, C három nem egy egyenesre illeszkedő pont, e pedig egy egyenes, amelynek valamely D pontjára (ADB) teljesül. Ha C nem illeszkedik e-re, akkor találunk olyan E pontot e-n, amire (AEC) vagy (BEC) egyike fennáll.



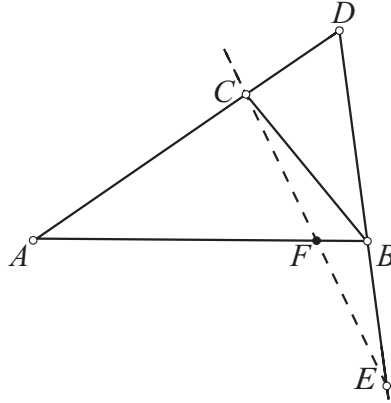
1.1. ábra. Miért nincs három belül metszett oldal?

Az első három axióma az egyenes pontjainak rendezéséről szól, de nem garantálja azt, hogy végtelen sok pontja van az egyenesnek. (Vessük össze az ötponstú rendezett egyenes modelljével.) Viszont értelmezhető az A, B végpontok által meghatározott *nyílt szakasz*, mint az egyenes azon C pontjainak halmaza, melyekre (ACB) áll fenn. Nem tudjuk azonban, hogy van-e pontja minden szakasznak. A Pasch-axióma alapján azonban értelmezhető

a *félegyenes*, *félsík* és *töröttvonal* fogalma, beszélhetünk *szögvonalakról*, és *egyszerű zárt töröttvonalról*. Értelmezhető továbbá a konvexitás is. Mindezek tulajdonságairól azonban lényegében semmit sem tudunk. Az axióma csoport „erős” axiómája a már említett Pasch-axióma, amely már a sík pontjait segít rendezni. A következő egyszerű állítások minden további vizsgálat alapját képezik.

1.1.1. Lemma. *A Pasch-axióma kimondásában szereplő (AEC) és (BFC) relációk közül pontosan az egyik teljesül. Tehát, ha (ADB) fennáll, akkor (AEC) és (BFC) nem teljesülhet egyszerre.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy mindkét reláció igaz. Tegyük fel továbbá, hogy (DEF) teljesül. Tekintsük a B, D, F nem kollineáris ponthármaszt és az AC egyenest. Mivel feltételeink szerint (BDA) és (DEF) fennállnak, az AC illetve BF egyenesekre nézve a Pasch-axióma (BCF) teljesülését követeli meg. Ez pedig ellentmond (BFC) -nek. $\square$



1.2. ábra. Minden szakasznak van pontja!

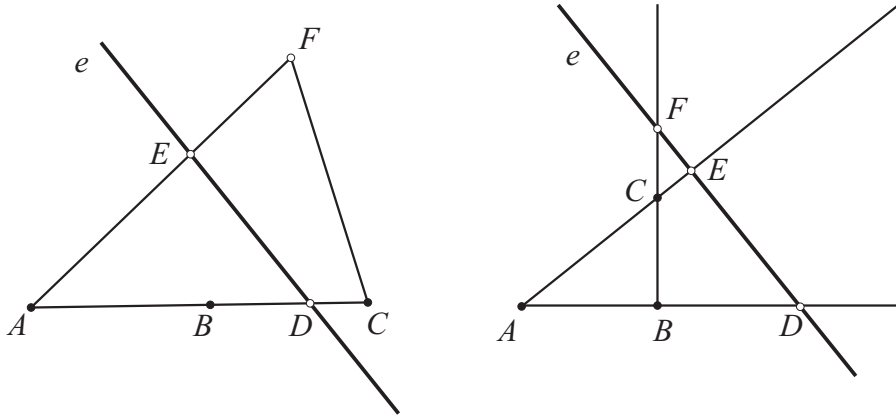
1.1.1. Tétel. *A szakasznak van pontja.*

Bizonyítás: Tekintsük az AB pontpár által meghatározott szakaszt. Illeszkedési axiómáink szerint van olyan C pont, mely nem illeszkedik az AB egyenesre. Az AC egyenesen fel tudunk venni egy D -vel jelölt pontot, melyre (ACD) teljesül. D nem lehet B így a BD egyenesen is találunk egy E pontot, melyre (DBE) teljesül. Az EC egyenesre és az A, D, B nem kollineáris ponthármasra alkalmazva Pasch axiómáját, olyan F pont létezése adódik, melyre (AFB) teljesül. $\square$

1.1.1. Következmény. *A szakasznak és így az egyenesnek is végtelen sok pontja van. Valóban, egymásba skatulyázott szakaszokkal újabb és újabb pontok szerkeszthetők, melyek az előző nyílt szakaszoknak pontjai.*

További alapvető fogalom a *félsík* fogalma. Ennek bevezetésére is lehetőségünk nyílik. Egy sík egy adott egyenesére nem illeszkedő két pontját az egyenesre nézve *ekvivalensnek* nevezzük, ha az általuk meghatározott zárt szakasz nem tartalmaz az egyenesre illeszkedő pontot. Definíció szerint minden pont ekvivalens magával.

1.1.2. Lemma. *Két pont egy adott e egyenesre vonatkozó ekvivalenciája ekvivalencia reláció, melynek két osztálya van.*



1.3. ábra. Az egyenesre vonatkozó ekvivalencia tranzitív

Bizonyítás: Mivel a reflexivitás és a szimmetria nyilvánvaló, csak a reláció tranzitivitását kell belátnunk. Legyen először A, B, C nem kollineáris pont-hármas. Ha A ekvivalens B -vel, és B ekvivalens C -vel, akkor A ekvivalens C -vel is, hiszen ellenkező esetben e -nek lenne olyan D pontja, amelyre (ADC) állna fenn, és ez ellentmondana Pasch axiómájának. Ha pedig a három pont egy egyenesre illeszkedik, tekintsünk először egy E pontot, amely e -nek egy D -től különböző pontja, és vegyünk fel egy F pontot, melyre (AEF) teljesül. Az A, F, C nem kollineáris ponthármasra és e -re alkalmazva a Pasch-axiómát, a $D \in e$, (ADC) , (AEF) feltételekből adódik, hogy C és F ekvivalensek. Ha most B és F ekvivalensek lennének, akkor a nem kollineáris eset miatt, A és F is ekvivalens pontpár lenne, ez F választása miatt nem lehetséges, így B és F nem ekvivalensek. Ekkor viszont megint a Pasch-axióma, valamint C és F ekvivalenciája miatt, B és C nem ekvivalensek. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

Legalább két osztály létezik, mert egy e -re nem illeszkedő pontot összekötve egy e -re illeszkedő ponttal, az **R3.** axióma alapján találunk a ponttal nem ekvivalens pontot. Másrészt, ha lenne három osztály, ezekből választva

egy-egy A, B, C pontot, nem kollineáris pontokhoz kéne jutnunk az 1. illeszkedési axióma szerint (az egyenesen levő pontok definíciójuk szerint vizsgálunkból ki vannak zárva). Ekkor viszont e és A, B, C egy a Pasch-axiómának ellentmondó konfigurációhoz vezetne, ami szintén lehetetlen. Evvel utolsó állításunkat is beláttuk. $\square$

A fent kapott ekvivalencia osztályokat az egyenes által meghatározott *nyílt félsíkoknak* nevezzük. Ha a meghatározó egyenest is a félsíkhöz vesszük, *zárt félsíkról* beszélünk. *Félegyenes* (nyílt vagy zárt) egy egyenes egy őt nem tartalmazó félsíkhöz tartozó része.

Bevezethető a szögtartomány, szögvonala, töröttvonal, sokszög, sokszögtartomány fogalma, mert igazolható a síkbeli egyszerű zárt töröttvonalra kimondott Jordan-tétel. Eszerint a sík egy egyszerű zárt töröttvonala a síkot két tartományra bontja, és ezek egyike nem tartalmaz félegyeneset. Ez utóbbi a darabot, a töröttvonal mint sokszögvonala által meghatározott sokszögtartománynak nevezzük.

Jegyezzük meg továbbá, hogy az 1.1.2. Lemma bizonyításával analóg bizonyítás azt is mutatja, hogy adott szakasz pontjai által mint végpontok által definiált szakasz pontjai az eredeti szakasznak is pontjai.

Az elliptikus sík rendezése az „elválaszt” fogalma alapján

Amint azt a későbbiekben látni fogjuk, az abszolút síkon vannak nem metsző egyenesek. Ha olyan geometriát szeretnénk felépíteni, melyben minden egyenespár metsző, a rendezés fogalmát kell újragondolni. Szemléletesen világos, hogy az euklideszi síkból kiindulva definiálható egy őt tartalmazó „bővebb sík” – a *valós projektív sík* – melyben már bármely két egyenes metszi egymást. Olyan rendezési módszert kell bevezetni, melyből alkalmas specializálással az abszolút geometriák „közte van” fogalma a megkövetelt tulajdonságaival együtt adódik.

Alapreláció „elválasztás”.

Az elválasztás jelölése: $(ACBD)$, ami azt jelenti, hogy a négy pont kollineáris és az A, B pontokat a C, D pontok elválasztják.

ER1. Axióma. Ha $(ACBD)$, akkor $(BCAD)$ és $(CBDA)$.

ER2. Axióma. Az egyenes négy pontjából pontosan egyféleképpen alkotható két pontpár úgy, hogy azok elválasszák egymást.

ER3. Axióma. *Az egyenes tetszőleges A, B, D ponthármához található olyan C pont az egyenesen, amelyre $(ABCD)$ teljesül.*

ER4. Axióma (Pasch). *Legyen A, B, C három nem egy egyenesre illeszkedő pont, e és f pedig két egyenes, melyeknek $D \in e$ illetve $D' \in f$ pontjaira $(ADB D')$ teljesül. Ha C nem illeszkedik e -re és f -re sem, akkor találunk olyan E pontot e -n és E' pontot f -en, amelyekre $(AECE')$, $(BECE')$ egyike fennáll.*

Vegyük észre, hogy ha ideális egyenesként rögzítünk egy egyenest a fenti axiómákat kielégítő elliptikus síkon, és olyan pontnégyesekre alkalmazzuk az elválasztás fogalmát és axiómáit, melyeknek egyik eleme ezen egyenesre esik, éppen visszakaphatjuk a „közte van” fogalmát és tulajdonságait.

Valóban, legyen az ideális egyenes f . Ha valamely e egyenes f -hez illeszkedő pontja D , akkor további A, B, C pontjaira pontosan akkor teljesüljön (ABC) , ha eredetileg $(ABCD)$ állt fenn. Mivel az első elválasztásra vonatkozó axióma alapján feltehető, hogy D az utolsó pontja a felsorolásnak egy rögzített pontnégyes esetén, a „között” szimmetriája triviális. A második axióma szerint D az A, B, C pontok közül pontosan eggyel alkotja a maradék kettőt elválasztó pontpárt, így a „között” második rendezési axiómája szintén teljesül. Ha az egyenes két pontja A, B az f -en levő pontja pedig D , a harmadik axióma éppen a „között” harmadik axiómáját adja. Végül a negyedik axióma a Pasch axiómát adja, ha f -et ideális egyenesnek választjuk.

1.1.3. Egybevágóság

A világegyetem tetszőleges két létező objektuma nem tekinthető azonosnak. Ez a „kettő” szó alapvető jelentése. Egy véges axiómarendszer által leírt struktúra ezt sohasem teljesíti. A geometrián belül az egybevágóság fogalma hivatott eldönteni, hogy két objektum azonosnak tekinthető-e vagy sem. Érdekes felismerni, hogy milyen keveset kell elhinnünk ahhoz, hogy lényegében tetszőleges objektum párról eldönthessük az azonosság kérdését. A szimmetria kedvéért a szakaszok és a szögtartományok fogalmát párhuzamosan axiomatizáljuk. Ez nyilvánvalóan szükségtelen bővítéshez vezet, ahogy ezt a nagy elődök munkáiból láthatjuk.

Alapreláció: „szakaszok és szögek egybevágósága”.

Ha $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ két szakasz, az egybevágóságukat $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ jelöli.

E1. Axióma (Felmérési axióma). *Bármely egyenes bármely pontjából a pont által meghatározott mindkét félegyenesére felmérhető egy-egy, az adott szakasszal egybevágó szakasz.*

E2. Axióma. *Az egybevágóság ekvivalencia reláció.*

E3. Axióma (Felbontási axióma). *Két egybevágó szakasz felbontható páronként egybevágó részekre. Azaz ha $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ és C az $\overline{AB}$ szakasz egy pontja, akkor egyértelműen található az $\overline{A'B'}$ szakasznak olyan C' pontja, melyre $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ és $\overline{CB} \cong \overline{C'B'}$ egyaránt fennáll.*

E4. Axióma. *Bármely szögtartományhoz megadható egy vele egybevágó szögtartomány, melynek egyik szára egy előre adott félegyenes, másik szára pedig benne van a félegyenes tartóegyenese által meghatározott egyik előre adott félsíkban.*

E5. Axióma. *Ha két háromszög két oldala és a közrezárt szögük páronként egybevágó, akkor a harmadik oldalpárjuk is egybevágó.*

A Hilbert-féle axiómarendszerben az általunk használt felbontási axióma helyett az egybevágó szakaszok egyesítéséről szóló axióma szerepel. Eszerint egybevágó szakaszokhoz az egyenesükön csatlakoztatott egybevágó szakaszok uniója szintén egybevágó szakaszokat ad. A felbontási axiómának az egyesítési axióma következménye, hiszen ha vizsgált pontjainkra (ABC) illetve $(A'B'C')$ áll fenn, és $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ mellett feltesszük, hogy D a második egyenesnek egy olyan pontja, melyre $(A'B'D)$ és $\overline{AC} \cong \overline{A'D}$ egyaránt teljesülnek, akkor a felbontási axióma miatt $\overline{BC} \cong \overline{B'D}$ is fennáll. Ez a felmérési axióma miatt azt jelenti, hogy $D = C'$, vagyis teljesül az egyesítésre vonatkozó axióma is.

Az egybevágósági axiómák lehetőséget biztosítanak az összehasonlításra is. Bevezethetjük az egyenes szakaszain értelmezett nem negatív, valós értékű additív függvényt, a szakasz hosszát, továbbá a „kisebb-nagyobb” relációt is. Ez alapozza meg a mérést. Bevezethető a derékszög fogalma a síkot négy egybevágó részre osztó egyenespár által meghatározott szögtartományok mértékeként. Értelmezhető a merőleges vetítés, és így a koordináta fogalma is. Rendelkezésünkre áll tehát a derékszögű vagy Descartes-féle koordinátarendszeren alapuló analitikus geometria közel teljes eszköztára.

Bevezethető az egybevágósági leképezés fogalma is. Azonban még sok természetesnek gondolt állítást találhatunk, amelyek az eddigi axiómák alapján nem bizonyíthatók. Ezek belátásához olyan további axiómákra van szükség, amelyek megalapozzák a valós számhalmaz és az eddigi axiómák alapján megismert egyenes pontjai között fennálló kölcsönösen egyértelmű kapcsolat igazolhatóságát. Ahogy a racionális számokból kiindulva további axióma nélkül nem juthatunk el a valós számok halmazához, úgy az első három

axiómacsoportnak eleget tevő egyenes sem rendelkezik a megkívánt szintű „folytonossággal”. Így szükség van egy negyedik axiómacsoport felállítására is.

1.1.4. Folytonosság

A geometriai vizsgálatokban különböző pontokon lehet az egyenes folytonosságának axiomatizálására irányuló lépéseket megtenni. A jelenlegi felépítés szerinti első lehetőség a szakasz fogalmának bevezetése után kívánczik a Dedekind nevéhez fűződő általánosan elfogadott axióma révén.

Axióma (Dedekind). *Tegyük fel, hogy az egyenes pontjaiból álló valamely nem üres, diszjunkt A, B halmazpárra teljesül, hogy az egyikhez tartozó pontpárt sohasem választ el a másikhoz tartozó pont. Ekkor található az egyenesen olyan pont, amely elválaszt valamennyi olyan pontpárt, melynek egyik eleme A másik eleme pedig B pontja.*

A Dedekind-axióma tovább élesíthető olyan halmazpárra, amely a fenti feltételekkel az egyenes pontjainak két diszjunkt A, B halmazra való felbontásához vezet. Ilyenkor pontosan egy elválasztó pont van.

Valóban, ha két elválasztó pont lenne, például C' és C'' , akkor ellentmondáshoz vezetne az a feltevés is, hogy ugyanahhoz a halmazhoz (pl. A -hoz) tartoznak, és az is, hogy különbözőkhöz. Az előbbi esetben ugyanis a $\overline{C'C''}$ szakasz pontjai is A -hoz tartoznának, ezért vagy egyikük sem elválasztó pont, vagy pedig nem teljesül a kiindulási feltétel B -re. A második esetben a $\overline{C'C''}$ szakasz egy D pontja C' -vel vagy C'' -vel azonos halmazhoz tartozik, viszont így az említett pont nem lehet elválasztó pont.

Hagyomány szerint a kiindulási halmazokat Dedekind-szeleteknek nevezzük. Ezzel az elnevezéssel az axiómát úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha az egyenes Dedekind-szeleteinek uniója, akkor egyértelműen meghatározott az egyenes egy pontja, amely a szeleteket elválasztja. A Dedekind-axióma és az illeszkedési valamint rendezési axiómák együttesen lehetővé teszik a Cantor-axióma bizonyítását. Ezen axióma a jól ismert Cantor-féle közöspont tétel metrikától mentes („gyenge”) alakja:

Axióma (Cantor). *Tegyük fel, hogy $\overline{A_i B_i}$ ($i = 1, 2, \dots$) zárt szakaszoknak egy megszámlálhatóan végtelen sorozata, melyre $\overline{A_i B_i} \supset \overline{A_{i+1} B_{i+1}}$ teljesül, azaz fennállnak az $(A_i A_{i+1} B_i)$, $(A_{i+1} B_{i+1} B_i)$ rendezések. Ekkor $\bigcap \overline{A_i B_i} \neq \emptyset$.*

Valóban, azon P pontok halmaza, melyekre $(PA_i B_i)$ áll fenn valamely i indexre legyen A , B pedig jelölje azon R pontok halmazát, melyekre valamely i indexszel $(A_i B_i R)$ teljesül. Világos, hogy A és B kielégítik a Dedekind

axióma feltételeit, ezért van olyan C pont, melyre minden $P \in A$ és $R \in B$ esetén (PCR) teljesül. Ez a C pont hozzátartozik mindegyik $\overline{A_i B_i}$ kiindulási zárt szakaszhoz. $\square$

Ezen a ponton igazolható, hogy az egyenes pontjainak halmaza nem megszámlálható, mert a Cantor axióma nem teljesülhet megszámlálhatóan rendezett ponthalmazra. Valóban, tegyük fel, hogy az egyenes pontjait egy (P_i) sorozatba rendeztük. Legyen $Q_1 = P_1, R_1 = P_2$ és ezt követően legyen $Q_2 = P_i$, ha P_i az első pont a sorozatban, amire $(Q_1 P_i R_1)$ fennáll. Mivel minden szakasznak van pontja ilyen indexet találunk. Hasonló módon definiáljuk R_2 -t a $(Q_2 P_k R_1)$ feltétel alapján. Világos, hogy a zárt szakaszokra $\overline{Q_1 R_1} \supset \overline{Q_2 R_2}$ fennáll. Az eljárást folytatva egy olyan zárt tartalmazkodó szakaszsorozathoz jutunk, melynek metszete nem tartalmazhat a (P_i) sorozatba tartozó pontot. (Ami nem szakaszvégpont az valamelyik szakasznak külső pontja.) Ez ellentmond Cantor axiómájának.

Ha egyenesünk pontjait valós számoknak szeretnénk megfeleltetni, föl kell használnunk az egyenes szakaszairól szóló egybevágósági axiómákat, amelyeket összefoglalóan *lineáris axiómáknak* is szoktunk nevezni. Ahhoz, hogy az egyenes pontjait rendezéstartó megfeleltetéssel leképezhessük a valós számok halmazába elegendő a Dedekind-axiómánál valamivel gyengébb Archimédeszi axióma is.

Axióma (Archimédeszi). *Legyen $\overline{AB}$ illetve $\overline{CD}$ az e egyenes két szakasza. Ekkor van olyan n természetes szám, és léteznek olyan C_i $i = 1, \dots, n$ pontok az e egyenesen, hogy minden i -re $\overline{C_i C_{i+1}} \cong \overline{CD}$, továbbá $\overline{C_1 C_n} \supset \overline{AB}$.*

Archimédeszi, de nem Dedekind-féle egyenes modellje lehet a valós szám-egyenes racionális pontjaiból álló ponthalmaz. Ezen egyenes egy szakasza a megfelelő közönséges szakaszhoz tartozó racionális pontok halmaza lesz. E modellben az egyenesen értelmezett axiómák – beleértve az Archimédeszi axiómát is – teljesülnek, de egy irracionális pontra „húzódó” szakaszsorozat metszete nem pontja az így értelmezett egyenesnek. Így nem teljesül a Cantor-axióma és vele együtt a Dedekind-axióma sem.

Fordítva, könnyen igazolható, hogy a Dedekind-axiómából a vizsgált feltételek mellett következik az Archimédeszi axióma. Jelentsen ugyanis a továbbiakban $\overline{C_1 C_n}$ egy a $\overline{CD}$ szakasz $(n - 1)$ -szer való sorozatos felmérésével adódó szakaszt. (Az egyszerűség kedvéért a sorozatos felmérést a vízszintesnek tekintett egyenes „bal oldala” felől képzeljük a „jobb oldal” irányában. Mivel ez a kifejezőmód könnyen pontosítható a továbbiakban használjuk ezen definiálatlan elnevezéseket is.) Legyen G a vizsgált félegyenes azon C pontjainak halmaza, melyhez találunk olyan n -et, hogy $C \in \overline{C_1 C_n}$ teljesül. Jelölje H a fenti módon nem lefedhető pontok halmazát. Ha az Archimédeszi

axióma nem teljesülne, a két halmaz Dedekind szeleteket ad, mert diszjunktak, és fennáll rájuk a „szelet” tulajdonság is. Így a Dedekind axióma szerint van olyan E pont, mely a két szelet valamennyi pontpárját elválasztja. Ha $E \in G$ akkor E -től jobbra is találunk lefedhető pontot, és E nem elválasztó pont, ha pedig $E \in H$ akkor E -től balra találunk további nem lefedhető pontot, és E ezért nem lehet elválasztó pont. Mivel az egyenes összes pontja G -hez vagy H -hoz tartozik ellentmondásra jutottunk.

Az általános Archimédeszi egyenest (ami nem teljesíti Dedekind axiómáját) rendezéstartó módon csak a valós számegyenes egy mindenütt sűrű részhalmazának tudjuk megfeleltetni. Ahhoz, hogy az egyenest kölcsönösen egyértelműen képezhessük a valós számegyenesre a Dedekind-axióma teljesülését is meg kell követelnünk.

Felmerül a kérdés, hogy van-e olyan rendezett, az egybevágóságok lineáris axiómáit is teljesítő egyenes modell, amely Archimédész axiómáját sem teljesíti. A kérdésre Veronese példája ad egy szép pozitív választ (lásd a 4. fejezetben).

1.2. Abszolút tételek

Minden pontból minden ponthoz húzható egyenes.

Euklidész I. I. posztulátum

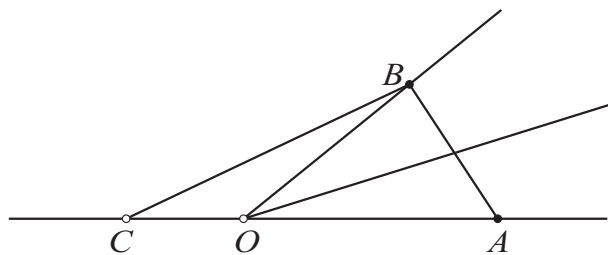
Ebben a fejezetben azon fontos állításokat mondjuk ki, melyek a párhuzamosság fogalmát készítik elő. Egyelőre tehát nem használjuk a párhuzamossági axióma egyik változatát sem. Így az abszolút geometria állításaihoz jutunk.

1.2.1. Lemma. *Ha egy szög különböző szárain választott két pontot egy szakasszal összekötjük, akkor a szög csúcsából kiinduló, a szögtartományban haladó tetszőleges félegyenes metszi a szakaszt.*

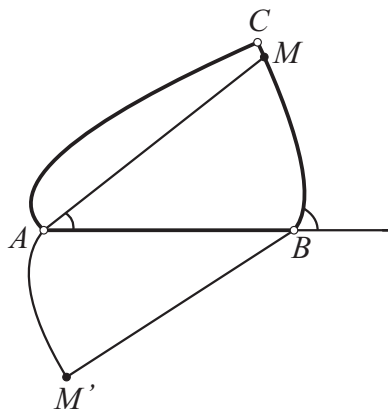
Bizonyítás: Tekintsük az AOB szög szarait összekötő $\overline{AB}$ szakaszt. Jelöljön C egy olyan pontot, amelyre (AOC) teljesül. Az $ABC_{\triangle}$ -re és a félegyenesre alkalmazva a Pasch-axiómát, az állítás azonnal adódik. $\square$

1.2.2. Lemma (a külső szögről). *A háromszög külső szöge nagyobb a nem mellette fekvő belső szögeknél.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük föl, hogy valamely $ABC_{\triangle}$ -ben az $A_{\angle}$ kisebb vagy egyenlő a B csúcsnál lévő külső szögénél. Ekkor a külső szöget az $A_{\angle}$ AB szára a szögtartomány belsejében fölmérve, a felmért külső szög másik



1.4. ábra. A szögtartománybeli félegyenések metszik a szárakat összekötő szakaszt

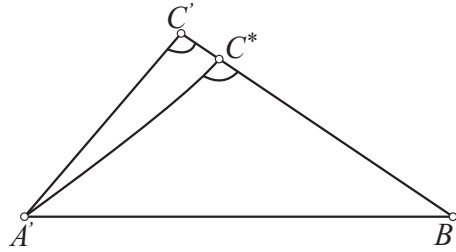


1.5. ábra. A külső szög lemmája

szára az $A_{\angle}$ belsejében halad. Az előző lemma szerint ez egy M pontban metszi a háromszög BC oldalát. Hosszabbítsuk meg a BC oldal egyenesét az AB egyenes által meghatározott C -t nem tartalmazó félsíkban, és mérjük fel rá az $\overline{AM}$ szakasz hosszát B -ből. Ha M' jelöli a kapott pontot, akkor az **E5.** axióma miatt az $ABM_{\Delta} \cong BAM'_{\Delta}$, és így az $MBA_{\angle}$ egybevágó az $M'AB_{\angle}$ -gel, vagyis az M, A, M' pontok kollineárisak. Ez viszont lehetetlen, tehát lemmánk állítása igaz. $\square$

1.2.1. Megjegyzés. *A fenti bizonyításból az is kiderül, hogy ha egy egyenest két másik egyenes ugyanakkora szög alatt metsz, akkor a két egyenesnek nincs közös pontja, nem metszik egymást. Tehát az abszolút geometriában mindig léteznek nem metsző egyenesek.*

1.2.3. Lemma (Két háromszög egybevágósága). *Két háromszög egybevágó, ha egy oldal valamint az oldalon lévő egyik szög és az oldallal szemközti szög a két háromszögben egybevágó.*

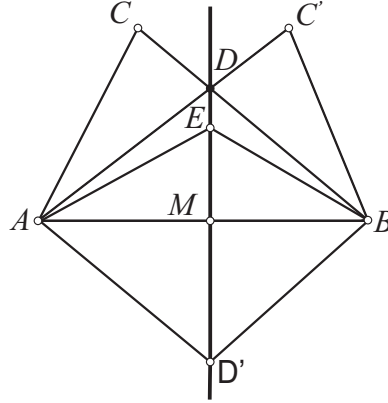


1.6. ábra. Egy oldal és két szög egyenlősége.

Bizonyítás: Tekintsük az ABC_{Δ} -et és az $A'B'C'_{\Delta}$ -et, amelyekben $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $ABC_{\angle} \cong A'B'C'_{\angle}$ és $BCA_{\angle} \cong B'C'A'_{\angle}$. Mérjünk fel a $B'C'$ oldalra B' -ből C' irányában egy $\overline{B'C}$ -vel egybevágó szakaszt, előállítva a C^* pontot. Ekkor $A'B'C^*_{\Delta} \cong ABC_{\Delta}$, így a $B'C'$ egyenest az $A'C^*$ és $A'C'$ egyenesek azonos szög alatt metszik. Ez azonban csak úgy lehetséges, ha $C' = C^*$, vagyis $ABC_{\Delta} \cong A'B'C'_{\Delta}$. $\square$

A továbbiakban két pont távolsága alatt az őket összekötő szakasz hosszát értjük. Szakasz felezőpontja a szakasz egy olyan pontja, mely a végpontoktól egyenlő távolságra van. A sík két egyenese merőleges egymásra, ha négy egybevágó tartományra bontják a síkot.

1.2.1. Tétel (A szakaszfelező merőlegeséről). *Tetszőleges szakaszhoz egyértelműen létezik a felezőpontján áthaladó, rá merőleges egyenes, a szakaszfelező merőleges, amelynek bármely pontja egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól.*



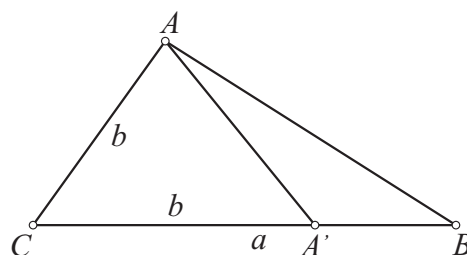
1.7. ábra. Szakaszfelező merőleges.

Bizonyítás: A bizonyítás első lépéseként az $\overline{AB}$ fölé szerkesszünk egy olyan háromszöget, melynek az alapon fekvő szögei egyenlők. Vegyünk először egy tetszőleges C pontot, ami nem illeszkedik az AB egyenesre, és tekintsük az ABC_{Δ} -et. Ha ebben az $\overline{AB}$ -n lévő szögek egyenlők, készen vagyunk. Ha pedig nem, akkor például $CAB_{\angle} > CBA_{\angle}$. Mérjük át $CBA_{\angle}$ -et $\overline{AB}$ -től a nagyobbik $CAB_{\angle}$ tartományba. Első lemmánk szerint a szögtartományban haladó szár egyenesre metszi $\overline{BC}$ -t egy D pontban, és ekkor ABD_{Δ} már rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Vegyük föl az ABD_{Δ} -gel egybevágó ABD'_{Δ} háromszöget is az AB egyenes által meghatározott másik félsíkban. Első lemmánkat ismét alkalmazva kapjuk, hogy $\overline{DD'}$ metszi $\overline{AB}$ -t egy M pontban. Mivel $AMD_{\Delta} \cong AMD'_{\Delta}$, ezért $DMA_{\angle} = D'MA_{\angle} = DMB_{\angle} = D'MB_{\angle}$, és így az előző lemma szerint $AMD_{\Delta} \cong BMD_{\Delta}$. Ez azt jelenti, hogy DD' áthalad $\overline{AB}$ felezőpontján és merőleges is rá. A DD' egyenes egy tetszőleges M -től különböző E pontja esetén $AME_{\Delta} \cong BME_{\Delta}$, és így E -nek az A és B pontoktól mért távolsága egyenlő. Végül jegyezzük meg, hogy a felmérési axióma miatt egy szakasznak csak egy felezőpontja lehet, így a szakaszfelező merőleges egyértelmű. $\square$

1.2.2. Megjegyzés. *Tételünk következménye, hogy az egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, továbbá, hogy ha egy háromszög egyik oldalán fekvő szögei megegyeznek, akkor a szögekkel szemben fekvő oldalak is egyenlők.*

1.2.4. Lemma. *A háromszög két szögének összege kisebb az egyenesszögnél.*

Bizonyítás: Valamely ABC_{Δ} -ben az A -nál és B -nél levő belső szögek összege kisebb, mint a B -nél levő belső és külső szögek összege, ami éppen az egyenesszög. $\square$



1.8. ábra. Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.

1.2.1. Következmény. *Egy egyenlőszárú háromszög szárszöge az egyenes-szög felénél kisebb, azaz mindig hegyesszög.*

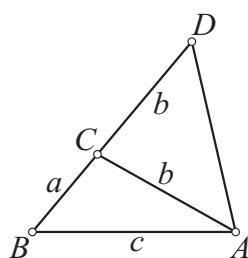
A továbbiakban gyakran utalunk szakasz hosszára. A szakaszokat anélkül is össze lehet hasonlítani, hogy mérőszámot rendelnénk a hosszukhoz, így a „ $<$ ” relációt minden további magyarázat nélkül használjuk. Ha ezzel ekvivalens módon a hosszaiknak megfelelő valós számokat hasonlítjuk, akkor a szokásos szakasz jelet abszolútérték jel használatával egészítjük ki, és így használjuk a fenti reláció jeleket.

1.2.5. Lemma. *A háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög és nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal található.*

Bizonyítás: Ha az ABC_Δ -ben $\overline{AC} < \overline{BC}$, a két oldal közös C csúcsából a $\overline{BC}$ -re felmérjük $\overline{AC}$ -t, előállítva az A' pontot. Így az $AA'C_\Delta$ egyenlőszárú. Az ábrának megfelelő tartalmazási viszonyokat figyelembe véve

$$CBA_\angle < CA'A_\angle = AAC_\angle < BAC_\angle.$$

A tétel második állítása pedig egyszerű logikai következménye a most bizonyítottoknak. $\square$



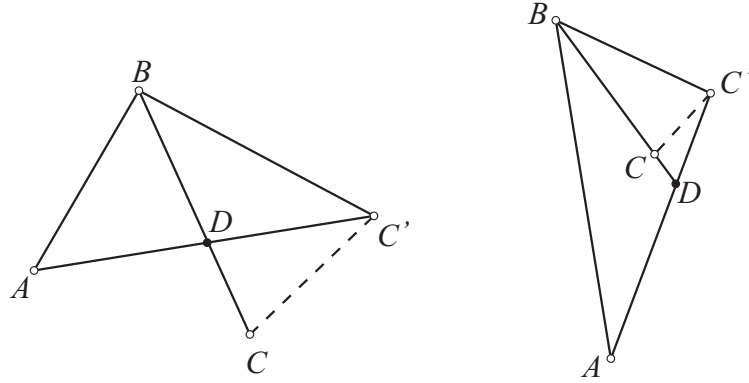
1.9. ábra. Háromszögegyenlőtlenség.

1.2.2. Tétel (Háromszögegyenlőtlenség). *A háromszög két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál.*

Bizonyítás: Mérjük fel a $b = \overline{AC}$ távolságot a BC oldal meghosszabbítására az 1.9. ábrának megfelelően. Ekkor az egyenlőszárú háromszögre vonatkozó korábbi észrevételünk alapján az ABD_Δ -ben $BDA_\angle < DAB_\angle$, így előző lemmánk szerint valóban fennáll: $a + b > c$. $\square$

1.2.2. Következmény. *Tételünk alapján indukcióval könnyen igazolható a töröttvonal egyenlőtlenség, miszerint ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ egy töröttvonal szögpontjai, akkor fennáll a $\sum_{i=1}^{n-1} \overline{A_i A_{i+1}} \geq \overline{A_1 A_n}$ egyenlőtlenség.*

1.2.6. Lemma (Kar lemma). *Ha két háromszög két-két megfelelő oldala egybevágó, a köztük levő szög pedig az első háromszögben kisebb, mint a másodikban, akkor a harmadik oldal az első háromszögben szintén kisebb, mint a másodikban.*



1.10. ábra. Kar lemma $n = 3$.

Bizonyítás: Legyen ABC_Δ és $A'B'C'_\Delta$ a feltételeknek megfelelő két háromszög. Nyilván feltehető, hogy $A = A'$, $B = B'$ és $ABC_\angle < A'B'C'_\angle$ továbbá, hogy C és C' az AB egyenes azonos oldalán helyezkednek el. Ekkor D -vel jelölve a BC egyenes és $\overline{AC'}$ szakasz (első lemmánk szerint létező) metszéspontját, a B, D, C pontok elhelyezkedésére két eset lehetséges: (BDC) és (BCD) .

Az első esetben a $\overline{BC} = \overline{BC'}$ egyenlőség miatt

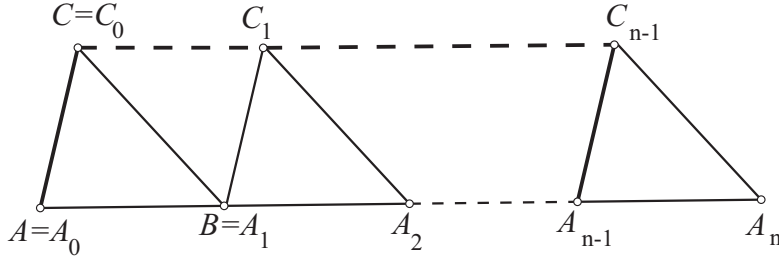
$$AC'C_\angle < BC'C_\angle = C'CB_\angle < C'CA_\angle$$

egyenlőtlenségek teljesülnek, és így $\overline{AC} < \overline{AC'}$ is fennáll (lásd az 1.10. ábra baloldala).

A második esetben a CBC'_Δ egyenlőszárú volta miatt $BCC'_\angle < \frac{\pi}{2}$, azaz $C'CD_\angle > \frac{\pi}{2}$. Így a $CC'D_\Delta$ -ben $C'CD_\angle$ a legnagyobb szög. Ezért $\overline{DC'} > \overline{DC}$,

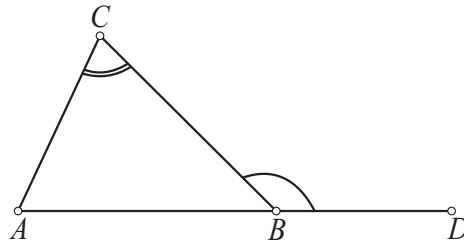
és így $\overline{AC'} = \overline{AD} + \overline{DC'} > \overline{AD} + \overline{DC} > \overline{AC}$ is fennáll (lásd az 1.10. ábra jobb oldala). $\square$

1.2.3. Tétel (Legendre első tétele). *Bármely háromszög szögeinek összege nem nagyobb az egyenesszögnél.*



1.11. ábra. Legendre első szögtétele.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy van olyan $ABC_{\triangle}$, amelyben a szögek összege egyenesszögnél nagyobb. Az $\overrightarrow{AB}$ félegyenesen vegyük föl ezen háromszög n darab egybevágó példányát úgy, hogy az AB -nek megfelelő oldalak csúcspontjai a félegyenes $A = A_0, B = A_1, A_2, \dots, A_n$ ekvidisztáns (egyenlő között) pontsorozatot alkossanak, míg a $C_0 = C, C_1, \dots, C_{n-1}$ harmadik csúcspontok ugyanazon félsíkhöz tartozzanak. A feltételünk miatt $\angle A_i C_i A_{i+1} > \angle C_i A_{i+1} C_{i+1}$ egyenlőtlenség teljesül minden $i = 0, 1, \dots, n-1$ -re. Ezért a kar lemma alapján $\overline{A_0 A_1} = \overline{A_i A_{i+1}} > \overline{C_i C_{i+1}} = \overline{C_0 C_1}$. Ugyanakkor a töröttvonal egyenlőtlenség miatt $\overline{A_0 C_0} + \overline{C_0 C_1} + \dots + \overline{C_{n-1} A_{n-1}} > n \cdot \overline{A_0 A_1}$ adódik. Ebből átrendezéssel $n \cdot (\overline{A_0 A_1} - \overline{C_0 C_1}) < \overline{A_0 C_0} + \overline{C_{n-1} A_{n-1}}$ összefüggéshez jutunk, ami n megválasztásának tetszőleges volta miatt ellentmond az Archimédieszi axiómának. $\square$



1.12. ábra. Külső szög tétel.

1.2.1. Definíció. *Egy háromszög szögeinek összegét egyenes szögre kiegészítő szöget a háromszög defektusának nevezzük és δ -val jelöljük.*

1.2.4. Tétel (külsőszög tétel). *A háromszög egyik (belső) szögéhez tartozó külső szöge nem kisebb a másik két (belső) szögének összegénél.*

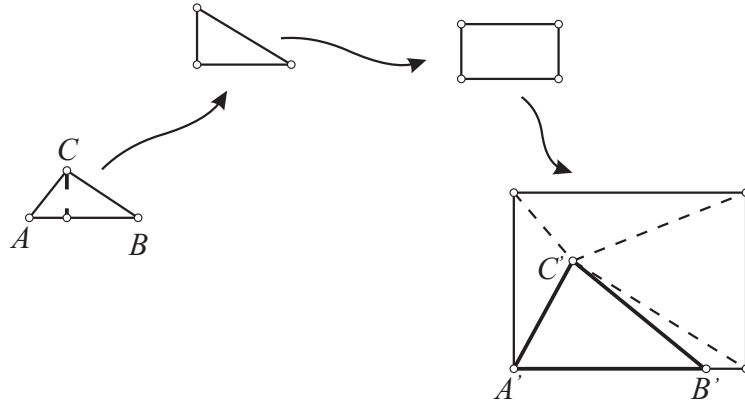
Bizonyítás: A Legendre első szögtétele miatt

$$DBC_{\angle} = \pi - ABC_{\angle} \geq CAB_{\angle} + ACB_{\angle}$$

teljesül az állításnak megfelelően. $\square$

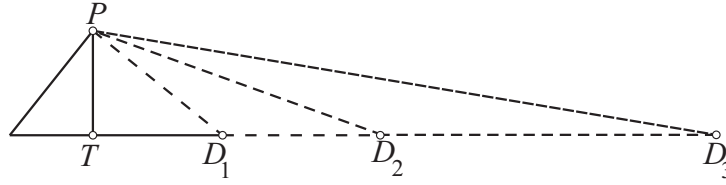
1.2.3. Megjegyzés. *Tetszőleges (zárt, önmagát nem metsző) sokszög átlókkal háromszögekre bontható. A felbontásban szereplő háromszögek defektusainak összegével definiálhatjuk a sokszög defektusát, ami láthatóan a sokszög belső szögei összegének $(n - 2)\pi$ -től való eltérése. (Így nem függ a felbontástól!)*

1.2.5. Tétel (Legendre második tétele). *Ha van olyan háromszög, amely defektusa nulla, akkor valamennyi háromszög defektusa nulla.*



1.13. ábra. A második szögtétel.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az ABC_{Δ} defektusa nulla. Mivel a defektus nem negatív, additív függvény, így a háromszög legnagyobb szögéhez behúzott magasságvonal két nulla defektusú derékszögű háromszögre bontja az ABC_{Δ} -et. Az egyiket egy vele egybevágó példánnyal egyesítve, egy nulla defektusú négyszöghöz jutunk, melynek két egymás melletti szöge derékszög. Van tehát téglalap a síkon. Ebből a téglalaphoz kiindulva, ilyenek oldal menti egyesítésével tetszőleges korlátos tartományhoz – így egy tetszőleges $A'B'C'_{\Delta}$ -höz is – találunk egy őt lefedő téglalapot az Archimédeszi axióma alapján. Az $A'B'C'_{\Delta}$ -et az 1.13.ábra szerint lefedő téglalapot bontsuk fel az ott látható módon, legfeljebb öt diszjunkt háromszög uniójára. Ezek mindegyikében nulla a defektus az additivitás és nem negativitás miatt, így $A'B'C'_{\Delta}$ defektusa is nulla. $\square$

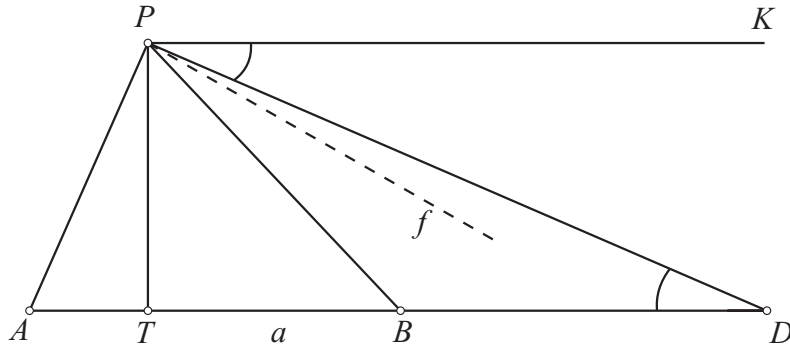


$$PD_1 = D_1 D_2, \quad PD_2 = D_2 D_3 \quad \dots$$

1.14. ábra. Miért tart nullához a $PD_i T_\angle$?

1.2.6. Tétel. *A háromszögek defektusa pontosan akkor nulla, ha síkjában bármely a egyeneshez egy rá nem illeszkedő P ponton át egyetlen nem metsző egyenes húzható.*

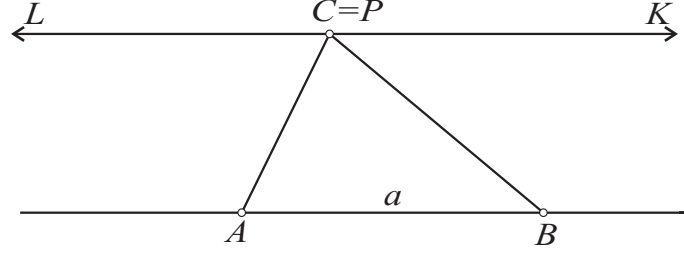
Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy a háromszögek defektusa nulla. Jelölje T a P -ből a -ra bocsátott merőleges talppontját. Ekkor P -ben a TP -re állított PK merőleges nem metszi a -t. Indirekt tegyük fel, hogy a $KPT_\angle$ szögtartományban van további P -ből induló a -t nem metsző f félegyenes is. Ekkor f PK -val egy pozitív ϵ szöget zár be. Tekintsünk, most egy olyan P -ből induló félegyeneset, mely D -ben metszi a -t, és amelyre $PDT_\angle < \epsilon$. (Ilyen szög található, mert a külső szögek tétele miatt, ha az a -ra illeszkedő D pont végtelenhez tart, akkor a $PD_i T_\angle$ nullához tart (lásd az 1.14. ábrát). Ez viszont lehetetlen, mert a $PDT_\angle$ szögösszege π , és így $KPD_\angle = PDT_\angle < \epsilon$, ami azt jelenti, hogy az a -t nem metsző f félegyenes a $TPD_\angle$ szögtartomány félegyenesére ellentmondva az 1.2.1.Lemmának.



1.15. ábra. Ha a defektus nulla teljesül a párhuzamossági axióma

Fordítva tegyük fel, hogy a P -n keresztül csak egy egyenes húzható amely nem metszi a -t. Válasszuk továbbá az $ABC_\triangle$ -et úgy, hogy AB oldalának egyenese a legyen, és C csúcsa egybeessen P -vel. Ekkor a $BPK_\angle = PBA_\angle$

feltételnek eleget tevő P -ből kiinduló $\overrightarrow{PK}$ félegyenes az a -t nem metsző egyenes egyik félegyenesese. Hasonló módon az 1.16.ábra szerinti $\overrightarrow{PL}$ félegyenes tartóegyenesese sem metszi a -t, ha teljesül az $APL_{\angle} = PAB_{\angle}$ feltétel. Ekkor viszont a két félegyenes ugyanahhoz az egyeneshez tartozik, és így az $ABC_{\triangle}$ defektusa nulla. $\square$



1.16. ábra. A defektus nulla, ha teljesül a párhuzamossági axióma.

A továbbiakban megvizsgáljuk az abszolút geometriához illeszthető párhuzamossági axiómákat.

1.3. Euklidész párhuzamossági axiómája

Ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegeben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegeben) két derékszögnél kisebb szögek vannak.

Euklidész I. V. Posztulátum

Euklidész ötödik posztulátumával ekvivalens a Proklostól származó alábbi megfogalmazás:

Axióma (Euklidész párhuzamossági axiómája). *Adott egyeneshez adott, az egyenesre nem illeszkedő ponton keresztül egyetlen nem metsző egyenes húzható.*

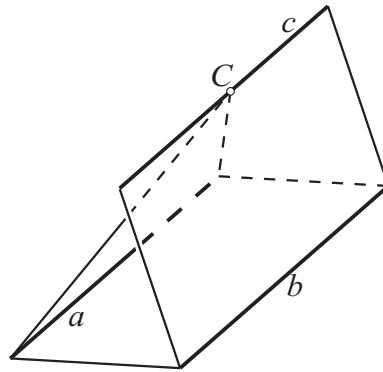
Néhány további, általunk eddig nem vizsgált, az ötödik posztulátummal ekvivalens állítás:

- Adott egyenestől a sík ugyanazon felén egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye egyenes. (Clavio, 1574)
- Van legalábbis két hasonló, de nem egybevágó háromszög. (Wallis, 1663)

- Bármely háromszögnél van nagyobb területű háromszög. (Gauss, 1799)
- Három pont körön vagy egyenesen van. (Bolyai Farkas)

1.3.1. Definíció. Az egybeeső egyenesek párhuzamosak (azaz egy egyenes párhuzamos önmagával). Két különböző egyenest pedig akkor mondunk párhuzamosnak, ha van közös síkjuk, de nincs közös pontjuk.

1.3.1. Tétel. A párhuzamosság ekvivalencia reláció.



1.17. ábra. Az euklideszi párhuzamosság tranzitív.

Bizonyítás: A reflexivitás és szimmetria a párhuzamosság fenti definíciója szerint teljesül. Elegendő tehát a tranzitivitást igazolni. Ha $a \parallel b$ és $b \parallel c$, akkor a és c valamely közös pontja b -hez nem tartozhat, így b -vel egy síkot határoz meg, mely a, b, c közös síkja. A párhuzamossági axióma szerint ekkor $a = c$ azaz $a \parallel c$. Ezek szerint ha $a \neq c$ akkor a -nak és c -nek nincs közös pontja. Ha az a, b és b, c egyenespárok γ és α síkjainak van b -re nem illeszkedő közös pontja is, akkor a két sík egybeesik, és ez az a, c egyenespár síkja is, tehát $a \parallel c$ is teljesül. Ha pedig γ és α különböző síkok, akkor tekintsük a c egyenes tetszőleges C pontját (ez biztosan nem illeszkedik γ -ra). Az a egyenes és C pont síkját jelöljük β -val. Ekkor $a = \beta \cap \gamma$, és legyen $a' = \alpha \cap \beta$. Ha $a' = c$, akkor a -nak és c -nek van közös síkja, és így $a \parallel c$ teljesül. Ha pedig $a' \neq c$, akkor a' metszi b -t (α -ban). Ez a metszéspont akkor γ -ra is illeszkedik, amiből $\gamma = \beta$ következik, tehát ellentmondásra jutunk. Így a és c közös síkú nem metsző egyenesek, tehát párhuzamosak. Ezzel a tranzitivitást bizonyítottuk. $\square$

Az axióma ellenőrzése – az egyenes végtelensége miatt – tapasztalati, észlelési körünkön kívülre esik, ezért kimondásának pillanatától kezdve vizsgálat tárgyát képezte. Legendre eredményei, mint láttuk, visszavezették a kérdést a háromszög szögösszegének vizsgálatára, ami ellenőrizhetőbb tulajdonságnak tűnt. Azonban mérésekkel – azok mindig is fellépő hibája miatt – továbbra

sem lehet minden kétséget kizáróan eldönteni, hogy tapasztalati úton elérhető világunkra az euklideszi vagy a hiperbolikus geometria párhuzamossági axiómája teljesül-e. Tehát, ha mindkét axióma alapján felépíthető egy-egy geometria, akkor azok egyforma eséllyel írhatják le világunkat.

1.4. Párhuzamosság a hiperbolikus síkon

Semmiből egy új, más világot teremtettem.

Bolyai János levele atyjához

A továbbiakban feltesszük, hogy a síkon a hiperbolikus geometria alábbi párhuzamossági axiómája érvényes.

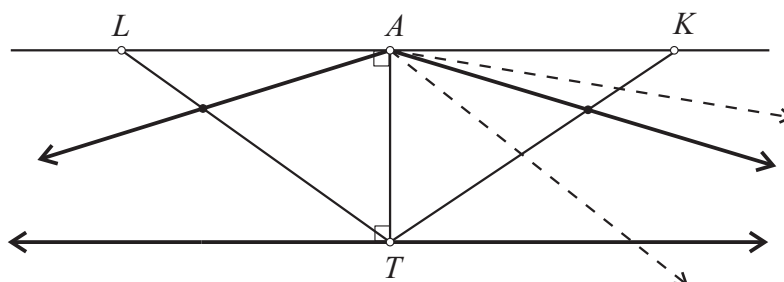
Axióma (Hiperbolikus párhuzamossági axióma). *Adott egyeneshez adott, az egyenesre nem illeszkedő ponton keresztül több, az adott egyenest nem metsző egyenes húzható.*

1.4.1. Tétel. *A hiperbolikus síkon egy adott a egyeneshez egy adott, rajta kívül fekvő A pontból pontosan két olyan félegyenes húzható, hogy az általuk meghatározott kisebbik nyílt szögtartománynak valamennyi A kezdőpontú fél-egyenes metszi a -t, és a két határoló félegyenesnek nincs közös pontja a -val. Ezeket elpattanó félegyeneseknek egyeneseiket pedig elpattanó egyeneseknek nevezzük.*

Bizonyítás: Az A pontból az a egyenesre bocsátott merőleges talppontja legyen T . Tekintsük az A ponton áthaladó $\overrightarrow{TA}$ -ra merőleges e egyenest, amit az A pont két félegyenesre, $\overrightarrow{AK}$ -ra és $\overrightarrow{AL}$ -re bont fel. A TAK szögtartományban haladó félegyenesek az 1.2.1. Lemma szerint metszik $\overrightarrow{AK}$ -t. A metszéspontok, aszerint, hogy metsző vagy nem metsző félegyenes adja őket, két Dedekind szeletet alkotnak, így van egy egyértelműen meghatározott elválasztó pont. (A TK egyenes többi pontját természetes módon soroljuk a két osztály egyikébe, ha (PTK) áll fenn, akkor P -t a metszők osztályába soroljuk, ha Q -ra (TKQ) teljesül, akkor a nem metszők halmazához vesszük.) Az ehhez tartozó félegyenes az elpattanó egyenes, mely nyilván a nem metszők osztályának eleme. A tételben szereplő másik félegyenes TA -ra szimmetrikusan adódik. $\square$

A továbbiakban a félegyenesek párhuzamosságának definiálását tűzzük ki célul. Ehhez az „elpattanás” alaposabb vizsgálata szükséges.

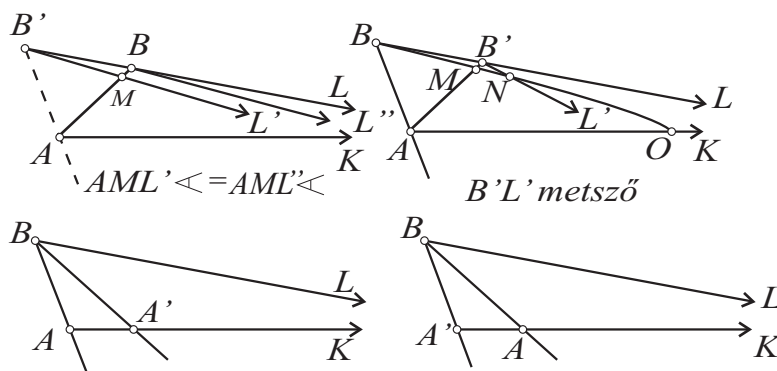
1.4.1. Definíció. *Egy adott félegyenes tartó egyeneséhez egy adott, az egyenesen kívül fekvő pontból két elpattanó félegyenes húzható. Ezek közül azt*



1.18. ábra. Elpattanó félegyenések.

1.4.1. Lemma. *Az elpattanó vagy az adott féleggyenes kezdőpontját tartó egyenesén áthelyezve úgy, hogy annak végtelen távoli pontját nem változtatjuk meg, az elpattanás tulajdonsága megmarad.*

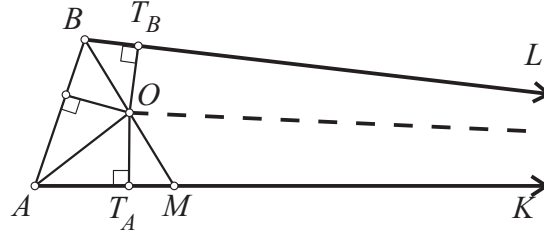
Ha egy félegyenes elpattanó egy adott félegyeneshez, akkor elpattanó az adott félegyenesre illeszkedő, vagy az azt tartalmazó bármely másik félegyeneshez is. Továbbá a félegyenesre illeszkedő vagy a félegyenenest tartalmazó bármely félegyenes is elpattanó az adott félegyeneshez.



1.19. ábra. Kezdőpont áthelyezés.

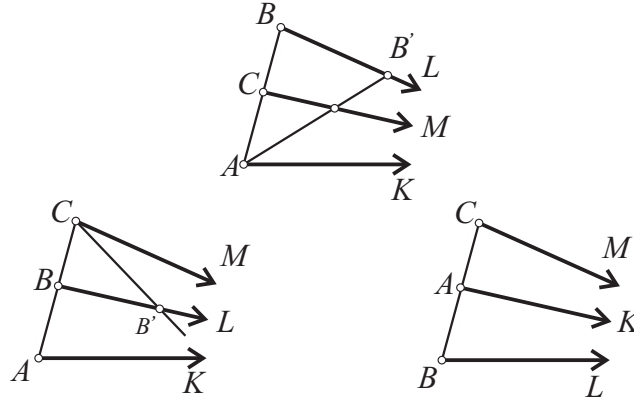
Bizonyítás: A lemma bizonyítása négy eset vizsgálatát igényli, ami a Pasch-axióma segítségével az ábrák alapján könnyen elvégezhető. $\square$

1.4.2. Tétel. *A félegyenesek halmazán az elpattanás szimmetrikus és tranzitív tulajdonság.*



1.20. ábra. Szimmetria.

Bizonyítás: Először igazoljuk a szimmetriát. Legyen a két félegyenes $\overrightarrow{AK}$ és $\overrightarrow{BL}$, ahol L illetve K a félegyenesek egy-egy „távoli” pontjai. Tegyük fel, hogy $\overrightarrow{AK} \parallel \overrightarrow{BL}$, azaz a B -ből $\overrightarrow{AK}$ -hoz indított elpattanó a $\overrightarrow{BL}$ félegyenes. Húzzuk meg az $ABL_{\perp}$ szögfelező egyenesét. Ez metszi $\overrightarrow{AK}$ -t M -ben. Az $MAB_{\perp}$ szögfelezője metszi $\overrightarrow{BM}$ -et O -ban. Világos, hogy O egyenlő távolságra van az $\overrightarrow{AK}$ illetve $\overrightarrow{BL}$ félegyenesektől. A merőleges szakaszok talppontjai legyenek rendre T_A és T_B . Az előző lemma szerint $\overrightarrow{AK} \parallel \overrightarrow{BL}$ ekvivalens a $\overrightarrow{T_A K} \parallel \overrightarrow{T_B L}$ relációval, amely viszont szimmetrikus, mert a $\overrightarrow{T_A K}$, $\overrightarrow{T_B L}$ félegyenes pár szimmetrikus a $T_A O T_B_{\perp}$ szögfelezőjére. Ezért az utóbbi reláció ekvivalens a $\overrightarrow{T_B L} \parallel \overrightarrow{T_A K}$ relációval, és ismét a lemmánkra hivatkozva kapjuk, hogy $\overrightarrow{BL} \parallel \overrightarrow{AK}$.



1.21. ábra. Transzitivitás.

A tranzitivitás igazából térbeli állítás. Modellről függetlenül bizonyítani nem könnyű. Az elpattanás valamely modellben való geometriai jellemzése után az állítás triviálisan adódik. Jelen esetben modellről független bizonyítást adunk, de „csak” síkban.

Három esetet különböztethetünk meg a félegyenesek egymáshoz viszonyított elhelyezkedése alapján. Az első két egyenest $\overrightarrow{AK}$ -val illetve $\overrightarrow{BL}$ -vel jelöl-

ve, a harmadik, $\overrightarrow{CM}$ az $\overrightarrow{AK} \parallel \overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{BL} \parallel \overrightarrow{CM}$ feltételek mellett, a kezdőpont áthelyezéséről szóló lemma alapján, az 1.21. ábrán látható három helyzetben képzelhető el.

Valóban, $\overrightarrow{AK}$ és $\overrightarrow{BL}$ párhuzamosságából következik, hogy az AB egyenes által meghatározott félsíkok közül az egyik tartalmazza mindkét félegyeneset. Mivel $\overrightarrow{BL} \parallel \overrightarrow{CM}$ is fennáll, ezért $\overrightarrow{CM}$ szintén belemetsz ezen félsíkba. Ha egyenesének van pontja AB -n akkor feltehető, hogy a három kezdőpont közös egyenesre illeszkedik. Ha ez nem teljesül, akkor tekintsük B és C pontok összekötő egyenesét is. Mivel $\overrightarrow{BL}$ és $\overrightarrow{CM}$ közös félsíkban vannak, ezért mindhárom félegyenes azon $ABC_{\angle}$ konvex szögtartományba esik, mely $\overrightarrow{BL}$ -et tartalmazza. Ennek szárain, vegyünk rendre egy (BAA') , (BCC') relációknak eleget tevő A' , C' pontpárt. Világos, hogy az $\overrightarrow{A'C'}$ szakaszt mindhárom félegyenes metszi.

A második két eset ekvivalens egymással, ezért csak az első két esettel foglalkozunk. A BL egyenes elválasztja a másik két félegyeneset ezért $\overrightarrow{CM}$ nem metszi $\overrightarrow{AK}$ -t hiszen különben a Pasch-axióma miatt $\overrightarrow{AK}$ -val együtt $\overrightarrow{BL}$ -et is metszené. Ugyanakkor a C -ből az $ACM_{\angle}$ tartományban indított félegyenes az elpattanás tulajdonsága miatt metszi $\overrightarrow{BL}$ -et egy B' pontban. A kezdőpont áthelyezéséről szóló lemma miatt ugyanez az egyenes metszi $\overrightarrow{AK}$ -t is így metsző. Azaz $\overrightarrow{CM}$ elpattanó $\overrightarrow{AK}$ -hoz, ahogy állítottuk.

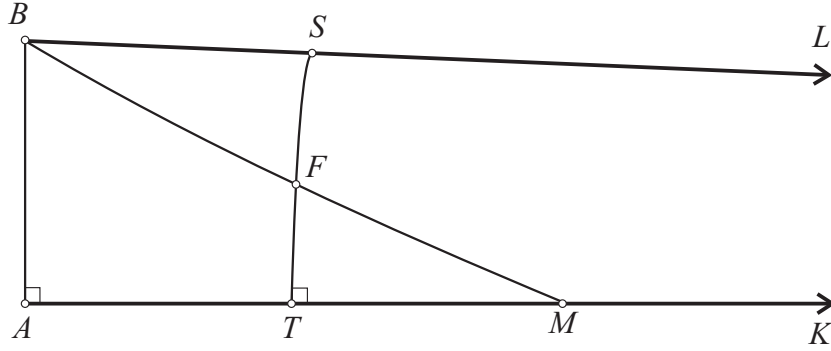
A második eset hasonlóképpen elintézhető, ha használjuk a szimmetria tulajdonságot is, és az A -ból induló félegyeneseket vizsgáljuk. $\square$

1.4.2. Definíció. *Két félegyenes párhuzamos, ha az egyik tartalmazza a másikat, vagy ha elpattanóak. Két egyenes párhuzamos, ha mindkettő tartalmaz egy-egy olyan félegyeneset, amelyek párhuzamosak. A párhuzamos félegyenesek osztályaihoz új objektumokat rendelünk, az osztályhoz tartozó félegyenesek közös végét. Két egysíkú egyenest ultraparallelnak (vagy kitérőnek) mondunk, ha nem metszők és nem is párhuzamosak.*

A következő tétel azt jelzi, hogy a hiperbolikus sík struktúrája jobban hasonlít az euklideszi tér szerkezetéhez, mint az euklideszi síkéhoz. Az ultraparallel egyenesek például rendelkeznek az euklideszi tér kitérő egyenesének alábbi fontos tulajdonságaival.

1.4.3. Tétel (Bolyai János). *Két ultraparallel egyenesnek létezik közös merőlegese.*

Bizonyítás: Bolyai János bizonyítása felhasználja, hogy az egyeneshez egy külső pontból indított metsző félegyeneseknek az egyenessel bezárt szöge folytonosan változik a pontból az egyenesre bocsátott merőlegeshez viszonyított



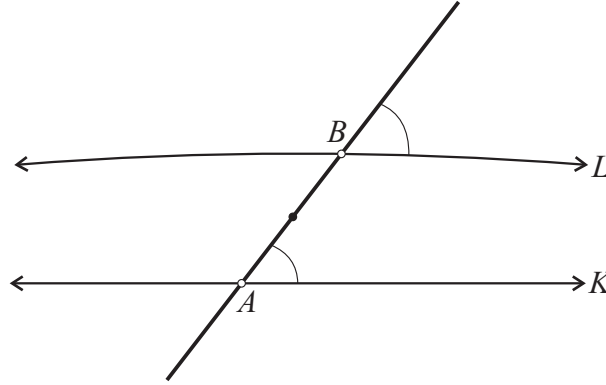
1.22. ábra. Ultraparallel egyenesek közös merőlegese.

szög függvényében. Ez nem kézenfekvő állítás, de a bizonyítását az olvasóra bízhatjuk.

Legyen most $\overrightarrow{AK}$ illetve $\overrightarrow{BL}$ vizsgált egyenesünk két olyan félegyenese, amelyekre a $BAK_{\angle}$ derékszög, és a két félegyenes a BA egyenes által meghatározott ugyanazon félsíkhöz tartozik. Ekkor vagy AB a két egyenes közös merőlegese, vagy feltehetjük, hogy $ABL_{\angle}$ hegyesszög. Legyen $\overrightarrow{BM}$ az $ABL_{\angle}$ szögtartományában B -ből indított metsző félegyenes, ahol M az $\overrightarrow{AK}$ -val alkotott metszéspontot jelöli. Megjegyzésünk szerint míg M az A pontból eljut K -ba az $MBL_{\angle}$ szög monoton csökkenő folytonos változás mellett rendre felveszi az $[ABL_{\angle}, \epsilon]$ intervallumba eső valós számértékeket. Itt $\epsilon > 0$, mert ebben a szögtartományban van a B -ből húzott párhuzamos, amely elválasztja az $LBA_{\angle}$ két szárát. Hasonló módon a $BMA_{\angle}$ monoton csökkenő folytonos függvény, amely a $[\frac{\pi}{2}, 0]$ intervallum értékeit veszi fel. (Korábban már láttuk, hogy van nullához tartó részsorozata ezen függvénynek.) Mindez csak úgy lehetséges, ha van egy olyan M , amire $BMA_{\angle} = MBL_{\angle}$. Jelölje F a $\overline{BM}$ szakasz felezőpontját, és legyen n az F pontból $\overrightarrow{AK}$ -ra bocsátott merőleges egyenes, T pedig n és $\overrightarrow{AK}$ közös pontja. Az $n = TF$ egyenes metszi a $\overrightarrow{BK}$ félegyenest egy S pontban, mert az F pontra vonatkozó középpontos tükrözés az n egyenest fixen hagyja, a $\overrightarrow{BL}$ félegyenest pedig az $\overrightarrow{MA}$ félegyenesbe képezi. Az MTF_{Δ} ekkor egybevágó a BSF_{Δ} -gel, így n a keresett közös merőleges. $\square$

1.4.2. Lemma. *Egy egyenest az ábra szerint azonos szög alatt metsző egysíkú egyenespár ultraparallel helyzetű.*

Bizonyítás: Korábban láttuk az 1.2.1. Megjegyzésben, hogy egy ilyen egyenespár nem lehet metsző. Ha párhuzamosak lennének, akkor pl. az $\overrightarrow{AK}$ és a $\overrightarrow{BL}$ félegyenesek elpattanóak volnának, és az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjára vo-



1.23. ábra. Azonos szög alatt hajló egyenespár ultraparallel.

natkozó szimmetria miatt a komplementer félegyenespár is elpattanó lenne. Ez azonban ellentmondana a hiperbolikus párhuzamossági axiómának. $\square$

1.4.1. Következmény. *Ha egy egyenespárnak van közös merőlegese, akkor ultraparallel.*

Most pedig megszerkesztjük a közös merőlegest. Ehhez szükségünk lesz egy speciális négyszög, a Saccheri-négyszög tulajdonságaira.

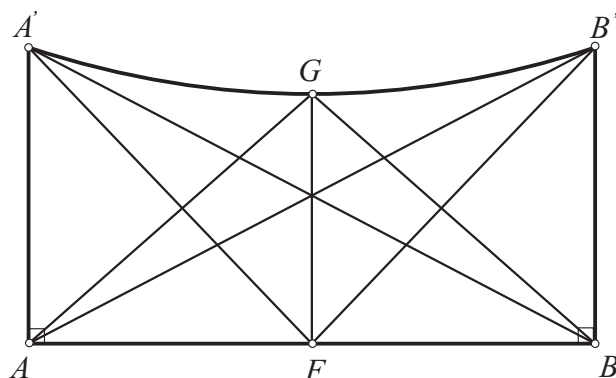
Az $A'ABB'$ négyszög *Saccheri-féle*, ha AB alapján lévő szögei derékszögek, továbbá az AA' és BB' szárai egyenlők. Ekkor a négyszög szimmetrikus az AB és $A'B'$ alapok F és G felezőpontjait összekötő egyenesre. A négyszög a nevét G.G. Saccheri olasz géométerről kapta, akinek a párhuzamossággal kapcsolatos vizsgálataiban fontos szerepet játszott ez a négyszög típus.

1.4.3. Lemma (A Saccheri-négyszög tulajdonságai). *A Saccheri-féle négyszög derékszögtől különböző két szöge egyenlő (így ezek hegyesszögek). Az alapok felezőpontjait összekötő egyenes mindkét alapra merőleges. A hegyesszögek közös szárát adó alap hosszabb a derékszögek közös szárát adó alpnál.*

Bizonyítás: Az ábra jelöléseit használva, a BAA'_Δ , és ABB'_Δ egybevágósága miatt $BA'A_\Delta = AB'B_\Delta$, és $\overline{AB'} \cong \overline{BA'}$. Ezért az $A'BB'_\Delta$ is egybevágó $B'AA'_\Delta$ -gel, és így első állításunknak megfelelően $AB'A'_\Delta = BA'B'_\Delta$.

Az alaplapokon F és G felezőpontok, így az $A'AF_\Delta$, egybevágó a $B'BF_\Delta$ -gel, továbbá oldalaik páronkénti egyenlősége miatt az $A'FG_\Delta$ és a $B'FG_\Delta$ is egybevágó. Így az FG egyenes merőleges az $A'B'$ alapra. Mivel az $AA'G_\Delta$ és a $BB'G_\Delta$ is egybevágó, ezért $|\overline{AG}| = |\overline{BG}|$. Ebből az AGF_Δ , és BGF_Δ háromszögek egybevágósága is adódik, így FG egyenes merőleges AB -re is.

Az utolsó állítás bizonyításához tekintsük az $AA'B_\Delta$, $B'BA'_\Delta$ háromszögeket. Mivel $B'BA'_\Delta + A'BA_\Delta = \frac{\pi}{2}$ ugyanakkor $A'BA_\Delta + BA'A_\Delta < \frac{\pi}{2}$, ezért $BA'A_\Delta < A'BB'_\Delta$. Így a kar lemma alapján utolsó állításunk is teljesül. $\square$

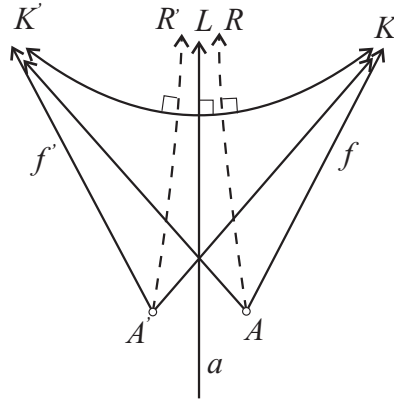


A Saccheri-négyszög *szimmetria tengelyének* nevezzük az alapok közös (FG) merőlegesét. Ez a Saccheri-négyszöget két egybevágó ún. Lambert-féle négyszögre bontja.

Bizonyítás: Legyen a két egyenesünk a és b . Tetszőlegesen jelöljük ki a egy A pontját, majd állítsunk ebből a pontból b -re merőleges egyenest. A talppontot jelöljük B -vel. Ha AB egyenes a -ra is merőleges készen vagyunk. Ha nem feltehető, hogy az 1.25. ábrának megfelelően jobbra zár be a -val tompaszöget. Legyen most a jobboldali félegyenes tetszőleges pontja A' és az ebből b -re bocsátott merőleges talppontja B' . Mérjük fel B' -ből a $B'A'$ egyenesre a $\overline{BA}$ szakasz hosszát, a kapott végpontot jelöljük A'' -vel. Vegyük észre

először, hogy $(B'A''A')$ a kapott pontjaink rendezése, mert $ABB'A''$ Saccheri-négyszöget határoz meg, így $BAA''_< < \frac{\pi}{2} < BAA'_<$. Jelölje K és L rendre az a és b egyenesek bal oldali félegyenesének végét, és mérjük át a $KAB_<$ -et A'' ben az $\overrightarrow{A''B}$ egyenesre az ábra szerint. A kapott új félegyenes legyen $\overrightarrow{A''M}$. Igazoljuk, hogy ez a félegyenes metszi az $\overrightarrow{A'K}$ félegyeneset. $\overrightarrow{BL}$ és $\overrightarrow{AK}$ nem metszők, ezért B -ből indítható egy $\overrightarrow{AK}$ -val párhuzamos félegyenes $\overrightarrow{BK}$, mely az $LBA_<$ szögtartományban halad. Mérjük át az $LBK_<$ -et B' -ből is b -re, az ábra szerint kijelölve az $LB'K'_<$ szöget. Ekkor $\overrightarrow{BK}$ és $\overrightarrow{B'K'}$ félegyenesek ultraparallelek (kitérők), így $\overrightarrow{B'K'}$ metszi $\overrightarrow{A'K}$ -t egy P pontban. Valóban ha B -t összekötjük A' -vel akkor ezen szakaszt $\overrightarrow{B'K'}$ metszi ezért metszi $\overrightarrow{AB}$ illetve $\overrightarrow{AA'}$ egyikét. Az első esetben metszenie kell $\overrightarrow{AK}$ -t így állításunk ekkor is teljesül. Alkalmazzuk most a Pasch-axiómát a $PB'A'_<$ -re, és kapjuk, hogy $\overrightarrow{A''M}$ metszi $\overrightarrow{A'K}$ -t egy C pontban. ($\overrightarrow{B'K'}$ -t nem metszheti $\overrightarrow{A''M}$, mert az $MA''B'K'$ tartomány egybevágó a $KABK$ tartománnyal, és így $K' = M$ is teljesül.) Bocsássunk most C -ből merőlegest b -re, ennek talppontja legyen D . Végül a $CA''B'D$ négyszöget helyezzük át az ábrának megfelelő $EABF$ pozícióba. Világos, hogy $ECDF$ Saccheri-féle négyszög, hiszen az áthelyezés a $\overline{CD}$ szakaszt a vele egyenlő hosszú $\overline{EF}$ szakaszba viszi, mely szintén merőleges b -re. Ennek szimmetria tengelye a kívánt egyenes. $\square$

1.4.5. Tétel. *Adott egy egyenes és egy félegyenes. Ekkor szerkeszthető olyan egyenes, mely merőleges az adott egyenesre, és párhuzamos az adott félegyenessel.*



1.26. ábra. Adott félegyenessel párhuzamos, egy másik egyenesre merőleges félegyenes szerkesztése.

Bizonyítás: A félegyeneset tükrözzük az egyenesre, majd keressük meg azt az egyenest, mely egyik irányban a félegyenessel, másik irányban a tükörkép

félegyenessel párhuzamos. A kapott egyenes eleget tesz a feltételnek. Először megmutatjuk, hogy két (általában nem egy egyenesre illeszkedő) félegyeneshez van olyan egyenes, mely mindkettőjükkal párhuzamos. A Cayley-Klein modellben (lásd 4.3. fejezet) ábrázolva félegyeneseinket ilyen egyeneshez csak úgy jutunk, ha a végtelen távoli pontok összekötő egyeneseként reprezentálódó hiperbolikus egyenest tekintjük. Azonban közös kezdőpont esetén egy ilyen közös párhuzamos a szimmetria miatt merőleges a szögtartomány szögfelező egyenesére. Különböző kezdőpont esetén ezekből a másik félegyenessel párhuzamost húzva, majd a keletkező szögek szögfelező egyeneseit megrajzolva két olyan egyenest kapunk, melyekre a keresett egyenesnek egyaránt merőlegesnek kell lennie. És mivel a közös párhuzamos egyértelműen létezik, ezen szögfelező egyenesek ultraparallelek és közös merőlegesük a közös párhuzamos. Közös kezdőpont esetén a félegyenések egy-egy pontjára mint kezdőpontra áttérve a feladatot a különböző kezdőpontok esetére vezettük vissza. $\square$

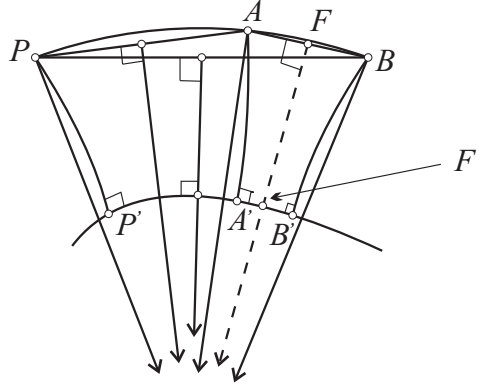
1.4.1. Megjegyzés. *A bizonyításból kiderült, hogy az említett szögfelezők ultraparallel helyzetűek. Ehhez azonban felhasználtuk, a közös párhuzamos létezését és egyértelműségét, melyet modelltől függetlenül igazolni nem is olyan egyszerű feladat.*

1.4.3. Definíció. *Rendre metsző vagy párhuzamos vagy kitérő sugársornak nevezzük azon egyenesek halmazát, amelyek mind áthaladnak egy adott ponton, vagy párhuzamosak egy adott félegyenessel, vagy merőlegesek egy adott egyenesre. A sík egy pontjának egy adott sugársor elemeire vonatkozó tükörképeinek halmazát a sugársor ciklusának nevezzük. A metsző sugársor ciklusa a kör, a párhuzamos sugársoré a paraciklus és a kitérőé a hiperciklus.*

Előre bocsátunk három észrevételt, amelyek a ciklusok jellemzésében fontos szerepet játszanak.

1.4.4. Lemma. *A ciklusok egy-egy mértani hely feladat megoldásai, pontosabban:*

- *A kör az adott ponttól állandó távolságra található pontok mértani helye.*
- *Két párhuzamos egyenes egy-egy pontját korrespondeálónak mondjuk, ha szakaszuk egyenlő szöget zár be az egyenesekkel. A paraciklus egy adott ponthoz adott párhuzamos sugársorra vonatkozóan korrespondeáló pontok mértani helye.*
- *A hiperciklus adott egyenestől (annak egyik fésíkjában) egyenlő távolságra levő pontok mértani helye.*



1.27. ábra. A paraciklus mint korrespondeáló pontok halmaza.

Bizonyítás: Az első illetve harmadik állítások bizonyítása definíció alapján egyszerű, ezért csak a második állítást fogjuk igazolni. Tegyük fel, hogy A és B két tükörkép pontja P -nek. Igazoljuk, hogy az $\overline{AB}$ szakasz F felezőpontján áthaladó szakaszfelező merőleges a kiindulási párhuzamos sugársor eleme. Ha metszené a t_a vagy t_b tüköregyenesek valamelyikét, akkor ezen ponttól P , A és B egyenlő távolságra esne, azaz a két tüköregyenes is metszené egymást, ami lehetetlen. Tegyük most fel indirekt, hogy vizsgált egyenesünk ultraparallel a $\overline{PB}$ szakasz t_b tüköregyeneséhez képest. Ekkor létezik n közös merőlegesük. Erre a közös merőlegesre A -ból és B -ből is merőleget bocsátva két egybevágó Lambert-négyszöget kapunk, $AA'F'F$ -et illetve $BB'F'F$ -et. Azaz A -nak és B -nek a távolsága ettől az egyenestől megegyezik. Hasonlóan látható, hogy ugyanekkor a P pont távolsága is ettől az egyenestől, így ez közös merőlegese az eredeti két tüköregyenesnek. Azonban ez lehetetlen, így $\overline{AB}$ szakaszfelező merőlegese is hozzátartozik a sugársorhoz. Azaz az A -ból és B -ből indított sugársor elemekkel együtt az $\overline{FF'}$ félegyenes is eleme a sugársornak. Így a korrespondeálás egyszerűen látható. $\square$

1.4.6. Tétel. *Egyenestől különböző ciklusnak nincs három kollineáris pontja.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a P pont valamelyik sugársor két elemére vonatkozó tükörképe P' és P'' . A $\overline{PP'}$ illetve $\overline{PP''}$ szakaszok felezőpontjai legyenek M' és M'' . Ha a három pont egy egyenesre illeszkedik, akkor az 1.2.1 következmény miatt a sugársor ezen két egyenesre kitérő. Azaz a három pont egyenesre közös merőlegese a sugársor elemeinek. Így a kiindulási pont tükörképeivel együtt a sugársort meghatározó alapegyeneshez tartozik, tehát nem egy valódi ciklus pontjai. $\square$

1.5. Merőlegesség az abszolút terekben

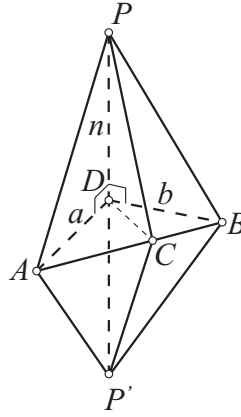
Ha valamely egyenesre egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll.

Euklidesz I. 10. Definíció

A merőlegesség (ellentétben a párhuzamossággal) abszolút fogalom így vizsgálata alapvető információkat ad az abszolút tér szerkezetéről.

1.5.1. Definíció. Egy adott síkot metsző egyenes merőleges a síkra, ha merőleges annak valamennyi, a metszésponton áthaladó egyenesére.

1.5.1. Tétel. Egy adott egyenes pontosan akkor merőleges egy adott síkra, ha metszi azt, és merőleges kettő, a metszésponton áthaladó síkbeli egyenesre.



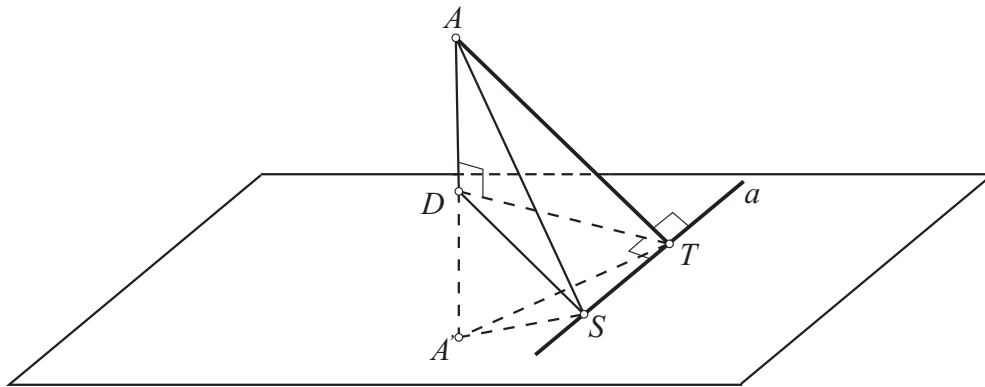
1.28. ábra. Sík egyenes merőlegessége.

Bizonyítás: Legyen az n egyenes merőleges az a, b metsző egyenespárra úgy, hogy n is áthalad az a és b egyenesek D metszéspontján. Tekintsünk egy (a, b) síkra illeszkedő D -n áthaladó tetszőleges c egyenest. A továbbiakban az (a, n) illetve (b, n) síkok által meghatározott azon térszöveget vizsgáljuk az 1.28. ábra szerint, amelyben c a C pontban metszi az a, b egyenespár egy $\overline{AB}$ összekötő szakaszát. Legyen P' az n egyenes azon pontja, melyre $|\overline{PD}| = |\overline{DP'}|$. Világos, hogy a PDA_Δ , és a $P'DA_\Delta$ háromszögek egybevágósága folytán, $|\overline{PA}| = |\overline{P'A}|$, és hasonlóképpen $|\overline{PB}| = |\overline{P'B}|$. Ezért a PAB_Δ , és a $P'AB_\Delta$ háromszögek is egybevágók. Így $PAC_\Delta = P'AC_\Delta$, amiből a $PAC_\Delta \cong P'AC_\Delta$ egybevágóság is következik. Ekkor $|\overline{PC}| = |\overline{P'C}|$ azaz egybevágók a PDC_Δ és a $P'DC_\Delta$ háromszögek is. Így $PDC_\Delta = P'DC_\Delta = \frac{\pi}{2}$. Mivel c az (a, b) sík tetszőleges egyenese volt, n merőleges az $[a, b]$ síkra. $\square$

1.5.1. Megjegyzés. A tétel bizonyításából kiderül, hogy a merőleges sík pontjai és csak azok vannak a P, P' pontpártól egyenlő távolságra, azaz a síkbeli esethez hasonlóan igazolható, hogy a szakasznak egyértelműen létezik szakaszfelező merőleges síkje, mely a végpontjaitól egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye.

1.5.2. Megjegyzés. A tételnek egy fontos következménye, hogy egy adott egyenes adott pontján áthaladó, az adott egyenesre merőleges egyenesek mértani helye az adott egyenesre merőleges, az adott ponton áthaladó sík. Tekintsük ugyanis a mértani hely két egyenesét. Ezek meghatároznak egy síkot, mely az 1.5.1 Tétel szerint merőleges az adott egyenesre. Tegyük fel, hogy a mértani helyhez tartozó valamely egyenes, nem illeszkedik erre a síkra. Ekkor az egyenes és az adott egyenes által meghatározott sík metszi a merőleges síkot egy újabb egyenesben, mely szintén merőleges az adott egyenesre. Ez nem lehetséges, mert adott síkban, adott egyenes adott pontján áthaladó merőleges egyenes csak egy van. Ugyanakkor a sík bármely pontján áthalad egy, a feltételeket kielégítő egyenes, a pontot a dőfésponttal összekötő egyenes.

1.5.2. Tétel. Adott pontból egyértelműen állítható merőleges egyenes egy adott síkra.



1.29. ábra. Síkra merőleges egyenes szerkesztése.

Bizonyítás: Jelölje A az adott pontot, és legyen α az adott sík, a pedig a síkra illeszkedő tetszőleges egyenes. Tegyük fel először, hogy A nem illeszkedik a síkra. Bocsássunk merőlegest az A pontból az a egyenesre a síkjukban, ennek talppontja legyen T . A T pontban állítsunk merőlegest a -ra az α síkban, és végül ezen egyenesre bocsássunk merőlegest az A pontból. A merőleges talppontját jelölje D . Ha D azonos T -vel, akkor D -n keresztülhalad az α sík két merőleges egyenese, ezért az előző tétel alapján a keresett egyenes AD .

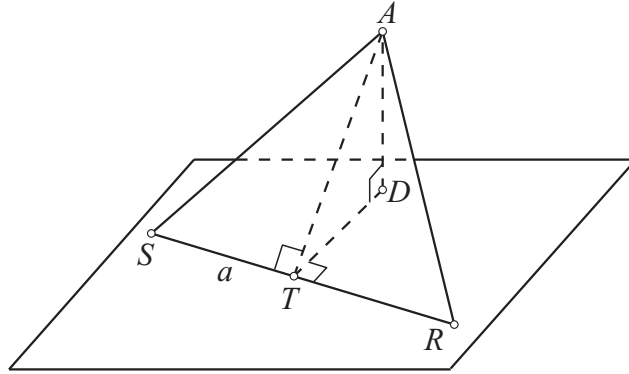
Ha D különbözik T -től, tekintsük az a egyenes tetszőleges T -től különböző S pontját. Igazoljuk, hogy a DS egyenes is merőleges AD -re, így a keresett merőleges egyenes ebben az esetben is AD . Mérjük föl AD -re az $|\overline{AD}|$ távolságot a D pontból A -val ellentétes irányban, így az A' pontot kapjuk. Vegyük észre, hogy az a egyenes merőleges az $[A, T, D]$ síkra így annak valamennyi T -n áthaladó egyenesére, tehát $A'T$ -re is. Ezért az ADT_Δ és az $A'DT_\Delta$ egybevágósága miatt $|\overline{AT}| = |\overline{A'T}|$, és így az ATS_Δ is egybevágó az $A'TS_\Delta$ -gel. Ez viszont azt jelenti, hogy $|\overline{AS}| = |\overline{A'S}|$, amiből végül az AA' , és a DS egyenesek merőlegessége adódik.

Legyen most A olyan pont, amely illeszkedik α -ra. Ekkor két tetszőleges A ponton áthaladó egyenesre állítsunk merőleges síkot az A ponton át. Ezek metszésvonala lesz a keresett, α -ra merőleges egyenes. Egy A -n áthaladó egyenesre merőleges sík felvétele pedig úgy oldható meg, hogy az egyenest tartalmazó két síkban az egyenesre egy-egy merőlegest állítunk az A pontban. Ezek határozzák meg az adott egyenesre merőleges síkot.

Az egyértelműség abból következik, hogy a síkban az egyenesre állított merőleges egyértelmű. Ez utóbbi állítás pedig Legendre első szögtételének következménye. $\square$

Alapvető jelentőségű a három merőleges tétele, mely szintén abszolút állítás.

1.5.3. Tétel. *Legyen az α sík egy egyenese a , továbbá legyen A egy α -ra nem illeszkedő pont. Ha A -ból merőlegest állítunk α -ra és a -ra is, akkor a merőlegesek D és T talppontjait összekötő egyenes szintén merőleges a -ra.*



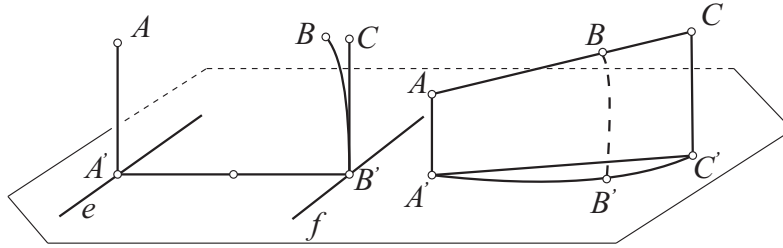
1.30. ábra. A három merőleges tétele.

Bizonyítás: Ha az a egyenes S és R pontjai egyenlő távolságra vannak T -től, akkor $TAS_\Delta \cong TAR_\Delta$, és ezért a síkra vonatkozó merőlegesség miatt

$ADS_{\Delta} \cong ADR_{\Delta}$ (két oldal és a nagyobbikkal szemben levő szögek egybevágósága folytán), amiből $|\overline{DS}| = |\overline{DR}|$ adódik. Azaz az SDR_{Δ} egyenlőszárú, és így állításunk adódik. $\square$

1.5.2. Definíció. *A tér egy pontjának egy adott síkra (mint képsíkra) vonatkozó merőleges vetülete a pontból a síkra állított merőleges egyenes és a sík közös pontja. Egy ponthalmaz merőleges vetülete, pontjai merőleges vetületeinek halmaza. Magát a leképezést a tér adott síkra való merőleges vetítésének nevezzük.*

1.5.4. Tétel. *A merőleges vetítés illeszkedés tartó és egyenestartó leképezés, mely az euklideszi esetben egyenesek mentén az arányokat is megőrzi.*

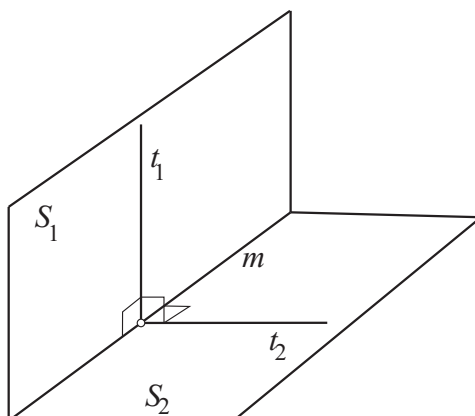


1.31. ábra. Egyenestartás.

Bizonyítás: Az illeszkedés reláció tartása a merőleges egyenes egyértelműségéből következik. Valóban tekintsük most egy vetítendő egyenes két pontját A -t és B -t, melyek A' illetve B' képei különbözőek. Feltéve, hogy AA' , BB' egyenesek nem egysíkúak tekintsük az $A'B'$ összekötő egyenest és a rá merőleges A' -n áthaladó, a képsíkra illeszkedő e egyenest. Tükrözzük az $\overline{A'B'}$ szakasz F felezőpontjára az AA' , $A'B'$, e egyeneseket, így rendre a $B'C$, $A'B'$, f egyenesekhez jutunk. Itt a kiindulási merőlegességek miatt továbbra is teljesül, hogy $B'C$ merőleges $A'B'$ és f egyenesekre, ezért a síkra is. Mivel a síkra állított merőleges egyenes egyértelmű, a $B'C$ és a $B'B$ egyenesek egybeesnek, tehát az A, A', B, B' pontnégyes egysíkú. Ha most A, B, C egy egyenes három pontja, akkor az A, A', B, B' ; A, A', C, C' pontnégyesek egysíkúak. Továbbá, mivel A, B, C kollineáris ponthármas, a két sík megegyezik, és így A', B', C' is kollineárisak.

Az euklideszi esetben az egyenesek mentén fennálló aránytartás, a párhuzamos szelők tételéből következik. $\square$

1.5.3. Definíció. *A tér két metsző síkja merőleges egymásra, ha az egyikben van a másíkra merőleges egyenes.*



1.32. ábra. Síkok merőlegessége.

Jegyezzük meg, hogy ha az α_1 sík t_1 egyenese merőleges az α_2 síkra, akkor merőleges a két sík m metszéspontjára is, valamint az s_2 síknak arra a t_2 egyenesére is, amely t_1 -gyel közös pontjában merőlegesen metszi m -et. Így az α_2 síknak is van olyan t_2 egyenese, amely az α_1 síkra merőleges. A következő egyszerű állítást igen gyakran használjuk.

1.5.5. Tétel. *Adott α síkhoz és adott t egyeneshez mindig található olyan sík, mely α -re merőleges, t -t pedig tartalmazza.*

Bizonyítás: Ha t merőleges vetülete α -n a t' egyenes, akkor a $[t, t']$ sík éppen megfelel a feltételnek. Ebben az esetben ez az egyetlen megoldás a merőleges vetület egyértelműsége és a síkra vonatkozó illeszkedési axióma miatt. Ha pedig t merőleges vetülete α -n egyetlen pont, akkor a t egyenest tartalmazó bármelyik sík megfelelő. $\square$

Mint láttuk a tételben szereplő sík egyértelmű, ha t nem merőleges α -re. Ekkor a $[t, t']$ síkot t (α -ra vonatkozó) *vetítősíkjának* is nevezzük. Merőleges vetítéssel kapcsolatban a képsíkra merőleges síkot, illetve egyenest vetítő egyenesnek ill. vetítősíknak mondjuk.

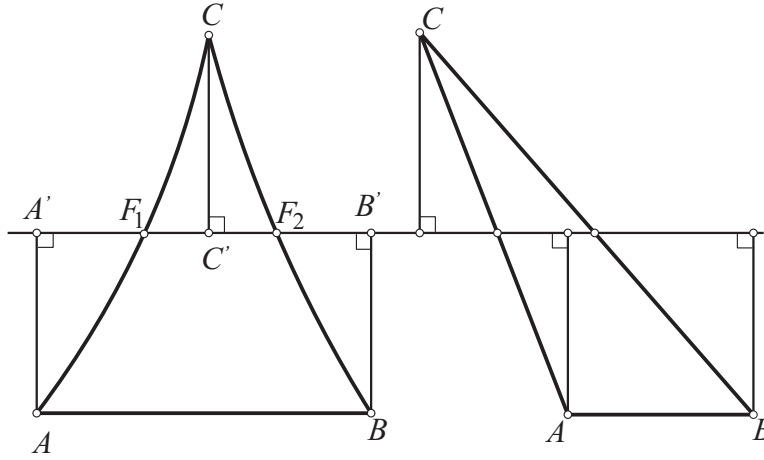
1.6. Egyenesek kölcsönös helyzete a térben

Ha két egyenes metszi egymást, akkor egy síkban fekszenek, és minden háromszög egy síkban fekszik. Ha van két párhuzamos egyenes, és mindegyiken tetszőlegesen veszünk egy pontot, akkor a pontokra illeszkedő egyenes ugyanabban a síkban fekszik, mint a párhuzamosok.

Euklidész XI.2. illetve XI.7. Tételei

Egy tételt abszolút tételnek mondunk, ha bizonyítható mindkét abszolút geometriában. A bizonyítás ilyenkor lehet különböző a két geometriában, kihasználva azok speciális párhuzamossági axiómáját. Azonban egy abszolút tételnek lehet abszolút bizonyítása is, melynek során egyik párhuzamossági axiómát sem használjuk. A kitérő egyenesek normáltranszverzálisának létezése és egyértelműsége is abszolút tétel, amelyre abszolút bizonyítás adható.

1.6.1. Lemma. *A háromszög középvonala a hozzátartozó oldal felénél nem hosszabb.*



1.33. ábra. Tétel a középvonatról

Bizonyítás: Az ABC_{Δ} háromszög AB oldalához tartozó F_1F_2 középvonalának egyenesére, vetítsük rá merőlegesen az A, B, C csúcsokat. Így adódnak az A', B', C' pontok. Az $AA'F_{1\Delta}$, $CC'F_{1\Delta}$ illetve a $BB'F_{2\Delta}$, $CC'F_{2\Delta}$ háromszögpárok egybevágósága alapján $2|F_1F_2| = |A'B'|$ teljesül (1.33 ábra). Az AA' , BB' egyeneseknek közös merőlegese $A'B'$, míg az AB szakasz egy Saccheri-négyszög szemközti alapja, vagyis az 1.4.3 Lemma szerint $|AB| \geq |A'B'| = 2|F_1F_2|$. $\square$

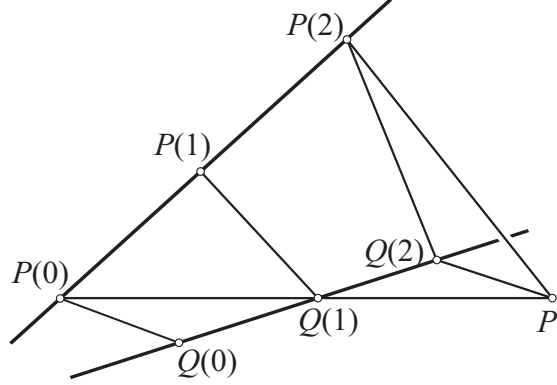
1.6.1. Definíció. *A P pont a térben egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, ha helyzetét egy $P(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, leképezés írja le, ami rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

- a $P(t)$ pontok kollineárisak,
- minden $c \in \mathbb{R}^+$ pozitív valós szám és tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ valós szám esetén

$$|P(0)P(ct)| = c|P(0)P(t)|,$$

vagyis az elmozdulás mértéke egyenesen arányos a paraméter megváltozásával azaz az eltelt idővel.

1.6.2. Lemma. *A P és Q pontok az abszolút térben egy-egy egyenes mentén egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek. Ekkor a $\overline{P(t)Q(t)}$ szakasz hossza az eltelt t időnek folytonos, konvex függvénye. Ha a pontok mozgásának egyenesei kitérőek (ultraparallelek), akkor a vizsgált függvény szigorúan konvex.*



1.34. ábra. A transzverzális függvény konvexitása.

Bizonyítás: A folytonosság közvetlen következménye a háromszög egyenlőtlenségnek és a definíció második feltételének. Ezért az általános konvexitási feltétel helyett elegendő a felezőpontokra vonatkozó konvexitási feltételt igazolni. Tekintsük ehhez a $t = 0, 1, 2$ időpillanatokat és a megfelelő $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, illetve $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(2)$ kollineáris ponthármasokat. Igazolnunk kell, hogy

$$2|P(1)Q(1)| \leq |P(0)Q(0)| + |P(2)Q(2)|.$$

Legyen a $P(0)$ pont tükörképe $Q(1)$ -re P' (lásd 1.34. ábra). Ekkor a megfelelő háromszögek egybevágósága miatt $|P(0)Q(0)| = |P'Q(2)|$, és így a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$|P(0)Q(0)| + |P(2)Q(2)| = |P'Q(2)| + |P(2)Q(2)| \geq |P'P(2)|.$$

Ugyanakkor a $P(0)P(2)P'_\Delta$ háromszögre alkalmazva az 1.6.3. Lemmát, kapjuk, hogy $|P'P(2)| \geq 2|P(1)P(2)|$, ami éppen az állítást jelenti. A szigorú konvexitás a háromszög-egyenlőtlenségnek az adott szituációban nem elfajuló voltából következik. $\square$

A lemmában nem kellett foglalkozni sem a $t = 0$ időponthoz tartozó kezdőpontok, sem a sebességek megválasztásával, tehát az állítás ezektől függetlenül igaz.

A normáltranszverzálisra vonatkozó főtételeink bizonyítása előtt jegyezzük meg, hogy egy a teljes számegyenesen értelmezett és ott pozitív, folytonos

és szigorúan konvex f függvény végtelenben vett határértékei a következők szerint alakulhatnak:

- $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = c \in \mathbb{R}$ és $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$, vagy
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \infty$ és $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c \in \mathbb{R}$, vagy
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$.

Így az egyértelmű minimumhely az első két esetben csak a kibővített számegyenesen létezik, míg a harmadik esetben a valós számegyenesnek egy közös pontja lesz.

1.6.1. Tétel. *Abszolút tér két nem egysíkú (kitérő) egyenesének egyértelműen létezik közös merőlegese. Ezen a metszéspontokat összekötő szakasz a két egyenes egy-egy pontját összekötő szakaszok közül a legrövidebb. A közös merőlegest nevezzük a két egyenes normáltranszverzálisának.*

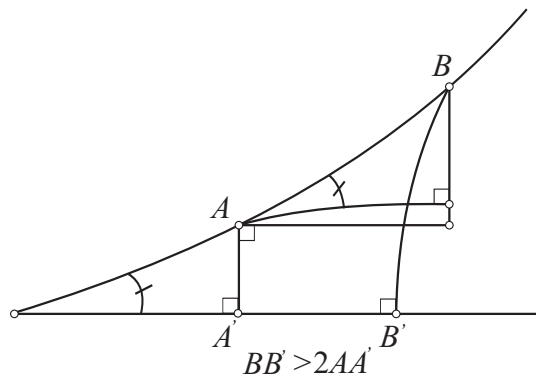
Bizonyítás: Tekintsük az a és b nem komplanáris egyeneseket. Tükrözzük a pontjait rendre a b egyenesre. Világos, hogy ekkor a tükröképek egy a' egyenest alkotnak. Tegyük föl, hogy az $A(t)$ pont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez az a egyenesen. Jelölje $B(t)$ az $A(t)$ pont merőleges vetületét b -n, $A'(t)$ pedig legyen $A(t)$ b -re vonatkozó tükröképe a' -n. Ekkor a megfelelő egybevágó háromszögekből azonnal adódik, hogy $A'(t)$ is egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. (Ugyanezt nem mondhatjuk el $B(t)$ -ről!) Alkalmazzuk most az előbbi lemmánkat az

$$f(t) : t \mapsto |\overline{A(t)A'(t)}|$$

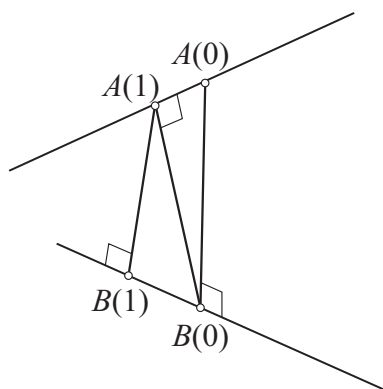
függvényre, amely így folytonos, pozitív és szigorúan konvex. Azt kell még igazolnunk, hogy $f(t)$ határértéke a mindkét végtelenben végtelen. A szimmetria miatt elegendő megmutatni, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty$. Ehhez vizsgáljuk az $\overline{A(t)A'(t)}$ szakasz helyett a fele akkora $\overline{A(t)B(t)}$ szakasz hosszát. Tekintsük a $\beta = [b, A(0)]$ síkot. Jelölje a'' illetve $A''(t)$ rendre az a egyenes illetve $A(t)$ pont merőleges vetületét β -n. Az a , a'' egyenespár metsző így könnyen láthatóan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |A(t)B(t)| \geq \lim_{t \rightarrow \infty} |A(t)A''(t)| = \infty.$$

(Metsző egyenespárra az állítás leolvasható az 1.35 ábráról.) A tétel kimondása előtt felsorolt lehetőségek közül tehát a harmadik teljesül, így az $f(t)$ függvénynek egyértelműen létezik egy végesben fekvő t_0 minimumhelye.



1.35. ábra. A metsző egyenesek exponenciálisan távolodnak.



1.36. ábra. A normáltranszverzális a legrövidebb összekötő szakasz.

Ezek szerint az $\overline{A(t_0)B(t_0)}$ szakasz az a és b egyenesek legrövidebb b -re merőleges összekötő szakasza. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem merőleges a -ra. Ekkor a $[B(t_0), a]$ síkban a $B(t_0)$ pontból a -ra bocsátott merőleges egy rövidebb $\overline{B(t_0)A(t_1)}$ összekötő szakaszt eredményezne (1.36 ábra). Ennél viszont az $A(t_1)$ metszéspontból b -re bocsátott merőleges $\overline{A(t_1)B(t_1)}$ szakasz rövidebb volna, ami nem lehetséges. Így $\overline{A(t_0)B(t_0)}$ merőleges a -ra is. Mivel t_0 egyértelmű, a normáltranszverzális is az. $\square$

1.7. Trigonometria

*Az ebből levezethető gömbi trigonometria így a
XI. Axiómától független megalapozást nyert.*

Bolyai: Appendix 26.§

Bolyai és Lobacsevszkij egyaránt észrevették, hogy a gömbi trigonometria abszolút, a párhuzamossági axiómától független ága a geometriának. Először Bolyai nyomán állítjuk:

1.7.1. Tétel (Abszolút szinusztétel). *Bármely háromszögben illetve gömbháromszögben az oldalakkal, mint sugarakkal írt körök kerületei úgy aránylanak egymáshoz mint a szemközti szögek szinusza.*

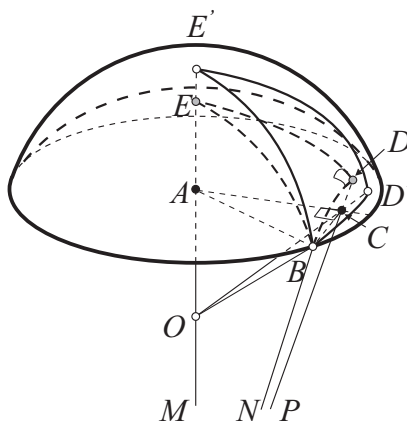
Bizonyítás: Tekintsünk egy ABC_Δ derékszögű háromszöget abszolút térünkben, melynek derékszögű csúcsa C . Tekintsük a háromszög síkjára merőleges M végű $\overrightarrow{AM}$ félegyenest, és vegyük ennek egy tetszőleges O pontját. Az O középpontú B -n áthaladó gömb és az $\overrightarrow{AM}$ félegyenes által meghatározott párhuzamos sugársor B -n keresztülhaladó paraszférája ugyanabban a körben metszi az $[A, B, C]$ síkot. E kör középpontja éppen az A csúcs, sugara pedig a háromszög $\overline{AB}$ átfogója. Kerületét így a síkon, a gömbfelszínen és a paraszférán (lásd a 6. fejezet) is számolhatjuk, a megfelelő sugarak alkalmas függvényeként.

A továbbiakban bizonyítás nélkül felhasználjuk, hogy a három felület közül valamelyiknek euklideszi a geometriája. Az euklideszi esetben a sík és a vele megegyező paraszféra lesz ilyen, hiperbolikus esetben pedig egyedül a paraszféra.

Meghúzva az A , B és C pontokon keresztül az $\overrightarrow{AM}$ félegyenessel párhuzamos AM , BN és CP egyeneseket (M , N , P az egyenesek alkalmas, távoli pontjai), valamint az O ponton áthaladó OB , OC sugarakat is, ezek rendre E , E' pontpárban, B -ben illetve a D , D' pontpárban metszik a paraszférát illetve a gömbfelületet. Mivel a DP illetve a $D'O$ egyenesek rendre tengelyei

$$\sin \alpha : 1 = 2|\overline{DB}| \pi : 2|\overline{EB}| \pi = f(|\overline{BC}|) : f(|\overline{AB}|) = g(|\overline{D'B}|) : g(|\overline{E'B}|),$$

9



1.37. ábra. Abszolút szinusztétel.

1.7.2. Tétel. *A gömbi ABC_Δ derékszögű háromszögben (a szokásos jelölésekkel) fennálló*

$$\sin a = \sin \alpha \sin c$$

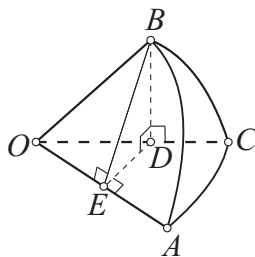
összefüggés abszolút érvényű. Következésképpen $g(r) = p \sin(r)$, ahol p jelöli az egységsugarú gömb főkörének kerületét.

Bizonyítás: Jelölje O a gömb középpontját. Tekintsük az OA sugárra merőleges, a B csúcson áthaladó σ síkot, és jelölje ennek OC -vel alkotott metszéspontját D , az OA -val közös pontját pedig E . Mivel a σ és az $[O, B, C]$ síkok merőlegesek az $[O, A, C]$ síkra, ezért a BD metszéspontjuk is merőleges rá. Így a $BDE_{\wedge}$ háromszög D -nél levő szöge derékszög, azaz

$$f(|\overline{DB}|) : f(|\overline{BE}|) = \sin \alpha.$$

Mivel az OEB_Δ és ODB_Δ háromszögek derékszögűek, ezért

$$\sin(|\overline{BA}|) = f(|\overline{EB}|) : f(|\overline{OB}|), \quad \text{és} \quad \sin(|\overline{BC}|) = f(|\overline{DB}|) : f(|\overline{OB}|).$$



1.38. ábra. Gömbi szinusztétel.

A három egyenletből

$$\sin a = \sin(|\overline{BC}|) = \sin A \sin(|\overline{BA}|) = \sin \alpha \sin c$$

adódik. Összevetve ezt az előző tétel gömbre vonatkozó állításával kapjuk az

$$g(r) : g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin r : 1$$

egyenlőséget, ami bizonyítja az utolsó állításunkat. □

1.8. Euklidész



1.39. ábra. Euklidész

A matematikához nem vezet királyi út.

Euklidész

Euklidész tizenhárom könyve közül az első állításait idézzük fel, hogy láthassuk, annak szigorú és következetes felépítését. Ez a könyv a legsikerültebb, talán azért, mert az addig kikristályosodott elmélet hű leírását adja. Tökéletesen használható ma is tankönyvnek, különösen tetszetős az alapállítások három csoportba sorolása. A görög matematika csoportos vita által való művelésére utalva definíciókat, posztulátumokat illetve axiómákat fogalmaz meg. A Definíció a vita tárgya, a Posztulátum a vitatkozó felek egyike által önkényesen elfogadott állítás, míg az Axióma minden a vitában résztvevő által elfogadott alapállítás. Geometriáról lévén szó a szerkesztéseket is tételként említi.

EUKLIDÉSZ: ELEMÉK

I. KÖNYV

DEFINÍCIÓK:

1. Pont az, aminek nincs része.
2. A vonal, szélesség nélküli hosszúság.
3. A vonal végei pontok.

4. Egyenes vonal az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.
5. Felület az, aminek csak hosszúsága és szélessége van.
6. A felület végei vonalak.
7. Síkfelület az, amelyik a rajta levő egyenesekhez viszonyítva egyenlően fekszik.
8. A síkszög két olyan egysíkbeli vonal egymáshoz való hajlása, amelyek metszik egymást, és nem fekszenek egy egyenesen.
9. Ha a szöget közrefogó vonalak egyenesek, egyenes vonalúnak nevezzük a szöget.
10. Ha valamely egyenesre egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll.
11. Tompaszög az, amelyik nagyobb a derékszögnél.
12. Hegyesszög pedig, amelyik kisebb a derékszögnél.
13. Határ az, ami vége valaminek.
14. Alakzat az, amit egy vagy több határ vesz körül.
15. A kör síkbeli alakzat, amelyet egy vonal vesz körül úgy, hogy e vonal és egy, az alakzat belsejében fekvő pont közé eső szakaszok egyenlők egymással.
16. Ezt a pontot a kör középpontjának nevezzük.
17. A körnek átmérője bármely, a középponton át haladó egyenes vonal, amely mindkétoldalt a kör kerületén végződik. Az ilyen egyenes félbevágja a kört.
18. A félkör olyan alakzat, amelyet egy átmérő és az általa kimetszett körív vesz körül.
19. Egyenesvonalú alakzatok azok, amelyeket egyenes vonalak vesznek körül, háromoldalúak, amelyeket három, négyoldalúak, amelyeket négy, sokoldalúak pedig, amelyeket négynél több egyenes vesz körül.
20. A háromoldalú alakzatok közül egyenlő oldalú háromszög az, amelynek három egyenlő oldala van, egyenlő szárú, amelynek csak két egyenlő oldala van, ferde pedig, amelynek három nem egyenlő oldala van.

21. Továbbá a háromoldalú alakzatok közül derékszögű háromszög az, amelynek van derékszöge, tompaszögű, amelynek van tompaszöge, hegyesszögű pedig, amelynek három hegyesszöge van.
22. A négyszögű alakzatok közül négyzet az, amelyik egyenlő oldalú és derékszögű, téglalap, amelyik derékszögű, de nem egyenlő oldalú, rombusz, amelyik egyenlő oldalú, de nem derékszögű, rombold, amelynek szemközi oldalai és szögei egyenlők egymással, de sem nem egyenlő oldalú, sem nem derékszögű. A többi négyszögű neve legyen trapéz.
23. Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkétoldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak.

POSZTULÁTUMOK:

1. Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.
2. És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.
3. És hogy minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.
4. És hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen.
5. És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek összege két derékszögnél kisebb, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre a két derékszögnél kisebb szögek vannak.

AXIÓMÁK:

1. Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.
2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek egyenlők.
3. Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők.
4. Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők.
5. Ugyanannak a kétszeresei egyenlők egymással.
6. Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.

7. Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.
8. Az egész nagyobb a résznél.
9. Két egyenes vonal nem fog közre területet.

TÉTELEK:

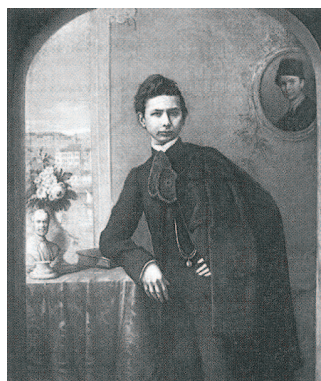
1. Véges egyenes szakasz fölé egyenlő oldalú háromszög állítható.
2. Van adott végpontú adott hosszúságú szakasz.
3. Két adott, nem egyenlő szakasz közül a nagyobbikból kivonható egy, a kisebbel egyenlő szakasz.
4. Ha két háromszögnek két-két oldala és a közrezárt szögük egyenlő, akkor az alapok is egyenlők, és a háromszögek is egyenlők, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek.
5. Az egyenlőszárú háromszögeknek az alapon fekvő szögei egyenlők egymással, és ha meghosszabbítjuk az egyenlő oldalakat, akkor az alap alatt egyenlő szögek keletkeznek.
6. Ha egy háromszög két szöge egyenlő egymással, akkor az egyenlő szögekkel szemben fekvő oldalak is egyenlők egymással.
7. Ugyanarra az egyenesre nem lehet adott két szakasszal páronként egyenlő másik két szakaszt állítani úgy, hogy más ponton találkozzanak, de ugyanazon az oldalon feküdjenek, és ugyanazok a pontok legyenek a végeik, mint az előző szakaszoknak.
8. Ha két háromszögnek két-két oldala páronként egyenlő, és alapjuk egyenlő, akkor a szögeik is egyenlők, amelyeket az egyenlő oldalak zárnak be.
9. Adott egyenes vonalú szög megfelelezhető.
10. Adott szakasz megfelelezhető.
11. Adott egyeneshez, adott pontjából húzható derékszögű egyenes.
12. Adott végtelen egyenesre rajta kívüli pontból bocsátható merőleges egyenes.
13. Ha úgy keletkeznek szögek, hogy egy egyenest állítunk egy egyenesre, akkor vagy két derékszög, vagy összegben két derékszöggel egyenlő szögek keletkeznek.

14. Ha valamely egyenesen levő pontnál két egyenes fekszik nem ugyanazon az oldalon, és két derékszöggel egyenlő szögeket alkotnak egymás mellett, akkor ugyanazon az egyenesen van a két egyenes.
15. Ha két egyenes metszi egymást a keletkező csúcsszögek egyenlők.
16. Minden háromszögben az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög nagyobb mind a két szemközt fekvő belső szögnél.
17. Minden háromszögben két szög összege kisebb két derékszögnél, bárhogy is választjuk őket.
18. Minden háromszögben a nagyobb oldal nagyobb szöggel szemben fekszik.
19. Minden háromszögben a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik.
20. Minden háromszögben két oldal együtt nagyobb a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket.
21. Ha egy háromszög egyik oldalára a végpontjaiban belül két szakaszt állítunk, akkor az álló szakaszok a háromszög másik két oldalánál együtt kisebbek, de nagyobb szöget fognak közre.
22. Szerkeszthető háromszög három szakaszból, amelyek három adott szakasszal egyenlők, ha két szakasz együtt nagyobb a harmadiknál, akárhogy is választjuk őket.
23. Szerkeszthető adott egyenesre, egy rajta levő ponthoz, adott egyenes vonalú szöggel egyenlő egyenes vonalú szög.
24. Ha két háromszögben két-két oldal páronként egyenlő, de az egyenlő oldalak által közrefogott szög nagyobb az egyikben, mint a másikban, akkor az egyiknek az alapja szintén nagyobb a másik alapjánál.
25. Ha két háromszögben két-két oldal páronként egyenlő, az egyik alapja viszont nagyobb a másik alapjánál, akkor az egyenlő oldalak által közrefogott szög is nagyobb abban a háromszögben, amelynek alapja nagyobb mint a másikban.
26. Ha két háromszögben két-két szög páronként egyenlő, és egy-egy oldal is, akár az egyenlő szögek melletti oldal, akár az, amelyik az egyenlő szögek egyikével szemben fekszik, akkor a többi oldal is páronként egyenlő, és ugyanígy a fennmaradó egy-egy szög.

27. Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy egymás között egyenlő váltószögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos egymással.
28. Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy ugyanazon az oldalon levő szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, vagy ugyanazon az oldalon két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos.
29. Ha párhuzamos egyeneseket metsz egy egyenes, akkor egymással egyenlő váltószögek keletkeznek, és a szemközti belső szöggel egyenlő külső szög keletkezik, és ugyanazon az oldalon együtt két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek.
30. Az ugyanazzal az egyenessel párhuzamos egyenesek egymással is párhuzamosak.
31. Adott ponton át adott egyenessel húzható párhuzamos egyenes.
32. Minden háromszögben az egyik oldal meghosszabbításakor keletkező külső szög egyenlő a két szemközti belső szög összegével, és a háromszög három belső szöge együtt két derékszöggel egyenlő.
33. Egyenlő és párhuzamos szakaszokat ugyanazon az oldalon összekötő szakaszok maguk is egyenlők és párhuzamosak.
34. A párhuzamos vonalú idomok szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással, és az átló felezi őket.
35. Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák egyenlők egymással.
36. Az egyenlő alapokon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák egyenlők egymással.
37. Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek egyenlők egymással.
38. Az egyenlő alapokon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek egyenlők egymással.
39. Az ugyanazon az alapon és ugyanazon az oldalon fekvő egyenlő háromszögek ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek.
40. Az egyenlő alapokon és ugyanazon az oldalon fekvő egyenlő háromszögek ugyanazon párhuzamosok között is fekszenek.

41. Ha egy paralelogrammának ugyanaz az alapja, mint egy háromszögnek, és ugyanazon párhuzamosok között fekszik, akkor a paralelogramma kétszerese a háromszögnek.
42. Szerkeszthető adott háromszöggel egyenlő adott egyenes vonalú szögű paralelogramma.
43. Minden paralelogrammában az átló körülötti paralelogrammák kiegészítői egyenlők egymással.
44. Illeszthető adott szakaszhoz adott háromszöggel egyenlő adott egyenesvonalú szöggel rendelkező paralelogramma.
45. Szerkeszthető adott egyenesvonalú alakzattal egyenlő és adott egyenesvonalú szöggel rendelkező paralelogramma.
46. Adott szakaszra mint oldalra emelhető négyzet.
47. A derékszögű háromszögben a derékszöggel szemkötti oldalra emelt négyzet egyenlő a derékszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegével.
48. Ha egy háromszögben az egyik oldalra emelt négyzet egyenlő a háromszög másik két oldalára emelt négyzetek összegével, akkor derékszög a háromszög másik két oldala által közrefogott szög.

1.9. Bolyai



1.40. ábra. Bolyai János

Bolyai János művét - a kor szokása szerint - folyamatosan leírt, paragrafusokra bontott, összefüggő szöveggént tette közzé. E fejezetnek a hiperbolikus párhuzamosságról szóló bekezdését az Ő műve alapján építettük fel. A fő vonal könnyebb áttekintése miatt megpróbáljuk - a paragrafus bontás elhagyásával - definícióit tételeit azok lineáris rendjében tolmácsolni.

BOLYAI JÁNOS: APPENDIX

A TÉR ABSZOLÚT IGAZ TUDOMÁNYA

A XI. EUKLIDES-FÉLE AXIÓMA (A PRIORI SOHA ELNEM DÖNTHETŐ) HELYES, VAGY TÉVES VOLTÁTÓL FÜGGETLEN TÁRGYALÁSBAN: ANNAK TÉVES VOLTA ESETÉRE, A KÖR NÉGYSZÖGESÍTÉSÉVEL.

DEFINÍCIÓK:

1. Félegyeneselek párhuzamossága az elpattanás fogalma alapján.
2. Paraszférának (F -nek) nevezzük az A pontnak és mindazon B pontoknak az összességét, amelyeknek bármelyike olyan, hogyha BN párhuzamos AM -el akkor $NBA_{\angle} = MAB_{\angle}$. Az F -nek bármely az AM egyenest tartalmazó síkkal való metszetét L paraciklusnak nevezzük.
3. Az Euklidész XI. axiómája (V.Posztulátum) igaz voltának feltevésén felépülő geometriát nevezzük Σ -nak az ellenkező feltevésen alapulót S -nek. Mindazok a tételek, amelyeknél nem említjük kifejezetten, hogy vajon a Σ vagy az S rendszerben érvényesek-e, abszolút igazak, vagyis állítjuk, hogy érvényesek, akár a Σ , akár az S rendszerben tekintjük őket.

TÉTELEK:

1. A kezdőpont áthelyezhető azon az egyenesen, mellyel az elpattanó egyenest húztuk.
2. A metsző szakaszok félegyenessel bezárt szöge nullához tart.
3. A kezdőpont áthelyezhető az elpattanó félegyenesen.
4. Adott félegyenessel párhuzamos félegyenések, nem metszők.
5. Ha az AB félegyenes az $MAB_{\angle}$ tartományban halad, akkor minden B pontjához van olyan C pont az AM félegyenesen, amire $BCM_{\angle} = NAM_{\angle}$.
6. Ha BN párhuzamos AM , akkor az AM egyenesen van olyan F pont, hogy $MFB_{\angle} = NBF_{\angle}$.
7. Ha BN félegyenes párhuzamos AM -el és G az AM , H pedig a BN egyenes pontja, akkor HN párhuzamos GM -el és GM párhuzamos HN -el.
8. Ha BN párhuzamos AM -el, CP párhuzamos AM -el, és C a BN egyenesen kívül van, akkor BN párhuzamos CP -vel.
9. Ha BN párhuzamos CP , $NBC_{\angle} = PCB_{\angle}$ és az $NBCP$ tartományban lévő AM merőlegesen felezi BC -t, akkor BN párhuzamos AM -el.
10. Ha BN párhuzamos AM -el és az MAP és NBD (azonos térfélbe tartozó) félsíkoknak az $MABN$ síkkal bezárt szögeik összege kisebb $2R$ -nél, akkor metszik egymást.
11. Ha BN és CP párhuzamosok AM -el és $NBA_{\angle} = BAM_{\angle}$, valamint $PCA_{\angle} = MAC_{\angle}$, akkor BN párhuzamos CP -vel és $NBC_{\angle} = PCB_{\angle}$.
12. Ha B az AM -hez tartozó L tetszőleges pontja, és AM párhuzamos BN -el, akkor az A -hoz és B -hez tartozó L -ek megegyeznek.
13. Ha BN párhuzamos AM -el CP párhuzamos DQ -val, és $BAM_{\angle} + ABN_{\angle} = 2R$, akkor $DCP_{\angle} + CDQ_{\angle} = 2R$.
14. Ha BN párhuzamos AM -el CP párhuzamos DQ -val, és $BAM_{\angle} + ABN_{\angle} < 2R$, akkor $DCP_{\angle} + CDQ_{\angle} < 2R$.
15. Ha AM valamely L -nek tengelye, akkor a $\sum$ rendszerben ez az L az AM -re merőleges egyenes.

16. L az S rendszerben is vonal és F felület.
17. Az S rendszerben minden olyan sík, mely az F -nek A pontján megy keresztül és az AM tengelyhez ferdén áll, F -et körben metszi.
18. Az S rendszerben valamely L -nek BN tengelyére merőleges, s L síkjában lévő BT egyenes érintője L -nek.
19. F -ben bármely két L -vonal alkotta szög a szárait tartalmazó F -re merőleges síkok lapszögével egyenlő.
20. Két ugyanabban az F -ben lévő L vonal, amelyek egy harmadik L vonallal $2R$ -nél kisebb összeget adó belső szöget alkotnak, metszik egymást.
21. Az F felületen -ha az egyenesek szerepét az L vonalakra ruházzuk át - akkor a XI. axióma, és a $\sum$ sík egész geometriája és trigonometriája érvényes. Így annak a körnek a kerülete, amelynek az F felület L vonala mentén mért hossza $r \cdot 2\pi r$, az F felületen mért területe $r^2\pi$ -vel egyenlő.
22. Ha AB az AM tengelyhez tartozó L -vonal és C az AM -en van, ha továbbá a $CAB_{\angle}$ szöget - melynek egyik szára az AM tengely, másik szára az L alakú AB - mindkét irányban a végtelenbe toljuk akkor C -nek útja a CM tengelyhez tartozó L vonal. Ezt az AB -vel párhuzamos L -vonálnak nevezzük.
23. Ha AB és CD párhuzamos L -vonalak, akkor az (AB) illetve (CD) ívek hosszának aránya független a hosszuktól, az AC távolságtól meghatározott érték. Ha az AC távolságot kis x -el jelöljük, a megfelelő párhuzamos ívek hosszának arányát nagy X -el jelöljük.
24. $Y = X^{\frac{x}{y}}$. Az S rendszerben $X = 1$ a $\sum$ rendszerben $X > 1$, és bármely AB , ABE ívekhez megadható CDF úgy, hogy CDF párhuzamos ABE és CD ív egyenlő AB ívvel. Azaz két párhuzamos egyenes által határolt tartomány egybevágó tetszőleges az előbbiekkal párhuzamos egyenesek által határolt tartománnyal. Speciálisan „a rész lehet egyenlő az egésszel”.
25. Bármely egyenesvonalú háromszögben az oldalakkal egyenlő sugarú körök kerületei úgy aránylanak egymáshoz, mint a velük szemközti szögek sinusai.
26. Bármely gömbháromszögben az oldalak sinusai úgy aránylanak egymáshoz, mint a velük szemközti szögek sinusai. Következésképpen a gömbi trigonometria a párhuzamossági axiómától független.

27. Ha AC és BD merőleges AB -re, s a $CAB_{\angle}$ -et az AB egyenes mentén eltoljuk, akkor a C pont útja a CD (hiperciklus) ív, akkor ennek hossza az AB szakasz hosszához úgy aránylik, mint a $\sin CAD_{\angle}$ a $\sin ADB_{\angle}$ értékhez.

28. Ha $AB > CD$ párhuzamos L -ívek x távolsággal, akkor

$$X = \sin ACB_{\angle} : \sin CBD_{\angle}.$$

29. Ha $BAM_{\angle} = R$, az AB szakasz hossza y és BN párhuzamos AM -el, akkor az S rendszerben $Y = \cot \frac{1}{2} NBA_{\angle}$.

30. Az y sugarú kör kerülete az S -rendszerben $\pi k (e^{\frac{y}{k}} - e^{-\frac{y}{k}})$, ahol k számhoz tartozó K éppen $e = 2,7182818...$

31. Jelölje a, b egy derékszögű háromszög két befogóját c pedig az átfogóját. α, β, R a szemközti szögek, ekkor

$$1 : \sin \alpha = (e^{\frac{c}{k}} - e^{-\frac{c}{k}}) : (e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}}),$$

$$\cos \alpha : \sin \alpha = \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}),$$

$$(e^{\frac{c}{k}} - e^{-\frac{c}{k}})^2 = \frac{1}{4} (e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}})^2 (e^{\frac{b}{k}} - e^{-\frac{b}{k}})^2 + (e^{\frac{a}{k}} - e^{-\frac{a}{k}})^2,$$

és végül

$$\cot \alpha \cot \beta = \frac{1}{2} (e^{\frac{c}{k}} - e^{-\frac{c}{k}}).$$

32. Legyen a z hosszú AB , valamely vonal a síkon, melynek CA, CB merőleges egyenespárra vonatkozó derékszögű koordináták szerinti egyenlete $y = f(x)$. A CAB tartomány területe u . Ha például, AB AM tengelyű L vonal ennek egyenlete:

$$e^{\frac{y}{k}} = e^{\frac{x}{k}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{k}} - 1}.$$

33. Legyen az AB p hosszú alapvonalhoz tartozó q távolságra levő CD hiper-ciklus ív hossza r , ekkor a $CABDC$ tartomány s területe:

$$s = \frac{1}{2} pk (e^{\frac{q}{k}} - e^{-\frac{q}{k}}).$$

34. A p területű síkidom és a rá merőleges t hosszú szakaszok által meghatározott test térfogata:

$$v = \frac{1}{8}pk \left(e^{\frac{2q}{k}} - e^{-\frac{2q}{k}} \right) + \frac{1}{2}pq.$$

35. Az r sugarú kör területe:

$$\pi k^2 \left(e^{\frac{r}{k}} + e^{-\frac{r}{k}} + 2 \right).$$

36. Az r hosszúságú L vonal és a vele párhuzamos x távolságra levő L vonal által közrezárt szektor területe:

$$u = rk \left(1 - e^{-\frac{x}{k}} \right),$$

így a teljes paraciklus tartomány területe, illetve egy p paraszféra tartomány metszetű szektor térfogata:

$$rk \text{ illetve } \frac{1}{2}pk.$$

37. Az S rendszerben a gömb felszíne és térfogata:

$$\frac{p^2}{\pi} \text{ illetve } \frac{1}{2}\pi k^3(X^2 - X^{-2}) - 2\pi k^2x,$$

ahol x a sugár és p a gömbi főkör kerülete.

38. Az AB szakasztól q távolságra levő pontok által meghatározott felület felszíne és a kapott forgásfelület térfogata:

$$\frac{1}{2}\pi kp(Q^2 - Q^{-2}),$$

illetve

$$\frac{1}{4}\pi k^2 p(Q - Q^{-1})^2.$$

MEGÁLLAPÍTÁSOK:

- Ha k végtelenhez tart, akkor bármely k -t tartalmazó kifejezés határértéke éppen a megfelelő $\sum$ rendszerbeli mennyiség, hacsak azonosság nem keletkezik.

2. Eldöntetlen marad, hogy vajon a valóságban a Σ vagy pedig valamelyik S rendszer teljesül-e.
3. Mindaz, amit a XI. axióma (V. Posztulátum) helytelenségének feltevéséből levezettünk, abszolút igaz, ebben az értelemben tehát semmiféle feltevésre nem támaszkodik. Van eszerint olyan a priori sík trigonometria, amelynél csupán az igaz rendszer ismeretlen és ezért csakis a kifejezések abszolút nagysága marad meg nem határozott, azonban egyetlen ismert eset alapján nyilván az egész rendszert rögzíthetnénk. A gömbi trigonometriát viszont abszolút érvényben bizonyítottuk. Az F felületen a Σ rendszer sík geometriájának tökéletesen megfelelő geometria érvényes.
4. Ha tudnók, hogy Σ érvényes, akkor e tekintetben semmiféle további nyílt kérdés nem maradna. Ha azonban tudnók, hogy nem érvényes, akkor szükséges volna, hogy rendelkezünk, valaminő olyan konkrét a értékkel, amelyhez tartozó A ismeretes. Ebben az esetben k természetes hosszegység volna. Ha tudnók, hogy k létezik akkor gyakorlatilag tökéletes pontossággal megszerkeszthető.
5. Nyilvánvaló, hogy a korábban kifejtett értelemben, minden térbeli feladat az analízis újabb, kellő határok között igen elismerésre méltó módszerével tárgyalható.
6. Következik végül, ami a szíves olvasó számára bizonyára nem érdektelen, hogy abban az esetben, ha valóságban nem Σ hanem S rendszer volna érvényes, akkor a körrel egyenlő területű egyenesvonalú idom szerkeszthető.

SZERKESZTÉSEK:

1. Adott pontból, adott félegyenessel párhuzamos félegyenes szerkesztése.
2. S -ben olyan egyenes szerkesztése, mely adott hegyesszög egyik szárával párhuzamos és merőleges a másik szárára.
3. Adott egyenesen áthaladó, adott síkra merőleges sík és az adott sík metszésvonalának szerkesztése.
4. Párhuzamos félegyeneseiken korrespondeáló pontpár szerkesztése.
5. Az F felületen a XI. axióma használata nélkül elvégezhetők mindazok a szerkesztések, amelyek a Σ rendszerben a síkon elvégezhetők.
6. Az MN egyenes t távolsághoz tartozó távolságvonalai AG illetve CH . Ekkor az AGC_{Δ} , AGH_{Δ} háromszögek szögösszege és területe egyenlő.

7. Egyenlő területű, egy egyenlő oldallal rendelkező háromszögek szögösszege egyenlő.
8. Egyenlő területű háromszögek szögösszege egyenlő.
9. Ha az ABC_{Δ} -ben u , a DFE_{Δ} -ben v a szögösszeget $2R$ -re kiegészítő szög, akkor a két háromszög területének aránya $u : v$.
10. A gömbháromszögek felszínének az aránya szögösszegeik $2R$ -et meghaladó részeinek, excesszusainak arányával egyenlő. A z excesszusú gömbháromszög felszíne:

$$\frac{zp^2}{4\pi^2}.$$

11. Ha z egészíti ki $2R$ -re a háromszög szögösszegét, akkor területe:

$$zk^2.$$

A háromszorosan aszimptotikus háromszög területe határátmenettel:

$$\pi k^2.$$

12. Megadható a paraszférán az aszimptotikus háromszöggel egyenlő területű kör, és körzős-vonalzós eljárással szerkeszthető ugyanilyen területű négyzet. Azaz vagy érvényes Euklidész XI. axiómája, vagy lehetséges a kör négyszögesítése.

„Hátra volna végül a tárgy minden vonatkozásban való lezárása érdekében annak bizonyítása, hogy mindennemű feltevés nélkül nem lehet eldönteni, vajjon $\sum$, vagy pedig valamelyik S (és melyik) teljesül. Ezt azonban kedvezőbb alkalomra halasztjuk.”

1.10. Lobacsevszkij



1.41. ábra. Nyikoláj Ivanovics Lobacsevszkij

–„Ki ne értene egyet azzal, hogy semmiféle matematikai tudománynak nem volna szabad olyan homályos fogalmakkal kezdődnie, mint amilyenekkel mi, Euklidész nyomán, a geometriát kezdjük, és hogy sehol a matematikában nem engedhető meg a szigorúságnak az a hiánya, amelyet a párhuzamosok elméletében kénytelenek voltunk eltűrni.”– Írja Lobacsevszkij első kiadott művében. A két feladat közül a másodikat sikeresen megoldotta ugyan de kortársai ugyanúgy nem ismerték fel teljesítményének volumenét, ahogy Bolyai Jánosét sem. Több próbálkozás után sikerült csak az általa „Elképzelt geometriának” nevezett struktúrához azt értő és elismerő olvasót találnia. 1840-ben németül megjelenteti „A Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből” c. kiadványát mellyel talál egy ilyen olvasót, Gauss-t. Fejezetünk ezen kiadvány tételeit tartalmazza. Lobacsevszkij nem törődött az abszolút geometriai tételek és az axiómák szétválasztásával illetve az egymásra épülő új tételek tartalom szerinti tagolásával – így mi is így teszünk.

NY.I. LOBACSEVSZKIJ: GEOMETRIAI VIZSGÁLATOK A PÁRHUZAMOSOK ELMÉLETÉNEK KÖRÉBŐL.

ELFOGADOTT TÉTELEK:

1. Az egyenes vonal minden helyzetben fedi saját magát. Ezen azt értem, hogy ha azt a felületet, amely az egyenest tartalmazza, az egyenes két pontja körül elforgatjuk, az egyenes helyzete nem változik.
2. Két egyenes nem metszheti egymást két pontban.

3. Az egyenes, mindkét irányban kellően meghosszabbítva, minden határon túlmegy és így bármely zárt síkrészt két részre oszt.
4. Ha két egyenes külön-külön merőleges egy harmadikra, akkor bármennyire meghosszabbítva sem metszik egymást.
5. Ha egy egyenes átmegy egy másik egyenes egyik partjáról a másikra, akkor metszi azt.
6. A csúcsszögek, vagyis két olyan szög, amelyek bármelyikének szárai a másik szög szárainak meghosszabbításai, egyenlők. Ez egyaránt áll egyenesek által alkotott síkbeli szögekre, és síkok által meghatározott lapszögekre.
7. Két egyenes nem metszheti egymást, ha egy harmadik mindkettőt ugyanabban a szögben metszi.
8. A síkháromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak és fordítva.
9. A síkháromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van. A derékszögű háromszög átfogója nagyobb bármelyik befogónál, a rajta levő szögek hegyesszögek.
10. Két síkháromszög egybevágó, ha egy oldaluk és két szögük, vagy két oldaluk és az azok által bezárt szögük, vagy két oldaluk és ezek közül a nagyobbikkal szemben levő szögük, vagy három oldaluk páronként egyenlő.
11. Ha egy egyenes merőleges két másik, vele nem egysíkú egyenesre, akkor merőleges mindazokra az egyenesekre, amelyek e két utóbbi egyenes síkjában vannak és átmennek azok metszéspontján.
12. Gömb síkmetszete kör.
13. Az olyan egyenes, mely merőleges két egymásra merőleges sík metszésvonalára és benne van az egyik síkban, merőleges a másik síkra.
14. A gömbháromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak, és megfordítva.
15. Két gömbháromszög egybevágó, ha két oldaluk és az azok által bezárt szögük, vagy egy oldaluk és az azon levő két szögük páronként egyenlő.

MAGYARÁZOTT VAGY BIZONYÍTOTT TÉTELEK:

1. A síkban az egy ponton átmenő egyenesek, egy adott egyeneshez való viszonyukat tekintve, két osztályba sorolhatók: a metszők és a nem metszők osztályába. A két osztály határát alkotó egyenest az adott egyenessel párhuzamosnak nevezzük. A pontból az egyenesre bocsátott merőleges és a párhuzamos által meghatározott szög a párhuzamossági szög. Ezt a pont és egyenes távolságának a függvényeként tekintjük.
2. A párhuzamos egyenes minden pontjában kielégíti a párhuzamosság kritériumát.
3. Két egyenes párhuzamossága mindig kölcsönös.
4. A háromszög belső szögeinek összege nem lehet több két derékszögnél.
5. Ha van egy olyan síkháromszög, melyben a szögek összege két derékszög, akkor ugyanez áll bármely más háromszögre is.
6. Adott ponton át mindig húzható olyan egyenes, mely egy adott egyenessel tetszésszerinti kis adott szöget zár be.
7. Ha két olyan egyenes, mely merőleges ugyanarra a harmadikra, párhuzamos egymással, akkor bármely síkháromszög szögeinek összege π -vel egyenlő. Ezen a feltevésen alapszik a közösleges geometria. Az ellenkező feltevés is megengedhető, mert semmiféle ellentmondásra nem vezet; ezen alapszik az az új geometria, amelyet én elképzelt geometriának neveztem el.
8. Bármely adott szöghöz található olyan távolság, amelyhez tartozó párhuzamossági szög az adott szög.
9. Minél inkább meghosszabbítjuk a párhuzamosokat párhuzamosságuk irányában, annál jobban közelednek egymáshoz.
10. Ha két egyenes párhuzamos egy harmadikkal, akkor egymással is párhuzamosak.
11. Ugyanazon gömb felszínén az átellenes gömbháromszögek területe egyenlő.
12. A triéder térszöge egyenlő lapszögeinek fél összegével, levonva ebből egy derékszöget.
13. Ha három sík párhuzamos egyenesekben metszi egymást, akkor a három lapszög összege egyenlő két derékszöggel.

14. A síkháromszög merőleges oldalfelezői vagy nem metszik egymást, vagy mindhárman egy közös ponton mennek át.
15. Ha a háromszög merőleges oldalfelezői közül kettő párhuzamos, akkor mind a három párhuzamos egymással.
16. Határvonalnak (horociklusnak) nevezzük az olyan síkgörbét, melyben a hűrok merőleges felezői mind párhuzamosak egymással.
17. Ha egy kör sugara minden határon túl nő, a kör határvonalba megy át.
18. Az AA' , BB' párhuzamos félegyenesei közötti AB , $A'B'$ határvonalívek hossza s illetve s' . Ekkor

$$s' = e^{-x}s,$$

ahol x az $AA' = BB'$ szakaszhossz, $e > 1$ állandó független az ívek hosszától és az x távolságuktól. A továbbiakban e legyen a természetes logaritmus alapszáma.

19. A határvonalat egyik tengelye körül megforgatva a határfelületet kapjuk. A határfelület bármely két pontját összekötő húr egyenlő szög alatt hajlik a végpontjain átmenő tengelyekhez. A határfelület bármely tengelye forgástengely és a tengelyen keresztülhaladó sík a felületet határvonalban metszi.
20. A határfelületháromszög oldalai és szögei között ugyanazok az összefüggések állnak fenn, mint a közönséges geometriában a síkháromszögek oldalai és szögei közt.
21. A derékszögű háromszög oldalai és szögei közti összefüggések, ha átfogója c befogói a illetve b az ezekkel szemben levő szögei $\Pi(\alpha)$ illetve $\Pi(\beta)$, ahol ezek jelentése az α illetve β távolságokhoz tartozó párhuzamossági szög:

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$$

$$\sin \Pi(\beta) = \cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a).$$

22. A fenti derékszögű síkháromszöggel együtt létezik egy gömbháromszög amelynek oldalai $\Pi(c)$, $\Pi(a)$ illetve $\Pi(b)$, szögei pedig rendre $\Pi(b)$, $\frac{1}{2}\pi$ illetve $\Pi(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$. Ha az oldalait ezen gömbháromszögnek most a, b illetve c jelöli, a befogókkal szemközti szögeket pedig A illetve B , a megelőző formulák az ismert:

$$\sin a = \sin c \sin A,$$

$$\sin b = \sin c \sin B$$

formulákba mennek át, így a gömbi trigonometria abszolút.

23. A párhuzamossági szögre fennáll:

$$\tan \frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}.$$

24. Általános háromszögre adódik:

$$\sin A \tan \Pi(a) = \sin B \tan \Pi(b),$$

$$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1,$$

$$\cot A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)},$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}.$$

„Ezen egyenletek már maguk is elegendő alapot adnak arra, hogy az elképzelt geometria feltevését lehetségesnek tartsuk. A közönséges geometriából folyó számítások pontosságának ellenőrzésére így nincs más eszközünk, mint a csillagászati megfigyelések. Mint arra egyik munkámban rámutattam, az euklidészi geometria annyira pontos közelítést ad, hogy azokban a háromszögekben, amelyek mérőeszközeink számára hozzáférhetőek, a szögek összegének két derékszögtől való eltérése a másodperc századrésznél is kisebb.”

1.11. Hilbert



1.42. ábra. David Hilbert.

A párhuzamossági axióma hiperbolikus változata megfogalmazható úgy, hogy folytonosságra vonatkozó állítást is tartalmazzon. Hilbert ezt észrevéve a hiperbolikus síkgeometria egy folytonossági axiómát nem tartalmazó megalapozását adja. Ezt a remek munkát tekintjük most át.

D. HILBERT: A BOLYAI-LOBACSEVSZKIJ-FÉLE GEOMETRIA ÚJABB MEGALAPOZÁSA.

ILLESZKEDÉSI AXIÓMÁK:

1. Két ponthoz, mindig tartozik egy egyenes, amely a két pont mindegyikéhez illeszkedik.
2. Két ponthoz nem tartozik több mint egy egyenes, amely a pontok mindegyikéhez illeszkedik.
3. Minden egyeneshez legalább két pont illeszkedik. Van három olyan pont, amelyek nem illeszkednek egy egyeneshez.

RENDEZÉSI AXIÓMÁK:

1. Ha egy B pont két másik A és C között van, akkor a három pont egy egyenesnek különböző pontja és B C és A között is van.

2. Két ponthoz, A -hoz és C -hez az AC egyenesnek legalább egy olyan B pontja tartozik, hogy a C A és B között van.
3. Egy egyenesnek bármely három pontja közül az egyik, de csak az egyik van a másik kettő között. Két pont között fekvő pontok halmaza a szakasz.
4. Legyen A, B, C három nem egy egyenesre eső pont és a egy olyan egyenes a síkjukban, amely egyikén sem megy át; ekkor ha az a egyenes az AB szakasz egyik pontján átmegy, feltétlenül átmegy vagy BC vagy az AC szakasz egyik pontján.

EGYBEVÁGÓSÁGI AXIÓMÁK:

1. Ha A, B egy a egyenesnek két pontja s ha továbbá A' egy a' egyenesnek pontja, akkor egy az A' által az a' egyenesen létesített, megadott félegyenesen mindig van egy olyan B' pont, hogy az AB szakasz az $A'B'$ szakasszal egybevágó, vagy egyenlő.
2. Ha egy $A'B'$ szakasz és egy $A''B''$ szakasz ugyanazzal az AB szakasszal egybevágó, akkor $A'B'$ szakasz az $A''B''$ szakasszal is egybevágó.
3. Legyen adott az a egyenesen két, közös pont nélküli szakasz, AB és BC , legyen adva továbbá ugyanazon, vagy egy másik a' egyenesen két, közös pont nélküli szakasz, $A'B'$ és $B'C'$; akkor, ha $AB \cong A'B'$ és $BC \cong B'C'$, egyben $AC \cong A'C'$. (Szög, szögtartomány definíciója.)
4. Legyen adva $(h, k)_\angle$, egy a' egyenes és az a' egyenes egyik oldala, h' jelentsen az a' egyenesnek egyik félegyenesét, amely O' pontból indul ki; akkor egy és csakis egy olyan k' félegyenes van, hogy $(h, k)_\angle$ szögtartomány egybevágó, vagyis egyenlő $(h', k')_\angle$ szögtartománnyal, és hogy ugyanakkor a $(h', k')_\angle$ összes belső pontjai az a' megadott oldalán vannak. Minden szög önmagával egybevágó.
5. Ha két háromszög két oldala és a közrezárt szöge egybevágó, akkor egy másik megfelelő szögük is egybevágó.

Az eddigi axiómákból könnyen adódnak a háromszögek egybevágóságára, valamint az egyenlőszárú háromszögre vonatkozó tételek, egyszersmind belátható, hogy lehet merőleget állítani, vagy merőleget bocsátani, valamint adott szakaszt, vagy adott szöget felezni. Éppen úgy, ahogy Euklidésznél az a tétel is következik, hogy minden háromszögben két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal.

AZ EGYMÁST METSZŐ ÉS NEM METSZŐ EGYENESEK AXIÓMÁJA:

1. Ha b tetszőleges egyenes és A egy nem rajta levő pont, akkor mindig van két A -ból induló félegyenes a_1 és a_2 amelyek nem egészítik ki egymást egyetlen egyenessé és amelyek nem metszik a b egyenest, viszont minden, az a_1, a_2 szögtartományban levő, A -ból induló félegyenes metszi a b egyenest. Bontsuk fel a b egyenest valamilyen B pontból két félegyenesre, b_1 -re és b_2 -re úgy, hogy a_1, b_1 illetve a_2, b_2 az AB egyenes azonos oldalán legyen, akkor az a_1 félegyenest a b_1 -hez az a_2 félegyenest a b_2 -hez viszonyítva párhuzamosnak mondjuk. Hasonlóképpen mondjuk, hogy az a_1, a_2 félegyenesek a b egyenessel párhuzamosak és mind a két egyenesről, melynek a_1 illetve a_2 részei, hogy párhuzamosak b -vel.

TOVÁBBI TÉTELEK ÉS DEFINÍCIÓK:

1. Az egyenesek, félegyenesek párhuzamossága szimmetrikus és tranzitív. (Gauss bizonyítása nem használ folytonosságot.) Minden félegyenes meghatároz egy véget az egymással párhuzamos félegyenesek ugyanazt a véget határozzák meg.
2. Ha A, B illetve A', B' két pontpár α, α' két vég, úgy, hogy $AB \cong A'B', \alpha AB_{\angle} \cong \alpha' A'B'_{\angle}$ valamint $\alpha BA_{\angle} \cong \alpha' B'A'_{\angle}$, akkor az $AB\alpha$ illetve $A'B'\alpha'$ alakzatokat egybevágónak mondjuk. Ismert módon definiáljuk az egyenesre vonatkozó tükrözés fogalmát, a tükörkép egyenes fogalmát.
3. Ha két egyenes egy harmadikat ugyanakkora váltószögben metsz, akkor a két egyenes nem párhuzamos egymással.
4. Ha adva van bármilyen két egyenes, amelyek egymást nem metszik és nem párhuzamosak egymással, akkor mindig van egy olyan egyenes, amely mindkettőre merőleges.
5. Ha adva van két tetszőleges, egymással nem párhuzamos félegyenes, akkor mindig van egy olyan egyenes, amely a két félegyenes mindegyikével párhuzamos, azaz mindig van olyan egyenes, amelyhez két előírt vég tartozik.
6. Legyen adott két egymással párhuzamos egyenes a és b és az általuk határolt síktartományban egy O pont. Legyen O_a az O pontnak az a -ra és O_b az O pontnak a b -re vonatkozó tükörképe és M az $O_a O_b$ szakasznak a középpontja. Akkor az az M -ből induló egyenes, amely a -val és b -vel is párhuzamos merőleges M -ben az $O_a O_b$ -re.

7. Ha három egyenes egyik vége közös, akkor a rájuk vonatkozó tükrözések szorzata, megegyezik egy olyan egyenesre vonatkozó tükrözéssel, melynek szintén ugyanez az egyik vége.
8. Felveszünk egy egyenest melynek végeit 0 -val és ∞ -el jelöljük. Ennek egy O pontján át rá merőleges egyenest állítunk ennek végei ± 1 . Ha α illetve β két ∞ -tól különböző vég, az összegük $\alpha + \beta$ az O pont $\alpha\infty, \beta\infty$ egyenesekre vonatkozó tükröképeinek felezőpontját ∞ -vel összekötő egyenes másik vége. Az összeadásra a végek kommutatív additív csoportot alkotnak.
9. Ha egy vég a 0∞ egyenes $+1$ -el megegyező oldalán van akkor pozitívnak nevezzük, ellenkező esetben negatívnak. Az $(1, -1), (\alpha, -\alpha), (\beta, -\beta)$ egyenesek merőlegesek $(0, \infty)$ egyenesre rendre O, A, B pontokban metszve azt. Tekintsük azt az egyenest, mely szintén merőleges $(0, \infty)$ -re és azt olyan C pontban metszi, melyre $BC \cong OA$ és az O -tól A felé haladó irány a B -től C felé haladó iránnyal megegyezik. Ennek végei legyenek $\pm\alpha\beta$ (α, β pozitívok). A végek ezen szorzásra nézve kommutatív multiplikatív csoportot alkotnak.
10. Az α, β végpontú egyenes koordinátái legyenek $u = \alpha\beta, v = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Ha α, β, γ olyan végek, hogy $4\alpha\gamma - \beta^2$ vég pozitív, akkor azon egyenesek melyek koordinátái az

$$\alpha u + \beta v + \gamma = 0$$

egyenletet kielégítik egy ponton mennek át.

„Miután megállapítottuk, hogy a pont egyenlete vonalkoordinátákban lineáris, könnyen következik az egyenespárra vonatkozó Pascal tétel és a perspektív helyzetű háromszögekről szóló Desargues tétel, valamint a projektív geometria többi tétele. Ezek után a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometria ismert képletei is nehézség nélkül levezethetők és így ez a geometria csupán a mi axiómáink alapján is felépíthető.”

Sík Sándor: Belenéztem a napba

Egyszer, egy sugaras, pirosló reggelen,
A virradati Napba két szemmel belenéztem.
És ama reggel óta, örökre megigézten,
Járok fényittasan és a Nap jár velem.

Egy csodavillanás, egy percnyi perc alatt
Azon a reggelen a Nap szívembe égett.
S azóta mást se látok, csak egy nagy fényességet,
Csak lángot és tüzet, csak égő sugarat.

Amerre fordulok, a rét rezgő fűvén,
És felhős ormain a ködlő messzeségnek:
Ezer picike Nap, ezüst ezernyi fény

Szikrázó szemei győzelmes tűzzel égnek.
És kívül és belül, örökre, szüntelen
Örvénylik és dalol a tüzes Végtelen.

2. fejezet

Elliptikus és projektív síkgeometriák

2.1. Elliptikus sík

Mint tudjuk, a geometria feltételezi a tér fogalmának, illetve a szerkesztések első alapelveinek, mint ismert dolgoknak az ismeretét. Definíciókat ad közöttük, melyek elnevezés szintűek, az igazi meghatározottságuk az axiómákban lépnek fel. Következésképpen az ezen feltevések közötti viszony felderítetlen marad, sem felfogni sem a priori elfogadni nem tudjuk, hogy e kapcsolatok vajon szükségesek-e vagy csak lehetségesek.

B. Riemann: A geometria alapjait adó hipotézisekről.

Bernhard Riemann veti fel a párhuzamossági axióma tagadásának azt a formáját, amely a nem metsző egyenesek létezésének lehetőségét zárja ki. Kiindulási modelljeként a gömbfelszín geometriájának akkor is jól ismert példája szolgált, amely keretében kétféleképpen építhetünk fel geometriát. Ha megszeretnénk őrizni az egyenes két pont általi meghatározottságát az átellenes pontok nem adhatnak a modellben különböző pontokat. Ilyenkor tetszőleges két egyenes pontosan egy közös pontot tartalmaz, az illeszkedési axióma csoport önduálissá válik, és valamit feltétlenül el kell hagynunk a maradék axiómák közül, hiszen a nem metsző egyenesek létezése az eddigi illeszkedési, rendezési és egybevágósági axiómáink következménye.

A második lehetőség az, hogy az első illeszkedési axiómát hagyjuk el, azaz két ponton keresztül több különböző egyenest is húzhatunk. Ilyenkor is módosítanunk kell néhány további axiómát és definíciót de az euklideszi szemlélethez közelebb álló struktúrát kapunk, olyan eredményekkel, melyek

a beágyazó euklideszi tér geometriájából könnyen levezethetők. Elvi szempontból ez a lehetőség a kevésbé érdekes, az így kapható állítások összességét nevezzük gömbi geometriának.

A továbbiakban a lényegesen messzebb vezető első lehetőség szisztematikus vizsgálatához kezdünk, megőrizzük tehát illeszkedési axiómáinkat, újra fogalmazzuk a maradék axiómarendszer azon elemeit, melyeknél ez szükséges, és feltesszük, hogy bármely két egyenes pontosan egy közös ponttal rendelkezik. Így módon az u.n. elliptikus geometriát építjük fel.

Az elliptikus geometria axióma csoportjai az illeszkedési, rendezési, egybevágósági, folytonossági axiómák és a párhuzamossági axióma elliptikus változatát tartalmazzák.

Az illeszkedési és folytonossági axiómák megegyeznek az abszolút geometriák megfelelő axiómaival. A rendezési axióma csoport alaprelációja az egyenes négy pontja között értelmezett pontpárok elválasztásának fogalma, ahogy azt az 1.1.2. alfejezetben láttuk. (A megfelelő jelölés: $(ACBD)$ azaz AB elválasztja CD -t.)

Rögtön módosíthatjuk a párhuzamossági axiómát is, legyen az ötödik axióma csoport egyetlen axiómája, az euklideszi párhuzamossági axióma Riemann féle tagadása:

Axióma (Elliptikus párhuzamossági axióma). *Tetszőleges két egysíkú egyenes egy pontban metszi egymást.*

A szakasz fogalmát másképp kell megadnunk, egy pont nem bontja fel az elliptikus egyenest, két pont két halmazra bontja az egyenest ezek között különbséget nem tudunk tenni, azaz szükséges egy harmadik pont a definícióhoz.

2.1.1. Definíció. *Az egyenes A, B, C ponthármasa által meghatározott A, B végpontú szakasz azon D pontokból áll, melyekre $(ACBD)$ teljesül.*

Világos, hogy ha $(ACBD)$, akkor az A, B végpontokkal rendelkező D -t illetve C -t tartalmazó szakaszok diszjunktak és uniójuk (A illetve B kivételével) kiadja az egyenest. Az egyenes a továbbiakban viszont nem fogja két félsíkra bontani a síkot. Legyen adva ugyanis egy egyenes és rajta kívül két pont. A két pont által meghatározott egyenes két szakaszra bomlik melyek közül az egyik tartalmazza az adott egyenes valamely pontját, a másik viszont nem. Így olyan ekvivalencia reláció a pontpárokon, mint "ekvivalens két pont ha szakaszuk (egyik szakaszuk stb.) nem metszi az adott egyenest" nem választja két osztályba a sík pontjait. Így tehát a félsík definíciójához nem juthatunk el. Igaz azonban, hogy két metsző egyenes két tartományra bontja a síkot, melyeket szögtartománynak nevezhetünk. Valóban, tetszőleges két

pont összekötő egyenese az adott egyenespárt két pontban metszi és az adott pontok illetve ezen utóbbiak által meghatározott pontpárok elhelyezkedése kétféle lehet, elválasztják egymást vagy sem. Ezen tulajdonság alkalmas egy két osztállyal rendelkező ekvivalencia reláció definiálásához, mely osztályait nevezhetjük a két egyenes által meghatározott szögtartományoknak.

Érdekes észrevenni, hogy a nem metsző egyenesek létezésére vonatkozó bizonyításunk milyen módon sérül. Tegyük fel, hogy nem tettük fel semelyik párhuzamossági axiómát, de tudunk egybevágóságokra vonatkozó alapállításokról, szögek, szakaszok, háromszögek bizonyos egybevágósági állításait ismerjük. Ekkor a nem metsző egyenesek létezéséről szóló bizonyításunk azt mondja, hogy ha a két (egy harmadikat azonos szög alatt metsző) egyenesnek van közös pontja akkor a harmadik egyenes által meghatározott mindkét félsíkban van közös pontja, azaz két különböző közös pontot találunk. Ha az egyenes nem választja szét két félsíkra a síkot, semmi sem garantálja, hogy az általunk megtalált két pont különböző...

A teljes elliptikus tér felépítéséhez szükséges még az egybevágósági axiómák alkalmas átalakítása. Ha a szögtartomány a fenti módon definiált (azaz egyenesek határolják) akkor szögtartományok metszeteként lehet háromszögtartományt definiálni és három pont négy háromszögtartományt határoz meg, melyek uniója a teljes sík. A háromszögtartományt határoló szakaszok uniója a háromszögvonala. A szakasz és szögfelmérésre vonatkozó axiómák esetében egybevágó szakaszpárok illetve szögpárok felméréséről beszélhetünk, a felbontási axiómát pont helyett pontpárra kell megfogalmazni. Mérték bevezetése esetén az egyenes hossza véges szám lesz, pontpár távolsága pedig a két meghatározott szakasz közül a nem nagyobb hossza.

Az elliptikus geometriában a terület (térfogat) függvény szintén értelmezhető és a háromszög területe a háromszög szögeitől függ mint a hiperbolikus geometriában.

Az elliptikus sík legfontosabb modellje a háromdimenziós tér egységömbjének a felszíne, mikor is az átellenes pontokat azonosítottuk. Az egyenesek fél főkörívek, szakaszok hosszát főkörív darabok hosszával mérjük, így a teljes egyenes hossza lehet például π . A szögek mérése főkörsíkok hajlásszögének mérésével történhet a háromszög területét a $T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ szám az *excessus*, a szögösszegnek a π -hez képest viszonyított többlete adhatja.

2.2. Projektív sík

Hosszú időt töltöttem az elvont tudományok tanulmányozásával; de kedvemet szegte az, hogy milyen kevés emberi kapcsolatot szerezhettünk segítségükkel...

B. Pascal: Gondolatok 144.

Az elliptikus geometria egyik kézenfekvő modellje a projektív geometria. A fejezet célja olyan önálló megalapozást adni, amely során feltárul számos jól ismert tétel "igazi" szerepe. A klasszikus projektív geometria kialakulása jóval Riemann előtt megtörtént, szinte valamennyi nagy matematikus nevéhez fűződnek projektív geometriához kapcsolható eredmények. Számunkra nem csak mint az elliptikus geometria egyik modellje fontos, hanem mint a képi ábrázolás elvi hatástere is. Különösen érdekesek a hozzá kapcsolható axiomatikus vizsgálatok, melyek meglepő kapcsolatokat tárnak fel, konfigurációk, testelmélet és magasabb dimenziós geometriák között.

2.2.1. Illeszkedési sík és a Desargues tétel

2.2.1. Definíció. Illeszkedési síknak nevezzük a pontok és egyenesek egy halmazát, mely az alábbi axiómáknak eleget tesz:

IS1. Axióma. Tetszőleges két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest, melyet a rájuk illeszkedő egyenesnek nevezünk.

IS2. Axióma. Tetszőleges két egyenes egyértelműen meghatároz egy pontot, melyet a metszéspontjuknak nevezünk.

IS3. Axióma. Van négy pont mely közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre.

Az illeszkedési sík Desargues-i sík, ha teljesül benne a Desargues tétel :

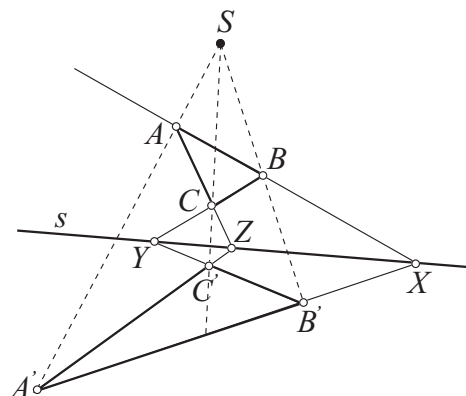
Axióma (Desargues). Az AA' , BB' , CC' egyenesek pontosan akkor illeszkednek egy pontra, amikor az $X = AB \cap A'B'$, $Y = BC \cap B'C'$, $Z = AC \cap A'C'$ pontok egy egyenesre illeszkednek.

Könnyen látható, hogy a Desargues-i sík axiómarendszere önduális, ezért tetszőleges tételével együtt annak duálisa is teljesül. Illeszkedési síknak vannak kollineációi, értelmes a centrális-axiális kollineáció fogalma.

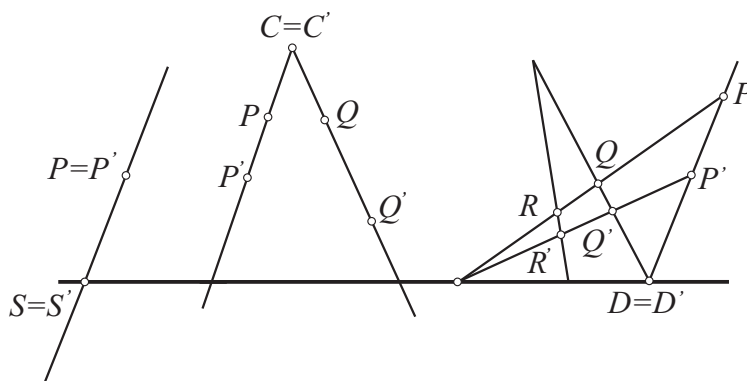
2.2.2. Definíció. Az illeszkedési sík kollineációja aksiális, ha van pontonként fix egyenese, tengelye. Centrális-axiális, ha aksiális és van olyan pont a síkon, melyen keresztülhaladó valamennyi egyenes invariáns. Ezt a pontot centrumnak nevezzük.

2.2.1. Lemma. Minden aksiális kollineáció centrális-axiális kollineáció.

Bizonyítás: Legyen kollineációnk tengelye t és tekintsünk egy rajta kívüli P pontot a P' képével összekötő egyenest. Ez az egyenes csak akkor nem



2.1. ábra. Desarguesi konfiguráció



2.2. ábra. Tengelyes kollineációnak van centruma

létezik ha $P = P'$. Ha a t -n kívüli valamennyi P pontra a $P = P'$ tulajdonság teljesül a leképezés az identitás, így minden pont centrum.

Az illeszkedési sík összes pontja nem illeszkedhet két egyenesre, ezért van olyan Q pont, mely sem t -n sem PP' -n nincs rajta. Tekintsük ennek Q' képét. Ha $Q = Q'$ valamennyi Q -n keresztülhaladó egyenes t -t Q -tól különböző fixpontban metszi, így megegyezik saját képével, azaz Q centrum.

Ha QQ' egyenes meghatározott, akkor legyen PP' és QQ' metszéspontja C . Mivel P' nem P ezért a PP' egyenes invariáns hiszen a t -vel való metszéspontja fixpont, így a leképezésnél saját magára képződik. Ugyanígy a QQ' egyenes is invariáns ezért $C = C'$. Azaz C fixpont, ha nincs t -n akkor centrum is.

Ha C illeszkedik t -re, akkor QP és $Q'P'$ a tengelyen metszik egymást. Tekintsük – ezen metszésponttól különböző – tetszőleges R pontját QP -nek. Ennek R' képe $P'Q'$ -re illeszkedik. Ha RR' nem megy keresztül C -n akkor PP' -t egy t -re nem illeszkedő fixpontban metszi, ami ekkor nyilván centrum

is. Ez nem lehetséges, mert QQ' -nek is át kell haladnia a centrumon ezért C centrum. $\square$

A következő tétel előtt szükségünk lesz a háromdimenziós illeszkedési tér fogalmára. Ez lényegében a projektív tér illeszkedési struktúráját adja meg absztrakt szintetikus formában. Szóhasználatunkban a pont, egyenes, sík szavak nem jelenthetik ugyanazt az objektumot, továbbá az egyenesek és síkok pontok halmazelméleti uniói, azaz minden egyenesen van két pont és minden síkon három nem egy egyenesre eső. Az utolsó axióma néhány ellenpélda lehetőségét kizárva (négy pontú modell, ceruza elrendezés) garantálja az általánosság azon szintjét, amely már megfelelő erős tételek kimondását teszi lehetővé.

2.2.3. Definíció. Illeszkedési térnek nevezzük a pontok, egyenesek és síkok egy halmazát, mely az alábbi axiómáknak tesz eleget:

S1. Axióma. Tetszőleges két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest, melyet a rájuk illeszkedő egyenesnek nevezünk.

S2. Axióma. Tetszőleges két sík egyértelműen meghatároz egy egyenest, melyet a metszésvonaluknak nevezünk.

S3. Axióma. Tetszőleges három nem egy egyenesre illeszkedő pont egyértelműen meghatároz egy síkot, amelyet a rájuk illeszkedő síknak nevezünk.

S4. Axióma. Tetszőleges három nem egy egyenesre illeszkedő sík egyértelműen meghatároz egy pontot, amelyet a közös pontjuknak nevezünk.

S5. Axióma. Ha egy sík tartalmazza egy egyenes két pontját, akkor tartalmazza valamennyi pontját.

S6. Axióma. Ha egy egyenesen keresztülhaladó két sík egyaránt tartalmaz egy pontot, akkor minden ezen az egyenesen áthaladó sík tartalmazza ezt a pontot.

S7. Axióma. Minden síkon van négy pont, amely közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre.

S8. Axióma. Van öt pont mely közül semelyik négy nem illeszkedik egy síkra.

Evvel ekvivalens Kerékjártó Béla: Projektív Geometria c. tankönyvében szereplő következő axiómarendszer:

a. Bármely két ponthoz tartozik egy és csak egy egyenes.

a'. Bármely két síkhoz tartozik egy és csak egy egyenes.

- b. Bármely egyeneshez tartozik legalább három pont.*
- b'. Bármely egyenesen legalább három sík megy át.*
- c. Bármely síkhoz tartozik három, nem egy egyenesen fekvő pont.*
- c'. Bármely ponton átmegy három, nem egy egyenesen átmenő sík.*
- d. Ha egy sík tartalmazza egy egyenes két pontját, akkor tartalmazza valamennyi pontját.*
- d'. Ha egy egyenesen keresztülhaladó két sík tartalmaz egy pontot, akkor minden ezen az egyenesen áthaladó sík tartalmazza ezt a pontot.*
- e. Bármely három, nem egy egyenesen fekvő pont egy és csak egy síkhoz tartozik.*
- e'. Bármely három síknak, amelynek nincs közös egyenese, egy és csak egy pontja van.*
- f. Egy egyenes és egy hozzá nem tartozó pont egy és csak egy síkhoz tartozik.*
- f'. Egy egyenesnek és egy ezt nem tartalmazó síknak egy és csak egy közös pontja van.*
- g. Két olyan egyenesnek, mely egy síkhoz tartozik, van egy és csak egy közös pontja.*
- g'. Két olyan egyenesen, mely egy ponton megy át, átmegy egy és csak egy sík.*
- h. Van legalább négy pont, mely nem tartozik egy síkhoz.*
- h'. Van legalább négy sík, mely nem megy át egy ponton.*

Világos, hogy az utóbbi axiómarendszernek a dualitást nyilvánvalóvá tevő állításai nem függetlenek egymástól. $\mathbf{S1} = \mathbf{a}$, $\mathbf{S2} = \mathbf{a'}$, $\mathbf{S3} = \mathbf{e}$, $\mathbf{S4} = \mathbf{e'}$, $\mathbf{S5} = \mathbf{d}$, $\mathbf{S6} = \mathbf{d'}$. Igazoljuk, hogy $\mathbf{S2} = \mathbf{a'}$ a többi állítás következménye. Mivel **c** szerint az első síkon találhatunk három nem egy egyenesre illeszkedő pontot. Ezek meghatároznak három különböző egyenest (**a**). Ezek mindegyike a síkhoz tartozik **d** szerint. Ha egyik sem tartozik a másik síkhoz, akkor a három egyenes legalább két pontban metszi a másik síkot, ugyanis véve a másik sík egy tetszőleges pontját, ez valamelyik egyenessel **f** szerint meghatároz egy harmadik síkot, és a három sík **e'** szerinti közös pontja az egyenes és a második sík közös pontja is egyben. Ekkor a két pont egyenese a két

sík közös egyenese. További közös egyenes nem lehetséges a kiindulási síkok különbözősége miatt.

Először **S7**-t és **S8**-t igazoljuk ahhoz, hogy lássuk, a második axiómarendszer következményei az első axiómarendszer axiómái. **S8** igazolásához vegyünk fel négy olyan pontot (P, Q, R, S) , amelyek nem esnek egy síkba. Ezek meghatároznak négy síkot és hat egyenest, mely utóbbiak a síkok páronkénti metszésvonalai. Mivel minden egyeneshez tartozik legalább három pont, az első egyenesen PQ -n felvehetünk a kiindulási pontoktól különböző ötödik T pontot. A TR egyenesen van egy további X pont. X nem illeszkedik az eddigi egyenesekre, hiszen azok RT -t vagy nem metszik, vagy R és Q egyikében metszik. Legyen Y az XS egyenesen egy harmadik pont. A P, Q, R, S, Y pontok közül semelyik négy sem esik egy síkba, és semelyik három egy egyenesre. **S7** hasonlóképpen látható. Azaz minden, a második axiómarendszert teljesítő modell egyúttal az első axiómarendszernek is modellje.

Fordítva, vegyük először észre, hogy egy, az első axiómarendszer állításait teljesítő modell síkjai, egyúttal illeszkedési síkok is. Ehhez azt kell látni, hogy tetszőleges két egysíkú egyenesének van közös pontja. Azonban a két egyenes mindegyikén találunk két pontot, melyektől különböző – a síkjukban nem lévő – ötödik pont létezése **S8** miatt evidens. Ezen pont a két egyenesen levő pontokkal együtt meghatároz két síkot, a három síknak **S4** szerint egyértelmű közös pontja van. A síkok páronkénti metszésvonala **S2** szerint szintén létezik és egyértelmű, melyek közül kettő a két kiindulási egyenes. Azaz ezeknek is van egyértelmű közös pontja, a három sík közös pontja. Ez éppen a **g** axióma állítása. **g'** axióma világos, mert minden egyenesen van legalább két pont.

Most már a **b** axióma a következőképpen következik az első axiómarendszer állításaiból: a PQ egyenesen kívül van **S8** szerint további R pont. R, P, Q meghatároznak egy síkot, ezen **S7** szerint van négy általános helyzetű pont, azaz van hat egyenes melyek közül semelyik négy nem megy keresztül egy ponton. Ezek minden további egyenest legalább négy pontban metszenek, mert a sík illeszkedési sík.

Az **S8** axiómából azonnal következik **b'**, az **S7**-ből **c** és **c'**.

Végül a **h** és **h'** szintén triviális következmény.

Láttuk tehát, hogy a két axiómarendszer ekvivalens, mivel a második önduális az első is az, igazoltuk tehát **S8** és **S7** duálisát:

2.2.1. Következmény. *Van öt sík, melyek közül semelyik négy nem megy át egy ponton, illetve minden ponton keresztül található négy olyan síkot, melyek közül semelyik három nem metsződik egy egyenesben.*

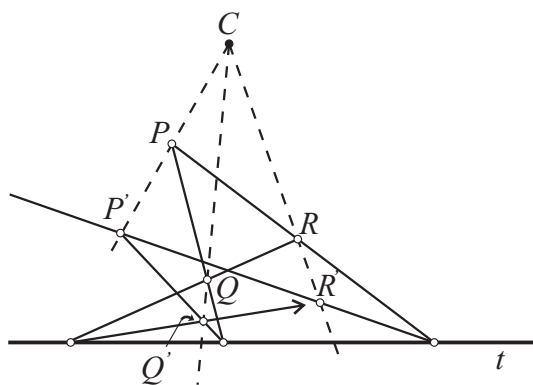
Az illeszkedési tér tehát a projektív axiómarendszer illeszkedési axiómáit teljesítő struktúra.

2.2.1. Tétel. *A következő állítások illeszkedési síkon ekvivalensek:*

1. *Teljesül a Desargues tétel.*
2. *Valamennyi centrális-axiális kollineáció létezik.*
3. *A sík egyenesei elláthatók összeadás és szorzás műveletekkel, melyre nézve valamennyi egyenesen a pontok halmaza egy fix K ferde testtel izomorf. Ezen K test felett homogén módon koordinátezhatunk, a koordinátázás alaprendszere egy projektív homogén koordinátarendszer.*
4. *A sík megadható mint valamely háromdimenziós K feletti projektív tér kétdimenziós altere.*
5. *A sík valamely háromdimenziós illeszkedési tér síkja.*

Bizonyítás: Az állítások ekvivalenciáját körbe bizonyítással igazoljuk. Nem adunk minden részletet tartalmazó bizonyítást, a hiányzó részek ellenőrzését az olvasóra bízuk.

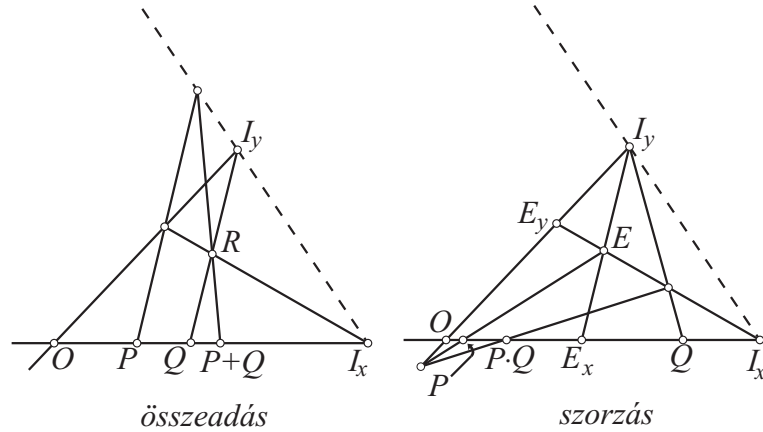
1 $\Leftrightarrow$ 2 Ha a kollineáció t tengelye, C centruma és egy P pont valamint a tőle különböző P' képe adott, akkor tetszőleges további pont képét meghatározhatjuk a 2.3. ábrának megfelelő szerkesztéssel. A Q pont kollineáció szerinti képe a P, P' pontpár alapján Q' . Az R pont R' képe azonban a P, P' és a Q, Q' pontpárok alapján egyaránt meghatározható. A kollineáció akkor létezik, ha a két pontpárból ugyanahhoz az R' ponthoz jutunk. A 2.3. ábráról azonnal leolvasható, hogy ez akkor és csak akkor áll fenn, ha teljesül a Desargues tétel.



2.3. ábra. A kollineáció létezik ha teljesül Desargues tétele

2 $\Rightarrow$ 3 Pontok összeadását a következőképpen végezzük. Az egyenesen a P, Q pontok mellett kijelölünk egy O "zérus" és egy I_x "végtelen távoli" pontot.

Felveszünk továbbá két az adott egyenessel "párhuzamos" azaz I_x -en keresztülhaladó egyenest, melyek közül az egyiket szaggatotttal jelöljük és "végtelen távoli" egyenesnek nevezünk. Ha két egyenes az euklidészi szemléletünknek megfelelően párhuzamos, akkor az illeszkedési sík szaggatott egyenesén metszik egymást (lásd 2.4. ábra).



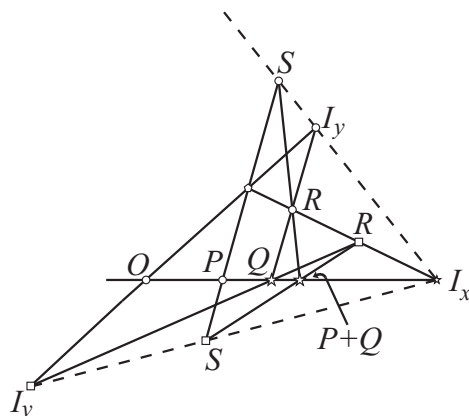
2.4. ábra. Összeadás és szorzás

Most már az $OPQI_x$ egyenes menti euklideszi OQ eltolásnak megfelelő kollineáció mellett kell meghatározni P képét. A leképezés tengelye a végtelen távoli egyenes, a centruma I_x az O pont képe Q . Mivel léteznek a centrális-axiális kollineációk ez a leképezés jól definiált. (A két egyenes szerepének felcserélésével a $Q + P$ pontot feleltetjük meg ugyanannak a pontnak, ezért a művelet kommutatív.)¹

Hasonlóképpen látható a másik két egyenes „forgathatóságának” lehetősége, így az összeadás jól definiált.

A szorzás definíciója a párhuzamos szelők tétele alapján elvégezhető szakasz szorzást idézi. (Descartes is észrevette ennek jelentőségét, ahogy látni lehet az 5. fejezetben.) Szükségünk van egy egységnyi hosszúságú szakaszra azaz egy egység pontra a kiindulási egyenesen. A szorzás gondolata az, hogy

¹ Jegyezzük meg, hogy a Desargues tétel segítségével ez közvetlenül is látható. Valóban, a $P + Q$ pontnak függeni kell az O illetve I_x pontoktól de függetlennek kell lennie a végtelen távoli egyenesnek és az OI_y , I_xR segédegyeneseknek a saját sugársorában elfoglalt helyétől. Elég az egyik megváltoztatása esetén látni, hogy a $P + Q$ pont helyzete sem változik az egyenesén. Lássuk például a végtelen távoli egyenes megváltoztatásának lehetőségét. A 2.5. ábránkon két SRI_y háromszög keletkezett. A két háromszög az ötszöggel jelölt pontra nézve perspektív, így a megfelelő oldalaknak is egy egyenesen kell metsződniük. A közös egyenesük a PQ egyenes és egyikük a $P + Q$ pont. Azaz a Desargues tétel teljesülése esetén a végtelen távoli egyenes szabadon választható sugársorában.



2.5. ábra. Összeadás és a Desargues tétel

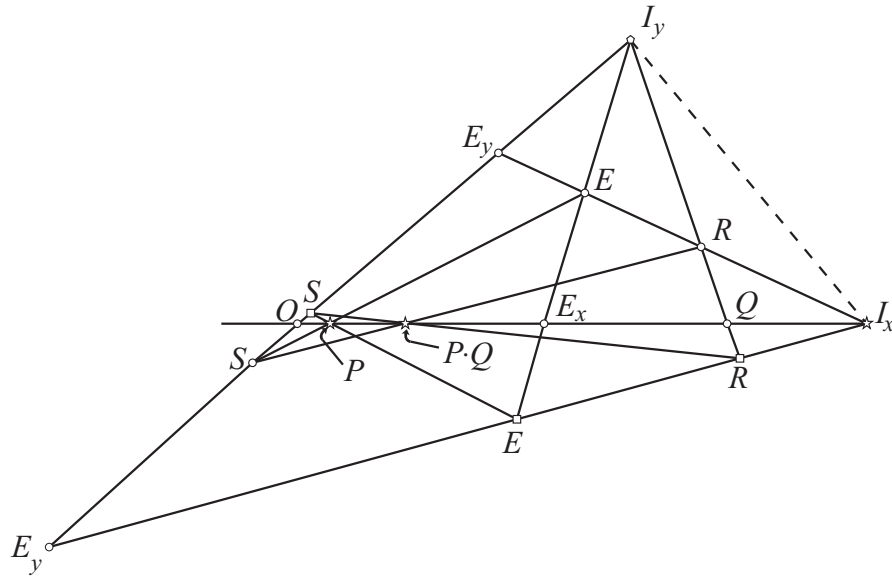
ábránkon az OE_x , $E_y E$ szakaszok "egységnyi hosszúak", az OQ , $E_y R$ szakaszok "egyenlők" és így az $OE_x : OQ = E_y E : E_y R$ arány megegyezik az $OP : (OP \cdot OQ) = OP : O(P \cdot Q)$ aránnyal.

A szerkesztés egy olyan centrális-axiális kollineáció összetartozó pontjait adja meg, melynek a tengelye a végtelen távoli egyenes, centruma az O pont és az E_x pont képe Q .²

Annak részletes vizsgálatát, hogy a két műveletre nézve az egyenes pontjai valamely K ferde testet (u.n. nem kommutatív szorzással rendelkező testet) alkotnak az olvasóra bízunk. Érdemes a műveletek konkrét geometriai definíciója helyett azok centrális-axiális kollineációként való interpretálására áttérni így a legtöbb részállítás, mint az asszociativitás, vagy az összeadás kommutativitása, azonnal adódik. Szintén egyszerűen adódik, hogy az egyeneseken előálló testek izomorfak, tehát csak egy testet kell a továbbiakban figyelemmel követni.

Jelölésünk az OI_y segédeginessel és az E_x , E_y pontokkal egy koordinátarendszerre utalnak, melyben a két tengely hajlásszögének és rájuk mért egység nagyságának nincs szerepe. Az ilyen koordinátarendszert affin koordinátarendszernek nevezzük. Ha közöséges egyenesként tudjuk ábrázolni a végtelen távoli egyenest projektív koordinátarendszerhez jutunk. Ha továbbá a két egyértelműen meghatározott projektív koordinátát helyettesíthetjük koordináta hármasok ekvivalencia osztályaival, akkor projektív homogén ko-

² Desargues tétel segítségével ez az állítás a következőképpen igazolható: A szerkesztés jól definiált ha segédeginessünk "forgatása" a $P \cdot Q$ pont helyzetét nem befolyásolja. Változtassuk most az $I_x E$ egyenes helyzetét. Ekkor az E, S, R pontok által meghatározott két háromszög lesz perspektív az I_y pontból nézve azaz a $P, P \cdot Q, I_x$ pontok egy egyenesre illeszkednek, ahogy ezt szerettük volna. Hasonlóképpen látható a többi segédeginess forgathatósága.



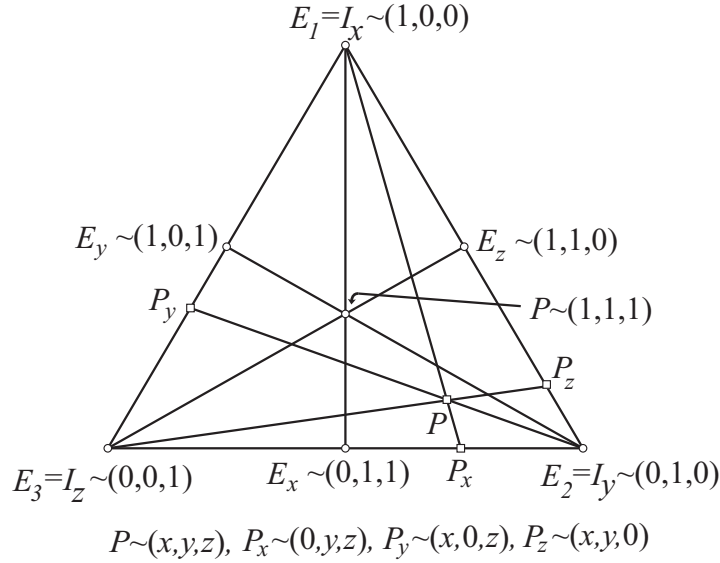
2.6. ábra. Szorzás és a Desargues tétel

ordinátázásról beszélhetünk.

Ha tehát minden egyenesen van egyértelműen meghatározott K -val jelölt test, amit az egyenes pontjai alkotnak és az egyenesen elhelyezett három pont egyértelműen meghatároz, akkor a koordinátázás kérdése csak egy alkalmas konfiguráción múlik, az illeszkedési síkon ez négy általános helyzetű pont E_1 , E_2 , E_3 illetve E , felvételével megoldható.

Legyen a három – nem egy ponton áthaladó – egyenes az indexelt pontok három összekötő egyenese, jelöljük ezeket e_1 , e_2 , e_3 -al úgy, hogy E_i ne illeszkedjen e_i -re (lásd 2.7. ábra). Az $E_x = EE_1 \cap E_2E_3$, $E_y = EE_2 \cap E_3E_1$ illetve $E_z = EE_3 \cap E_1E_2$ definíciókkal készen állunk a sík projektív homogén koordinátázására.

Legyen P most tetszőleges pont. Rendeljük ehhez hozzá a csúcsokból a szemközti oldalakra vonatkozó vetületi pontokat P_x -t, P_y -t illetve P_z -t. Mindhárom egyenesünk pontjai a K test valamelyik elemének felelnek meg kivéve egy pontot, amely a "végtelen távoli pont" szerepét játszotta az egyenesen, az evvel való összeadás vagy szorzás szinguláris leképezéshez vezet, ami nem kollineáció. Szereposztásunk homogén jellege abban nyilvánul meg, hogy nem különböztethető meg a két másik egyenes szerepe a kollineáció hozzárendelésénél, így természetes ötlet, hogy az e_1 egyenesen az első koordináta legyen zérus a második két koordináta aránya pedig a P_x ponthoz tartozó testelem. A kapott arányokkal a P_x , P_y , illetve P_z pontokhoz rendelt ekvivalencia osztályok egyértelműen meghatározottak lettek, és bármely két ekvivalencia



2.7. ábra. Projektív koordinátázás

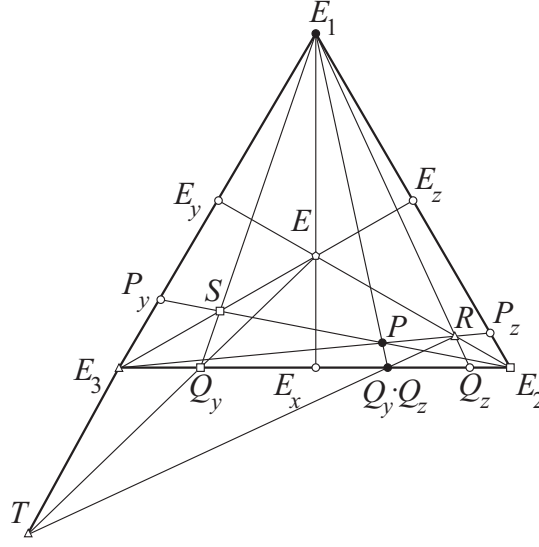
osztályból a P -hez rendelt ekvivalencia osztály is adódik. Azonban a P_x , P_y és P_z pontok testelemmel való azonosítása nem független egymástól, hiszen az alappontok rögzítése a többi pont azonosítását egyértelműen meghatározza.

Ahogy azt láttuk, a pontsorok zérus, egység és végtelen távoli pontjait megfelelő kollineációk a többi testelemet is megfeleltetik egymásnak. Ha a végtelen távoli pontot a zérus pontnak feleltetjük meg a testelemhez a reciprokát rendeltük hozzá. A Q_y pontnak megfelelő testelem $\frac{1}{P_y}$, mert az E_3E_z tengelyű E_1 -t E_2 -be vivő kollineáció a P_y pontot Q_y -be viszi, E_1 -t és E_2 -t felcseréli, végül E_3 -t és E -t fixen tartja, ezért a kollineáció az első egyenes „összeadás-szorzás” konfigurációját a második egyenes olyan „összeadás-szorzás” konfigurációjába viszi, mely az E_3E_1 egyenes 0 pontját az E_3E_2 egyenes ∞ pontjába viszi, és fordítva.

Hasonlóképpen adódik, hogy Q_z jelenti az egyenes $\frac{1}{P_z}$ pontját.

A Q_y pontot szorozzuk meg Q_z -vel. Ehhez meg kell határozni az EQ_y , E_1E_2 egyenesek metszéspontját T -t, az E_1Q_z illetve E_yE_2 egyenesek metszéspontját R -t és Q_yQ_z ekkor a TR és E_3E_2 egyenesek metszéspontja. Azonban az E_3, T, R pontok rendre az S, Q_y, E_2 pontok E -ből való vetületei, ezért Desargues tétel szerint az $E_1 = E_3T \cap SQ_y$, $P = E_3R \cap SE_2$ illetve $Q_y \cdot Q_z = TR \cap Q_yE_2$ pontok kollineárisak. Azaz $P_x = Q_y \cdot Q_z$ ezért tetszőleges P pontra a három hozzárendelt testelem szorzata 1, amiből adódik, hogy a koordinátázásunk nem vezet ellentmondáshoz.

3 $\Rightarrow$ 4 3 állítása szerint a sík pontjai kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak egy koordinátázott K -feletti 3-dimenziós V vektortér egydimenziós

2.8. ábra. $P_x P_y P_z = 1$

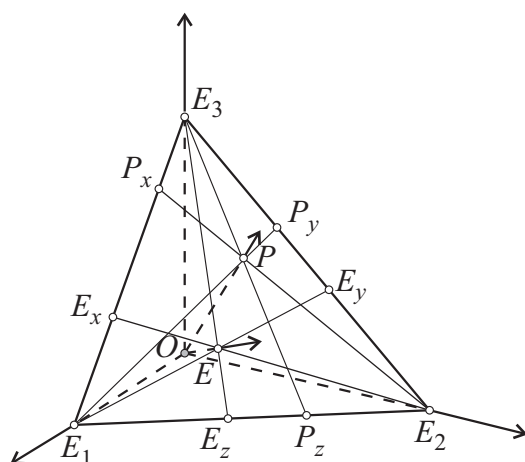
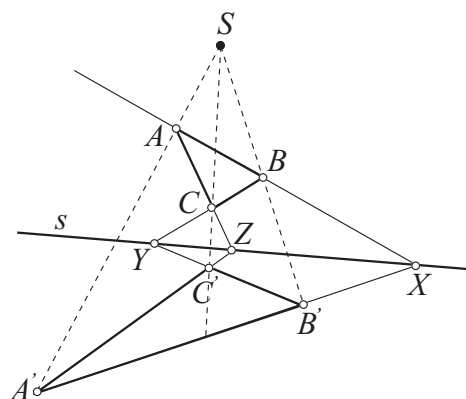
altéréinek a rendszerével. Ezt tekintjük egy 4-dimenziós K -feletti vektortér egydimenziós alterei azon részalmazának, mely egy adott 3-dimenziós altérhez illeszkedő altérekből áll. A beágyazó vektortér 1 dimenziós altérrendszerét megfeleltethetjük egy illeszkedési térnek a következő módon:

- Az 1-dimenziós altérek az illeszkedési tér pontjai.
- Egy 2-dimenziós altérhez tartozó 1-dimenziós altérek halmaza az egyenes. (Azaz pontok alkotják az egyenest.)
- Egy 3-dimenziós altérhez tartozó 1-dimenziós altérek halmaza a sík.
- Egy térelem illeszkedik egy másikra, ha valamennyi pontja hozzátartozik.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a kapott struktúra illeszkedési tér, pld. **F8. Axióma** következik abból, hogy egy bázis vektoraiból illetve ezen vektorok összegvektorából álló meghatározott 5 elemű vektorrendszer 4-elemű részalmazai lineárisan független vektorok.

Kiindulási illeszkedési síkunk illeszkedéstartó bijekcióval felel meg ezen illeszkedési tér valamelyik síkjának. Az O -pont modell projektív megfelelőjét könnyen megkaphatjuk, ha az euklideszi tér ideális pontokkal való bővítésével készítünk projektív teret és ebbe helyezzük el a derékszögű koordinátarendszerünket. Ha a projektív homogén koordinátákat az euklideszi koordinátákkal szeretnénk megadni, akkor az E_i alappontokat egységvektornak

tekintjük, az osztályokat pedig ezen vektorok lineáris kombinációival reprezentáljuk (lásd 2.9. ábra). Mint láttuk az euklideszi homogén koordinátákhoz jutunk, ha a $z = 1$ sík pontjait illetve az ezzel párhuzamos irányokat feleltetjük meg a valós projektív sík pontjainak, a projektív homogén koordinátázás esetén a választott sík (x, y) síkkal való párhuzamosságától eltekinthetünk, egy projektív homogén koordinátarendszerhez kapcsolódó O -pont modellből úgy kapunk homogén koordinátarendszerhez kapcsolódót, ha az (x, y) síkkal való metszet egyenest (E_2E_1 egyenest) végtelen távoli egyenesnek tekintjük.

2.9. ábra. Projektív homogén koordinátázás O -pont modellje

2.10. ábra. Desargues tétele

$4 \Rightarrow 1$ A 2.10. ábra jelölései mellett képzeljük el először, hogy az ABC illetve $A'B'C'$ háromszögek a háromdimenziós illeszkedési tér egy-egy síkjának háromszögei, melyek az S pontból egymásba vetíthetők. Mivel az $AB, A'B'; BC, B'C'; AC, A'C'$ egyenespárok első elemei az egyik, másik elemei a másik

síkba esnek, metszéspontjaik csak a két sík metszésvonalán helyezkedhetnek el. Innen a Desargues tétel a térbeli alakzat síkba vetítésével azonnal adódik. A 2.10. ábrán az is nyomon követhető, hogy bármely két síkbeli háromszöghöz van megfelelő térbeli alakzat, aminek éppen ő a vetülete.

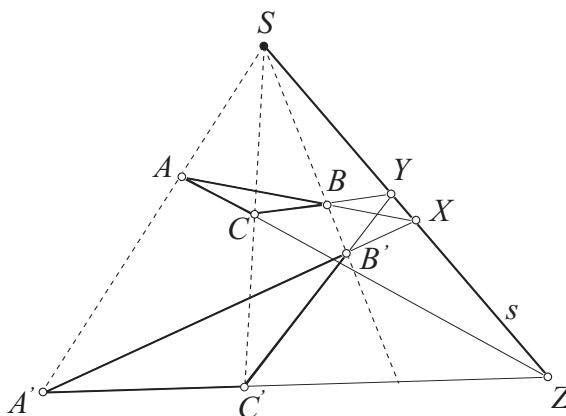
Ezzel a tétel állításait bizonyítottuk. $\square$

2.2.4. Definíció. Desargues-i síknak *nevezzük azokat az illeszkedési síkokat, amelyeken teljesül a Desargues tétel.*

A továbbiakban Desargues-i síkokkal dolgozunk. A Desargues tétel egyszerűsített alakja a kis Desargues tétel:

2.2.2. Tétel (kis Desargues). *Ha két háromszög pontra nézve perspektív, és az $AB \cap A'B' = X$, $BC \cap B'C' = Y$, $AA' \cap BB' \cap CC' = S$ pontok egy egyenesre illeszkednek, akkor ezen az egyenesen található a $CA \cap C'A' = Z$ pont is.*

A tétel állítása az 2.11. ábrán nyomon követhető, bizonyítás helyett elegendő a Desargues tételre és az első illeszkedési axiómára hivatkozni.

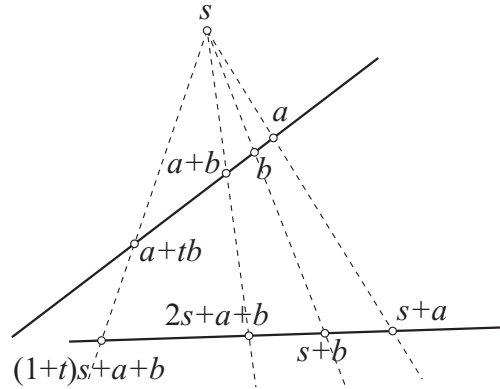


2.11. ábra. Kis Desargues tétel

Célunk a kettősviszony fogalmának értelmezése, ami kapcsán kimondhatjuk a Pappus-Steiner tételt, miszerint a centrális vetítés a kettősviszonyt őrzi (lásd 2.12. ábra). Azonban a kettősviszony szokásos definiálásához szükség van a szorzás kommutativitására, ezért további komoly vizsgálatok elé nézünk.

2.2.2. Projektív sík és a Pappus-Pascal tétel

Felépítésünk igen fontos részét képezi a projektivitások alaptétele. Szükségünk lesz a következő definícióra:



2.12. ábra. A Pappus-Steiner tétel

2.2.5. Definíció. A K -feletti vektortér A transzformációja félig lineáris, ha additív és valamely K -beli ϕ automorfizmussal eleget tesz az

$$A(\alpha \mathbf{x}) = \phi(\alpha) A(\mathbf{x})$$

egyenlőségnek.

2.2.3. Tétel (Projektivitások alaptétele). A Desargues-i sík σ kollineációi a beágyazó vektortér félig-lineáris transzformációival írhatók le, azaz adott kollineációhoz megadható olyan ϕ testautomorfizmus és ϕ -hez tartozó A félig-lineáris transzformáció, hogy ha az $\mathbf{x}$ pont képe a kollineációnál $\mathbf{x}' = \sigma \mathbf{x}$ akkor osztályának képe az $A\mathbf{x}$ osztálya.

Bizonyítás: A sík pontjait a beágyazó vektortér 1-dimenziós altereivel azonosítjuk. Az illeszkedéstartás miatt látjuk, hogy pontok alteréhez tartozó pontok képei a megfelelő képpontok altereinek pontjai, továbbá, hogy tetszőleges három kollineáris $x, y \neq z$ pont esetén z osztálya az egyértelmű γ konstanssal megkapható az $\mathbf{x} + \gamma \mathbf{y}$ pont osztályaként. (A lineáris kombinációt át tudjuk írni ezen alakra, mivel test az együtthatók struktúrája.) Világos továbbá, hogy a vektortér $\mathbf{e}_i$ bázisvektoraihoz választhatunk olyan $\mathbf{f}_i$ vektorokat, melyek $\sigma(\mathbf{e}_i)$ osztályának oly vektorai, hogy teljesítik a

$$\mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_i = \sigma(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_i)$$

egyenlőségeket is. Tetszőleges α testelemhez hozzárendelhetünk egy α' testelemet úgy, hogy

$$\sigma(\mathbf{e}_3 + \alpha \mathbf{e}_1) = \mathbf{f}_3 + \alpha' \mathbf{f}_1.$$

Világos, hogy a leképezés jól definiált és injektív, mely a 0-t és az 1-t fixen hagyja. Hasonlóan definiálható egy $\alpha \mapsto \alpha''$ leképezés az $\mathbf{e}_2$ bázisvektorhoz.

A két leképezés azonos, azaz $\alpha' = \alpha''$ minden α esetén. Valóban az $\alpha\mathbf{e}_1 - \alpha\mathbf{e}_2$ osztály megegyezik az $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ osztályával, így $\sigma(\alpha\mathbf{e}_1 - \alpha\mathbf{e}_2)$ egyben $\sigma(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ osztálya is, ezért $\alpha'\mathbf{f}_1 - \alpha''\mathbf{f}_2$ osztálya. Ugyanakkor nyilván $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$ osztálya, ezért $\alpha'^{-1}\alpha'' = 1$ igazolja állításunkat. Innen már könnyen látható, hogy tetszőleges $\sigma(\mathbf{e}_3 + \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2)$ osztály éppen $\mathbf{f}_3 + \alpha'\mathbf{f}_1 + \beta'\mathbf{f}_2$.

A másik oldalról a σ bijekciójának következménye, hogy a fenti $\alpha \mapsto \alpha'$ leképezés szűrjektív, így K bijekciója. Szintén additív és multiplikatív, tehát K automorfizmusa. Legyen A a fenti automorfizmushoz tartozó félig lineáris leképezés, ez a vektortér 1-dimenziós alterein megegyezik σ -val tehát valóban σ -t reprezentálja. $\square$

2.2.1. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy a fenti félig-lineáris leképezés lényegében egyértelmű, azaz, ha két ilyen ugyanazt a kollineációt származtatja, akkor egymás konjugáltjai (azaz K belső automorfizmusa származtatja az egyiket a másikkól).

2.2.2. Megjegyzés. Jegyezzük továbbá meg, hogy a C centrumú t tengelyű centrális-axiális kollineációk az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - k\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{c}$$

alakú lineáris transzformációkkal adhatók meg, ahol t pontjai az $\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = 0$ egyenlet megoldásaihoz tartozó pontok. Így a szorzataikként előálló transzformációk úgyszintén lineárisak. A másik oldalról, tetszőleges lineáris transzformációval leírható kollineáció előáll centrális-axiális kollineációk szorzataként, amit úgy igazolhatunk, hogy az alaptétel bizonyításában szereplő $\mathbf{e}_i$ bázisvektorokat egyesével, alkalmas c -a kollineációkkal transzformáljuk az $\mathbf{f}_i$ bázisvektorokba, figyelve arra, hogy egy új transzformáció fix pontjai legyenek a kisebb indexű $\mathbf{f}_j$ képvektorok. Ezért egy kollineációra a lineáris transzformációval való reprezentálhatóság illetve a centrális-axiális kollineációk szorzataként való előállíthatóság ekvivalens tulajdonságok.

2.2.3. Megjegyzés. Ha a testnek nincs az identitástól különböző automorfizmusa akkor minden félig lineáris transzformáció egyúttal lineáris transzformáció is így minden kollineáció lineáris transzformációval reprezentálható. Azonban még ez sem jelenti azt, hogy az általunk vizsgált kollineációt a beágyazó vektortér dimenziójánál eggyel több általános helyzetű pont határoz meg. Tekintsünk ugyanis egy kollineációt, amely négy általános helyzetű projektív pontot, például $\mathbf{e}_1$ -t, $\mathbf{e}_2$ -t, $\mathbf{e}_3$ -t és $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ -t fixen tart. A reprezentáló lineáris leképezések most éppen az identitás konstansszorosai, mert teljesül az

$$A(x) = A\left(\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^3 x_i a_i \mathbf{e}_i = a \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$$

egyenlőség, ahonnan azonnal kapjuk, hogy $a_j = a_i$ minden i, j -re. Egy tetszőleges $x = \sum x_i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_3$ projektív pont képét a beágyazott síkon az

$$A(x) = \left(\sum x_i a \mathbf{e}_i + a \mathbf{e}_3 \right)$$

vektor egyenesének a síkra eső pontja adja meg, azaz a

$$\sum a^{-1} x_i a \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_3$$

pont. Ez akkor egyenlő csak x -el, ha $a^{-1} x_i a = x_i$ teljesül minden x_i -re és minden a -ra, azaz ha K a szorzásra nézve is kommutatív.

A következő tétel rendet tesz a Desargues-i síkok között, lehetőséget biztosítva a projektív sík definiálására. Kimondása előtt külön beszélnünk kell pontsorok leképezéseiről. A pontsor elnevezés az egyenes pontjainak összességét jelenti.

2.2.6. Definíció. Két pontsor perspektív kapcsolatban áll, ha centrális vetítés viszi az egyik pontjait a másik pontjaiba.

2.2.4. Tétel. Desargues-i síkon az alábbi állítások ekvivalensek:

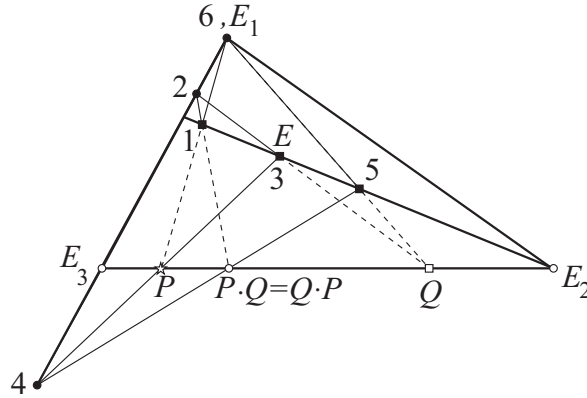
1. Teljesül benne a Pappous-Pascal tétel, azaz ha az 135, 246 ponthármasok egy egyenesre illeszkednek, akkor $a \circ = 12 \cap 45$, $\square = 23 \cap 56$, $\star = 34 \cap 61$ pontok szintén kollineárisak.
2. Pontsorok perspektivitásainak véges szorzatait, három pont és a képeik egyértelműen meghatározzák.
3. K kommutatív
4. Centrális-axiális kollineációk szorzatait négy általános helyzetű pont a képeivel egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás:

1 $\Leftrightarrow$ 3 A 2.13. ábrán levő jelölésekkel, a $P \cdot Q$ pont az $E_2 E_3$ illetve 45 egyenesek metszeteként adódik, a $Q \cdot P$ pont az $E_2 E_3$ és 12 egyenesek metszéspontja. Az 123456 hatszöget vizsgálva azonnal látszik, hogy a Pappous-Pascal tétel állítása a K test kommutativitásával ekvivalens.

1 $\Rightarrow$ 2 Először igazolható, hogy tetszőleges (véges) számú perspektivitás szorzata reprezentálható két perspektivitás szorzataként. A bizonyítás hosszadalmas de nem túl nehéz, ezért most csak a fő lépéseit írjuk le.³ Két segéd

³ A bizonyítás teljes részletességgel megtalálható Kerékjártó Béla: Projektív geometria c. tankönyvében.



2.13. ábra. A Pappous-Pascal tétel és a test kommutativitása

állításra alapul. Igazolható, hogy ha a perspektivitások egyenesei egy ponton mennek keresztül, akkor a leképezés maga is perspektivitás és kimutatható, hogy három közös pont nélküli a_1, a_2, a_3 pontsor esetén az

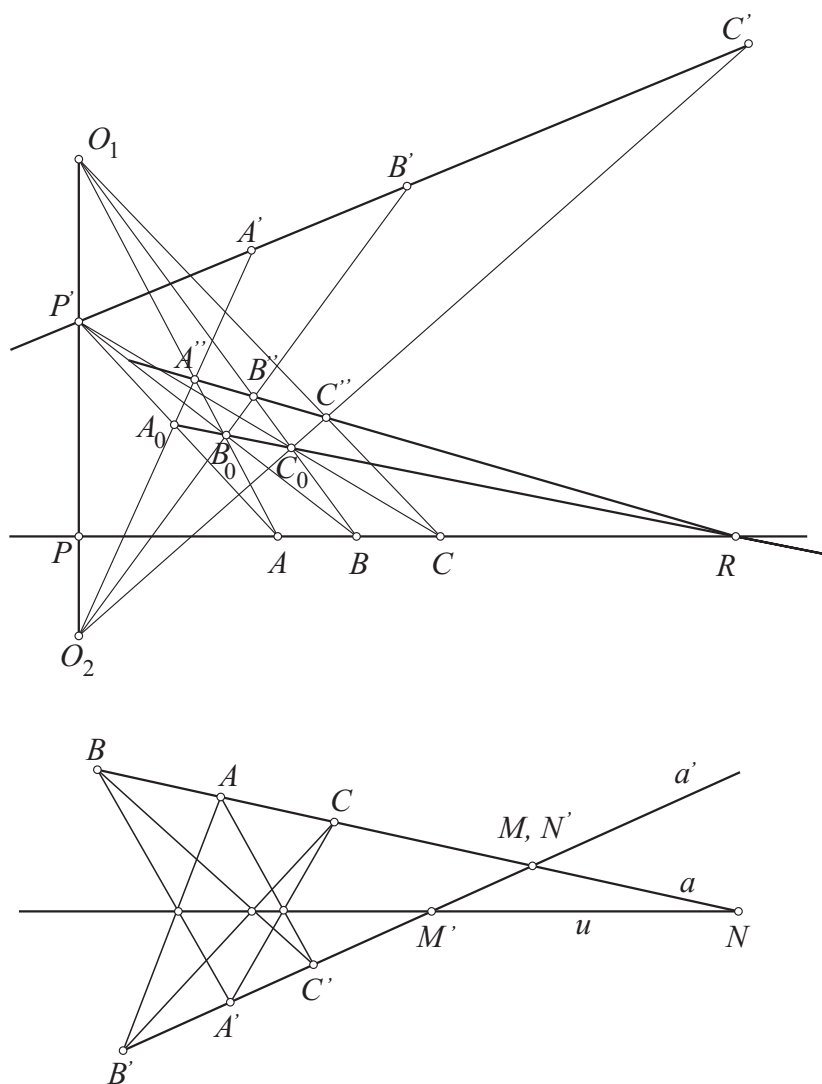
$$O_1 : a_1 \mapsto a_2 \text{ és az } O_1 : a_2 \mapsto a_3$$

perspektivitások szorzata tetszőleges az $a_1 \cap a_2$ ponton áthaladó b_2 egyenessel és alkalmasan választott $O \in O_1 O_2$ középponttal helyettesíthető az $O : a_1 \mapsto b, O_2 : b \mapsto a_2$ perspektivitások szorzatával.

Másodszor a 2.14. ábra felső rajza azt mutatja, hogy az O_1 illetve O_2 középpontú perspektivitások $A \mapsto A'' \mapsto A$ szorzata helyettesíthető a P' illetve O_2 középpontú $A \mapsto A_0 \mapsto A$ szorzatával. Valóban az $A_0 A'' A_\Delta$ és a $B_0 B'' B_\Delta$ háromszögek az $O_1 P' O_2$ egyenesre nézve perspektívek azaz az $AB, A_0 B_0, A'' B''$ egyenesek egy közös R ponton haladnak keresztül. Mivel a $B_0 C_0$ pontpárra ugyanez teljesül, ezért A_0, B_0, C_0 kollineárisak. Hasonló módon az O_2 középpontú perspektivitás is helyettesíthető a P középpontúval. Eképpen a P, A, B ponthármas illetve képeik P', A', B' egyértelműen meghatározzák a leképezést, hiszen a Pappous-Pascal tétel miatt az $\tilde{A} = P'A \cap PA', \tilde{B} = P'B \cap PB'$ pontok egyenesén találhatjuk a tetszőleges C ponthoz rendelt $\tilde{C} = P'C \cap PC'$ pontot, így C' egyértelműen meghatározott C által.

2 $\Rightarrow$ 1 Tegyük fel hogy a Desargues-i síkon teljesül a **2.** tulajdonság. Vegyük fel a Pappous-Pascal tételben szereplő a illetve a' egyeneseket és rajtuk a 3-3 pontot. Ezeket most jelöljük rendre A, B, C illetve A', B', C' -vel. Legyen u az AB' illetve $A'B$ egyenesek metszéspontját AC' illetve $A'C$ egyenesek metszéspontjával összekötő egyenes. Ha tekintjük azt a kollineációt, mely A, B, C -t rendre A', B', C' -nek felelteti meg, akkor ez előáll mint az A' középpontú $a \rightarrow u$ perspektivitás szorzata az A középpontú $u \rightarrow a'$ perspektivitással ezért leképezésünk az a, a' egyenespár M metszéspontját az u

a' -vel való M' pontjába viszi, és az $M = N'$ pont pedig az u és a egyenesek N metszéspontjának a képe. Az u egyenes tehát a kiindulási két összetartozó pontpártól függetlenül helyezkedik el azaz tartalmazza a BC' illetve CB' egyenesek metszéspontját is. A síkon tehát érvényes a Pappous-Pascal tétel.



2.14. ábra. Pappous-Pascal tétel és a projektivitások

3 $\Leftrightarrow$ 4 A projektivitások alaptétele szerint a kollineációkat általában félig-lineáris leképezésekkel, míg a 2.Megjegyzés szerint a centrális-axiális kollineációk szorzatait lineáris leképezésekkel reprezentálhatjuk. A 3. Megjegyzés mutatja, hogy lineáris leképezéssel reprezentálódó kollineációk azonban 4 általános pontjuk képe által pontosan akkor határozódnak meg, ha a test

kommutatív. Ezzel állításunkat igazoltuk. $\square$

2.2.7. Definíció. *A Desargues-i síkot projektív síknak nevezzük, ha igaz benne a Pappous-Pascal tétel.*

2.2.3. Kettősviszony

A projektív síkon a *kettősviszony* fogalmát a koordináta pontsor elemeire a következőképpen értelmezhetjük. Tegyük fel, hogy egyenesünk különbözik az E_1E_2 egyenestől. Ha három pontja P, Q, R és egyikük sem esik az E_1E_2 egyenesre, akkor a nekik megfelelő reprezentáns vektorok választhatók $\mathbf{p} = (x_P, y_P, 1)^T$, $\mathbf{q} = (x_Q, y_Q, 1)^T$ illetve $\mathbf{r} = (x_R, y_R, 1)^T$ ahol az egy egyenesre való illeszkedés azt jelenti, hogy ezek a vektorok lineárisan összefüggők. Azaz fennáll az

$$\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r} = 0$$

kapcsolat valamely $\alpha, \beta, \gamma \in K$ hármassal. Nyilván ha a három pont különböző az együtthatók nem a test zérus elemei, így feltehető, hogy $\gamma = -1$. Ekkor α és β egyértelműen adódik, összegük 1, és a három pont osztóviszonya legyen a valós projektív sík megszokott értéke (lásd az analitikus geometria fejezetet):

$$(PQR) = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ha S ugyanezen egyenes negyedik pontja, akkor rá hasonlóképpen

$$(PQS) = (\mathbf{p}, \mathbf{q}, \gamma\mathbf{p} + \delta\mathbf{q}) = \frac{\delta}{\gamma}$$

adódik és a kettősviszonyt értelmezhetjük a két osztóviszony hányadosával:

$$(PQRS) := \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}.$$

Ha P az E_1E_2 egyenes pontja legyen $(PQR) := -\infty$ ha Q , akkor legyen $(PQR) = 0$ ha pedig R esik az E_1E_2 egyenesre legyen $(PQR) = -1$. R és S közül legfeljebb az egyik eshet az E_1E_2 egyenesre, azaz a kettősviszony minden esetben egyértelműen adódik.

Az E_1E_2 egyenes esetében hasonlóképpen járhatunk el egy másik koordinátának rögzítése útján.

2.2.4. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy projektív síkon a lineáris leképezéssel reprezentálható kollineációk éppen a kettősviszonytartó kollineációk. Ehhez*

használva a kollineáris pontnégyes kettősvizonyának a definícióját kapjuk, hogy ha A lineáris akkor

$$\begin{aligned} & (A(\mathbf{x}), A(\mathbf{y}), A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}), A(\gamma\mathbf{x} + \delta\mathbf{y})) = \\ & = (A(\mathbf{x}), A(\mathbf{y}), \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y}), \gamma A(\mathbf{x}) + \delta A(\mathbf{y})) = \\ & = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \gamma\mathbf{x} + \delta\mathbf{y}), \end{aligned}$$

azaz őrzi a kettősvizonyt, míg ha A nem lineáris hanem csak félig lineáris, akkor a fenti egyenlőség nem teljesülhet a változók minden értékére, azaz nem őrzi a kettősvizonyt, amivel állításunkat igazoltuk.

2.2.8. Definíció. A projektív sík egy pontsorának egy másikra vonatkozó kölcsönösen egyértelmű leképezése projektivitás, ha véges sok perspektivitás szorzata.

2.2.5. Tétel (Pappous-Steiner). A projektív sík perspektivitásai kettősvizonytartó leképezések.

Bizonyítás: Az 2.12. ábrának megfelelő reprezentáns választással a két kettősvizony:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + t\mathbf{b}) = 1 : t,$$

illetve

$$(\mathbf{a} + \mathbf{s}, \mathbf{b} + \mathbf{s}, (\mathbf{a} + \mathbf{s}) + (\mathbf{b} + \mathbf{s}), (\mathbf{a} + \mathbf{s}) + t(\mathbf{b} + \mathbf{s})) = 1 : t.$$

□

A tétel következménye, hogy minden pontsor projektivitás kettősvizonytartó leképezés. Speciálisan őrzi a *harmonikus elválasztást* azaz egy -1 kettősvizonnyal rendelkező pontnégyest ugyanilyenbe visz. Ha az egyenes pontjaira vonatkozóan feltesszük a Dedekind axióma teljesülését is, akkor az állítás megfordítása is igaz:

2.2.6. Tétel (Staudt-Darboux). Ha az egyenesek pontsoraira teljesül a Dedekind axióma, akkor tetszőleges a harmonikus elválasztásokat őrző bijekció projektivitás, azaz véges sok perspektivitás szorzata.

Ez indokolja, hogy a valós projektív síkon a pontsor projektivitásokat kettősvizonytartó leképezésként is szokták definiálni. Ahogy ezen alfejezet megjegyzésében láttuk a lineáris transzformációval reprezentálható kollineációk éppen a kettősvizonytartó kollineációk és a valós számok teste kommutatív, ezért a valós projektív sík minden kollineációja lineáris transzformációval reprezentálható, ezért kettősvizonytartó is. A centrális-axiális kollineációk

játsszák a perspektivitások szerepét, minden kollineáció véges sok centrális-axiális kollineáció szorzata is egyben. Ezért a „kettősvizonytartó leképezés” elnevezés mindkét esetben szinonimája a „projektivitás” elnevezésnek, a gyakorlatban pontsor esetén véges sok (két alkalmas) perspektivitás szorzataként, kollineációk esetén pedig véges sok (legfeljebb 4) centrális-axiális kollineáció szorzataként való előállíthatóságot jelent.

2.2.9. Definíció. Sugárnégyes kettősvizonyán az öt metsző valamely egyenesen létrejövő pontnégyes kettősvizonyát értjük. A sugársorok kettősvizonyt őrző leképezéseit sugársor projektivitásnak nevezzük.

A Pappous-Steiner tétel alapján a definíció jó, nem függ az egyenes választásától. A dualitás alapján két sugársor pontosan akkor perspektív, ha az egymásnak megfelelő elemek metszéspontjai egy egyenesre illeszkednek.

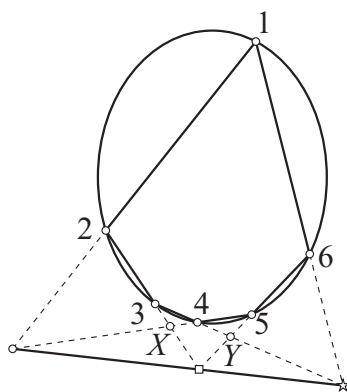
2.2.4. Kúpszeletek

2.2.10. Definíció. A projektív sík két projektív de nem perspektív sugársorának képződményét (az egymásnak megfelelő elemek metszéspontjai által létrejövő halmazt) kúpszeletnek nevezzük.

2.2.7. Tétel (Pascal). Kúpszeletbe írt hatszög szemközti oldalpárjainak metszéspontjai kollineárisak, azaz ha 1,2,3,4,5,6 pontok illeszkednek egy kúpszeletre, akkor a

$$\circ = 12 \cap 45, \quad \square = 23 \cap 56, \quad \star = 34 \cap 61$$

pontok kollineárisak.



2.15. ábra. Pascal tétel

Bizonyítás: Legyen $X = 23 \cap 45$, $Y = 34 \cap 56$ (lásd 2.15. ábra). A kúpszeletet képzeljük a 2 és 6 tartójú sugársorok képződményének. Használva a sugárnégyes kettősviszonyának fogalmát kapjuk, hogy

$$(\star, Y, 4, 3) = (61, 65, 64, 63) = (21, 25, 24, 23) = (\circ, 5, 4, X).$$

Azaz homogén koordinátákkal

$$\star = \mathbf{m}, \quad Y = \mathbf{y}, \quad 4 = \alpha_1 \mathbf{m} + \beta_1 \mathbf{y}, \quad 3 = \alpha_2 \mathbf{m} + \beta_2 \mathbf{y}$$

definíciók mellett, feltehető

$$\circ = \mathbf{n}, \quad 5 = \mathbf{x}_5, \quad 4 = \alpha_1 \mathbf{n} + \beta_1 \mathbf{x}_5, \quad X = \alpha_2 \mathbf{n} + \beta_2 \mathbf{x}_5$$

is. Felhasználva, hogy az

$$\alpha_1 \mathbf{m} + \beta_1 \mathbf{y} = (\alpha_1 \mathbf{n} + \beta_1 \mathbf{x}_5)$$

egyenlőség ekvivalens az

$$\alpha_1 \mathbf{m} - \alpha_1 \mathbf{n} = \beta_1 \mathbf{x}_5 - \beta_1 \mathbf{y}$$

egyenlőséggel, kapjuk az

$$\begin{aligned} 3 - \mathbf{x} &= (\alpha_2 \mathbf{m} + \beta_2 \mathbf{y}) - (\alpha_2 \mathbf{n} + \beta_2 \mathbf{x}_5) = \left(\frac{-\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1} + \beta_2 \right) (\mathbf{y} - \mathbf{x}_5) = \\ &= \left(\frac{-\beta_2 \alpha_1}{\beta_1} + \alpha_2 \right) (\mathbf{m} - \mathbf{n}) \end{aligned}$$

egyenlőségeket. A szereplő együtthatók értelmesek mert α_1 , β_1 nem lehet nulla. Így adódik, hogy a $3X$, $5Y$, $\circ, \star$ egyenesek egy pontra illeszkednek $\square$ -ra. $\square$

2.2.11. Definíció. A kúpszelet érintője egy olyan egyenes, melynek egyetlen pontja illeszkedik a kúpszeletre. Ezt a pontot az érintő érintési pontjának nevezzük.

A projektív síkon érvényes dualitás alapján a kúpszeletet két projektív de nem perspektív pontsor képződményének is tekinthetjük. A képződmény most a megfelelő pontpárok összekötő egyenesei burkolóját jelenti, mely mint ponthalmaz, az érintési pontok halmaza is egyúttal. A Pascal tétel duálisa a Brianchon tétel:

2.2.8. Tétel (Brianchon). *Ha egy kúpszelet hat érintője 1,2,3,4,5,6 akkor az*

$$(1 \cap 2, 4 \cap 5), \quad (2 \cap 3, 5 \cap 6), \quad (3 \cap 4, 6 \cap 1)$$

egyenesek egy ponton mennek át, a kúpszelet Brianchon pontján.

Ezen tétel körre megfogalmazott változata a beágyazó euklidészi tér illeszkedési rendszerét is használva szépen és elegánsan igazolható. A bizonyítás több könyvben és jegyzetben is megtalálható (lásd: G.Horváth Ákos – Szirmai Jenő: Nemeuklideszi geometriák modelljei).

2.3. Kúpszeletek az Euklidészi térben

...Amikor az embert kezdtem tanulmányozni, rájöttem, hogy ezek az elvont tudományok nem valók az embernek, és, hogy beható tanulmányozásukkal kevesebbet tudtam meg emberi állapotról, mint azok, akik semmit sem konyítanak hozzájuk...

B.Pascal: Gondolatok 144.

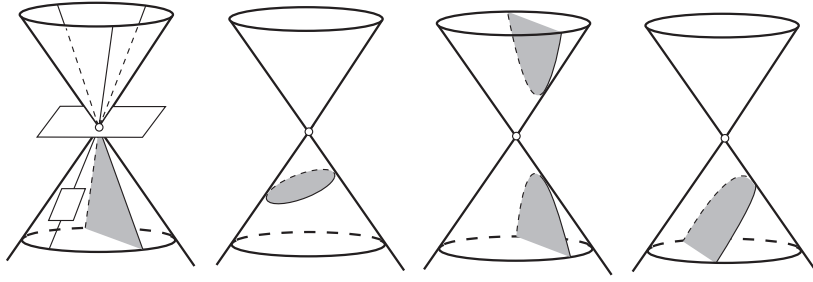
A figyelmes olvasó biztosan eltöprengett azon, vajon miért nevezik a projektív geometria a fentiekben vizsgált görbét kúpszeletnek, amikor nincs is definiált kúp-fogalom. Felmerülhet az a kérdés is milyen kapcsolatban áll egymással az egyenespárra és a kúpszeletre vonatkozó Pascal tétel. Kimondott célunk az is, hogy a Brianchon tételnek is önálló elemi geometria bizonyítást adjunk. Ezen kérdések tisztázásához a kúpszeletekről szóló vizsgálatainkat részletezni kell a valós projektív tér specializálásával kapott régi-új Euklidészi tér keretein belül.

A módszer rendkívül egyszerű, rögzítünk egy projektív síkot, ezt ezentúl végtelen távoli síknak nevezzük, mindazon térelemeket, amiknek a metszete ehhez a síkhoz illeszkedik – megkülönböztetett módon– párhuzamosoknak nevezzük. A sík pontjait ideális vagy végtelen távoli pontoknak egyeneseit ideális vagy végtelen távoli egyeneseknek nevezzük. A projektív koordináta-rendszer harmadik koordináta síkja lesz ez az ideális sík, a projektív homogén koordináta-rendszerből, Descartes-féle homogén koordinátázáshoz jutunk, ahonnan a szokásos koordinátákra is visszatérhetünk. A kettősvizony, ha a négy pont valamelyike ideális pont osztóviszonnyá egyszerűsödik, ha mind a négy pont ideális pont egy olyan sugárnégyes kettősvizonyát definiálja, amelynek tartója valamely tetszőleges közöséges pont.

A továbbiakban egy közöséges egyenes kettős körkúpot fogunk tekinteni. Ezt egy adott körvonalat súroló, egy ponton, a kúp csúcsán áthaladó egyenesek halmazaként értelmezzük, ahol a csúcs helyzete rögzített, a kör középpontján áthaladó, a kör síkjára merőleges egyenesen.

2.3.1. Definíció. Kúpszeletnek *nevezzük a kúp síkmetszeteit.*

Ezek szerint kúpszelet egy pont (a kúp csúcsa), a kétszeres egyenes (a kúp egy alkotója), és két metsző egyenes is. Ezen túl három különböző nem elfajuló görbét találunk, melyeket az ideális pontjaik száma szerint *ellipszisnek*, *parabolának* illetve *hiperbolának* nevezünk. Mivel a körkúpot egy sík nem tudja kettőnél több alkotóban metszeni, több ideális pont mint kettő nem lehetséges. Persze ki kell majd mutatnunk, hogy a kapott alakzatok az előző szakasz értelmében is kúpszeletek. Vegyük továbbá észre, hogy a másodrendű görbék közül a fenti felsorolásban csupán egy nem szerepel, a párhuzamos egyenespár, amely szintén adódik, ha nem rögzítjük a kúp csúcsát közös pontként, hanem lehet ideális pont is. Ezért nem meglepő tény, hogy a kúpszeletek vizsgálata nem más, mint a másodrendű görbék szintetikus (nem analitikus) kezelése.

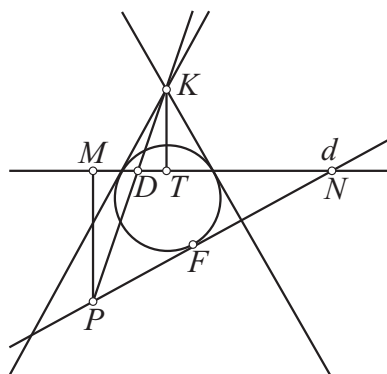


2.16. ábra. A kúp szeletei

A továbbiakban nem elfajuló kúpszeleteket fogunk vizsgálni. Feltesszük tehát, hogy a metsző sík nem megy át a kúp csúcsán. Vegyük észre, hogy mindig beírható egy gömb a sík és a kúpfelület által határolt korlátos, vagy nem korlátos tartományba. Ennek a gömbnek a kúpfelülettel közös pontjai egy kört alkotnak, melynek síkja fontos szereppel bír, a továbbiakban legyen ez Π . Kiindulási síkunkat nevezzük α -nak, a két sík metszésvonalát d -nek. Érintse a kúpszelet síkját a gömb F -ben. Messe egy kúpalkotó P -ben α -t és D -ben Π -t, legyen továbbá M a P -pont Π -re vonatkozó merőleges vetülete, és N a d egyenesre vonatkozó vetület. Világos, hogy a $\overline{PN}$ szakasz hossza a P pont és a d egyenes távolsága. Legyen még a kúp K csúcsának merőleges vetülete a Π síkon T .

Mivel PMD_{Δ} háromszög hasonló a KTD_{Δ} háromszöggel, ezért a $DPM_{\angle}$ szög a kúp félnyílásszöge ϕ . A $|\overline{PF}|$ távolság megegyezik a $|\overline{PD}|$ távolsággal, mert a gömbhöz külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, ezért

$$|\overline{PD}| = \cos \phi |\overline{PF}|.$$



2.17. ábra. A vezéregyenes

Ugyanakkor, ha ψ jelöli a két sík hajlásszögét a PMN háromszögből

$$|\overline{PD}| = \sin \psi |\overline{PN}| = \sin \psi |Pd|$$

adódik. Összevetve a két egyenlőséget kapjuk, hogy

$$\frac{|\overline{PF}|}{|Pd|} = \frac{\cos(\pi - \psi)}{\cos \phi}$$

ami a sík rögzítése után egy állandó.

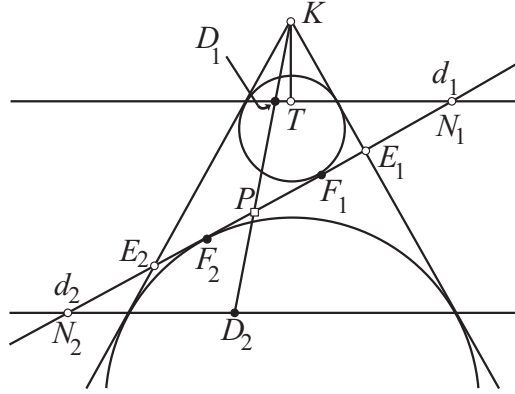
Ezért a kúpszeletek alábbi definíciójához jutunk:

2.3.2. Definíció (vezéregyenessel). Ellipszisnek nevezzük a kúpszeletet, ha a sík egy adott F pontjától és adott d egyenesétől mért távolságuk $\frac{|PF|}{|Pd|}$ aránya kisebb mint 1, parabolának ha egyenlő 1-el és hiperbolának ha nagyobb mint 1.

2.3.1. Ellipszis

Haladjunk tovább a 2.17. ábra specializálásával. Tekintsük azt az esetet, amikor a metszősík minden alkotót metsz. Ábránkon ekkor berajzolhatunk még egy kört, ami a kúpba írt, a síkot a másik oldaláról érintő gömb vetülete és egyben a rajz síkjával való metszete (lásd 2.18. ábra). Minden fontos pontunk és vonalunk még egy példányban előáll, ezt az 1-es 2-es indexek felvételével jeleztük. Több mindent is leolvashatunk az ábráról, először is, hogy a P pontnak az F_1 , F_2 pontoktól való távolsága a gömbhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége folytán megegyezik a $\overline{D_1D_2}$ kúpalkotó szakasz hosszával, ezért független a P pont választásától. Legyen ez a távolság $2a$ -val jelölve. Megkapjuk az ellipszis második síkbeli definícióját:

2.3.3. Definíció. Adott két pont és egy távolság, azon pontok mértani helye a síkon, melynek a két ponttól mért távolságának összege az adott távolsággal egyezik meg, az ellipszis.



2.18. ábra. Dandelon tétele

Maguk az E_1 , F_1 , F_2 és E_2 pontok a rajz síkjában vannak, ezért a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt az $\overline{E_1F_1}$ és $\overline{E_1F_2}$ szakaszok összege szintén $2a$. Jelöljük a továbbiakban az $\overline{F_1F_2}$ szakasz hosszát $2c$ -vel, ekkor az $2a = 2|\overline{E_1F_1}| + 2c$ egyenlőségből adódik, hogy $|\overline{E_1F_1}| = a - c$. Hasonlóképpen adódik, hogy $|\overline{E_2F_2}| = a - c$ szintén teljesül. Akkor viszont az $|\overline{E_1E_2}| = 2a$ is fennáll. Továbbá E_1 , E_2 a kúpszelet pontjai, tehát

$$|\overline{E_1F_1}| : |\overline{E_1N_1}| = |\overline{E_2F_1}| : |\overline{E_2N_1}|,$$

ahol most N_1 az E_1 , E_2 pontokhoz tartozó talppont a d_1 egyenesen. Felhasználva, hogy $|\overline{E_2F_1}| = a + c$ és $|\overline{E_2N_1}| = 2a + |\overline{E_1N_1}|$, kapjuk, hogy

$$(a - c) : |\overline{E_1N_1}| = (a + c) : (2a + |\overline{E_1N_1}|),$$

ahonnan

$$2a^2 - c|\overline{E_1N_1}| - 2ac = c|\overline{E_1N_1}|,$$

így

$$|\overline{E_1N_1}| = \frac{a^2 - ac}{c}.$$

Mivel $|\overline{E_1N_1}| = |\overline{E_2N_2}|$ nyilván fennáll, kapjuk, hogy

$$|\overline{N_1N_2}| = 2a + 2\frac{a^2 - ac}{c} = \frac{a^2}{c},$$

és az ellipszist meghatározó arány:

$$\frac{|\overline{E_1 F_1}|}{|\overline{E_1 N_1}|} = \frac{c}{a}.$$

Áttérve, mostmár a görbe síkjában rajzolt ábrára (2.19. ábra), konkrét szerkesztési eljárások kidolgozásával további információkat gyűjthetünk az ellipszistről. A most rajzolandó ábrát az *ellipszis alapábrájának* nevezzük. Visszatérünk a hagyományos jelölésekhez, az új elnevezéseket a szövegből dőlt betűvel kiemeljük. Így az E_1, E_2 pontokat, amelyek a leghosszabb ellipszis átmérő pontjai A -val és B -vel jelöltük. Ezek távolsága tehát továbbra is $2a$. A szakasz középpontja legyen O . Az O -ban $\overline{AB}$ -re állított merőleges is tartalmaz ellipszis pontokat, melyek F_i -től éppen a távolságra vannak, ezek C , illetve D . Általános P pontot úgy tudunk szerkeszteni, hogy egy $2a$ hosszú szakaszt felbontunk két részre és a kapott részzszakaszok hosszával mint sugárral köröket rajzolunk az F_i fókuszok körül. Ezek metszéspontjai az ellipszis olyan pontjai, melyek az AB, CD egyenesekre nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Mivel tetszőleges ellipszis pont ezen az úton megkapható és ezek szimmetrikus négyesek csoportjaiba sorolhatók, az ellipszisnek ez a két egyenes szimmetria tengelye. Az $\overline{AB}$ szakasz a nagyobb, ezt *nagy tengelynek* nevezzük a $\overline{CD}$ a kisebb ezt *kis tengelynek*. A kis tengely félhossza legyen b . Nyilván $a^2 = b^2 + c^2$ teljesül. Az A, B, C, D pontokat *csúcspontoknak* nevezzük az O pont az ellipszis *centruma*, amire nézve középpontosan szimmetrikus. A P pontot összekötve a fókuszokkal kapjuk a *vezérsugarakat*, mérjük fel most az F_1 -hez tartozó vezérsugarat a másik P -n túli meghosszabbítására, kapjuk az E pontot. Az $F_1 P E_\infty$ szög szögfelező egyenese t .

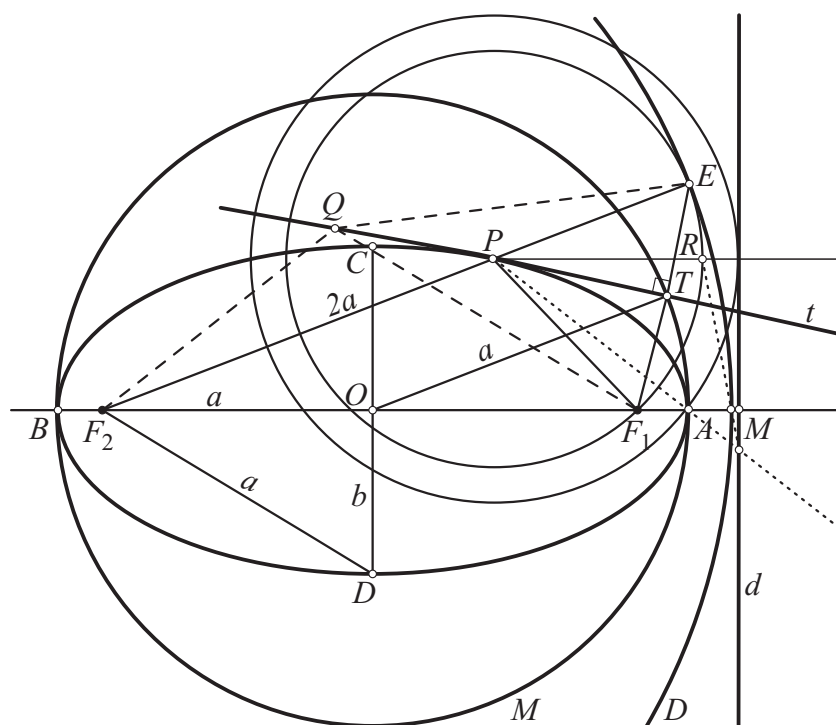
Mivel $|\overline{PE}| = |\overline{PF_1}|$ ezért t az $\overline{EF_1}$ szakasz szakaszfelező merőlegese, azaz tetszőleges Q pontja E -től és F_1 -től egyenlő távolságra van. Tehát egy ilyen pontra a

$$|\overline{QF_1}| + |\overline{QF_2}| = |\overline{QE}| + |\overline{QF_2}| \geq |\overline{EF_2}| = 2a,$$

egyenlőtlenség áll fenn, amelyben csak a P pont esetén találunk egyenlőséget. Ha a sík egy Q pontjára a

$$|\overline{QF_1}| + |\overline{QF_2}| > 2a$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor ezt az *ellipszis külső pontjának* nevezzük. A t egyenesen tehát pontosan egy ellipszis pont van a rajta lévő többi pont pedig az ellipszis külső pontja. Az ilyen egyenesek az ellipszis *érintői*. Az E pontot tehát úgy is megkaphattuk volna, hogy az ellipszis t érintőjére tükrözzük az F_1 fókuszot. Egy ilyen tükörkép pontot *ellenpontnak* nevezzük az ellenpontok halmaza (az F_1 fókusz valamennyi ellipszis érintőre vonatkozó tükörképeinek



2.19. ábra. Az ellipszis alapábrája

halmaz) az *ellenalakzat*. Mivel az ellenalakzat minden pontja az F_2 fókuszról, azonos $2a$ távolságra van pontjai egy körre esnek, melynek középpontja F_2 sugara $2a$. Azonban ezen kör valamennyi pontjához könnyen visszakereshető az az érintő, amire való tükörképként előáll, ezért az ellenalakzat ezen teljes kör. Az elnevezés dolgában az irodalom eltér, szokták ezt a kört vezérkörnek is nevezni, jelenlegi felépítésünkben konzekvensőbb az ellenkör elnevezés.

Vegyük észre, hogy az F_2, B, E pontok kollineáris voltából az is következik, hogy a P pont középpontú, F_1 -en keresztülhaladó kör az ellenkört belülről érinti. Így definiálhatnánk az ellipszist a következő módon is:

2.3.4. Definíció (definíció vezérkörrel). *Adott egy kör és belsejében egy pont. Azon körök középpontjainak a mértani helyét, melyek a ponton áthaladnak és a kört belülről érintik, ellipszisnek nevezzük.*

Az alapábra egy további fontos kört is tartalmaz, ez az ellipszis *főköre*. Középpontja az O pont és a sugara a , azaz keresztül halad az A, B csúcspontokon. Mint egy mértanihely feladat megoldását, úgy kaphatjuk meg a főkört, hogy az F_1 (F_2) fókusz merőlegesen vetítjük az ellipszis érintőire és keressük a vetületi pontok mértani helyét. Az alapábrán T jelöl egy vetületi pontot. Valóban, az F_2EF_1 háromszög oldalainak O illetve T felezőpontját összekötve a háromszög középvonalához jutunk, így annak hossza éppen $2a$ hosszú oldalának a fele, azaz a .

Ábránkon a vezéregyenest is könnyen berajzolhatjuk (2.20. ábra). Mivel merőleges az AB nagytengely egyenesére, és az A ponthoz tartozó, vezéregyenestre eső talppont egyúttal a nagytengely egyenesével való metszéspont is, ezért elegendő a nagytengelyen olyan pontot M pontot keresni, amire az

$$\frac{|\overline{AF_1}|}{|\overline{AM}|} = \frac{c}{a}$$

. Mivel a P pont köré rajzolt $\frac{a}{c}|\overline{PF_1}|$ sugarú kör a keresett egyenest érinti, ezért a P -n áthaladó vízszintes egyenesen a két koncentrikus kör sugarai a kívánt arányban állnak. Ugyanakkor az A pont felezi az ellenkör által az $\overline{AM}$ -ből kimetszett S pont és az F_1 távolságát, tehát a PA egyenes és a P középpontú F_1 -en áthaladó kör vízszintes PR sugarának R végpontját S -el összekötő egyenes a vezéregyenest egy pontjában metszik egymást.

Alkalmazhatjuk ezen észrevételt két speciális pont esetében, az egyik a kistengely C végpontja, a másik az ellipszis azon P pontja, mely éppen az F_1 fókusz "felett" helyezkedik el, azaz az F_1P egyenes párhuzamos a kistengellyel (lásd a 2.20. ábrát). A C esetében a

$$|\overline{CQ'}| = \frac{a}{c}|\overline{CF_1}|$$

egyenlőség alapján újra megkaphatjuk az O pont és a d vezéregyenes $\frac{a^2}{c}$ távolságát. Hasonlóképpen adódik, hogy $|\overline{PQ}| = |\overline{AF_1}| + |\overline{AM}| = \frac{b^2}{c}$, ahonnan kapjuk, hogy $|\overline{PF_1}| = \frac{b^2}{a}$. Ezen utóbbi $\overline{PF_1}$ szakaszt *latus rectum*-nak nevezzük. A latus rectum egyenese átmegy a C -hez tartozó E ellenponton, mert az F_2 pont szintén rajta van a C középpontú F_1 -en áthaladó körön, így az $\overline{F_2E}$ szakasz ezen kör átmérője, azaz az F_1F_2 egyenes merőleges az EF_1 egyenesre. Ezt mondhatjuk úgy is, hogy a C középpontú fókuszokon áthaladó kör az F_2 középpontú vezérkör és az F_1 -en áthaladó latus rectum F_1P egyenese egy ponton megy keresztül.

Tudjuk, hogy a $PMF_{1\Delta}$ háromszög befogóinak aránya $c : a$. Az F_2P vezérsugár messe a P középpontú F_1 -n keresztülhaladó kört E' -ben. Mivel

$$|\overline{F_2E'}| = 2a - 2\frac{b^2}{a} = 2\frac{c^2}{a},$$

ezért E' -ből a nagytengelyre állított merőleges H talppontjával létrejövő derékszögű háromszög megfelelő befogóinak aránya:

$$|\overline{E'H}| : |\overline{HF_1}| = \left(\frac{2\frac{c^2}{a}}{2a - \frac{b^2}{a}} \right) \frac{b^2}{a} : 2c \frac{\left(2a - \frac{b^2}{a}\right) - 2\frac{c^2}{a}}{2a - \frac{b^2}{a}} = \frac{cb^2}{a^2} : \frac{b^2}{a} = c : a,$$

ezért az $E'F_1$ egyenes párhuzamos PM egyenessel. Azonban $E'F_1$ nyilván párhuzamos a P -beli ellipszis érintővel, tehát a P -beli érintő átmegy a nagytengely egyenesének a vezéregyenessel való metszéspontján M -en.

2.3.2. Hiperbola

Most azon síkmetszetből indulunk ki, mely pontosan két kúpalkotóval párhuzamos és nem megy át az origón. Ilyenkor a kettős körkúp két különböző kúpjába lehet érintő gömböket írni.

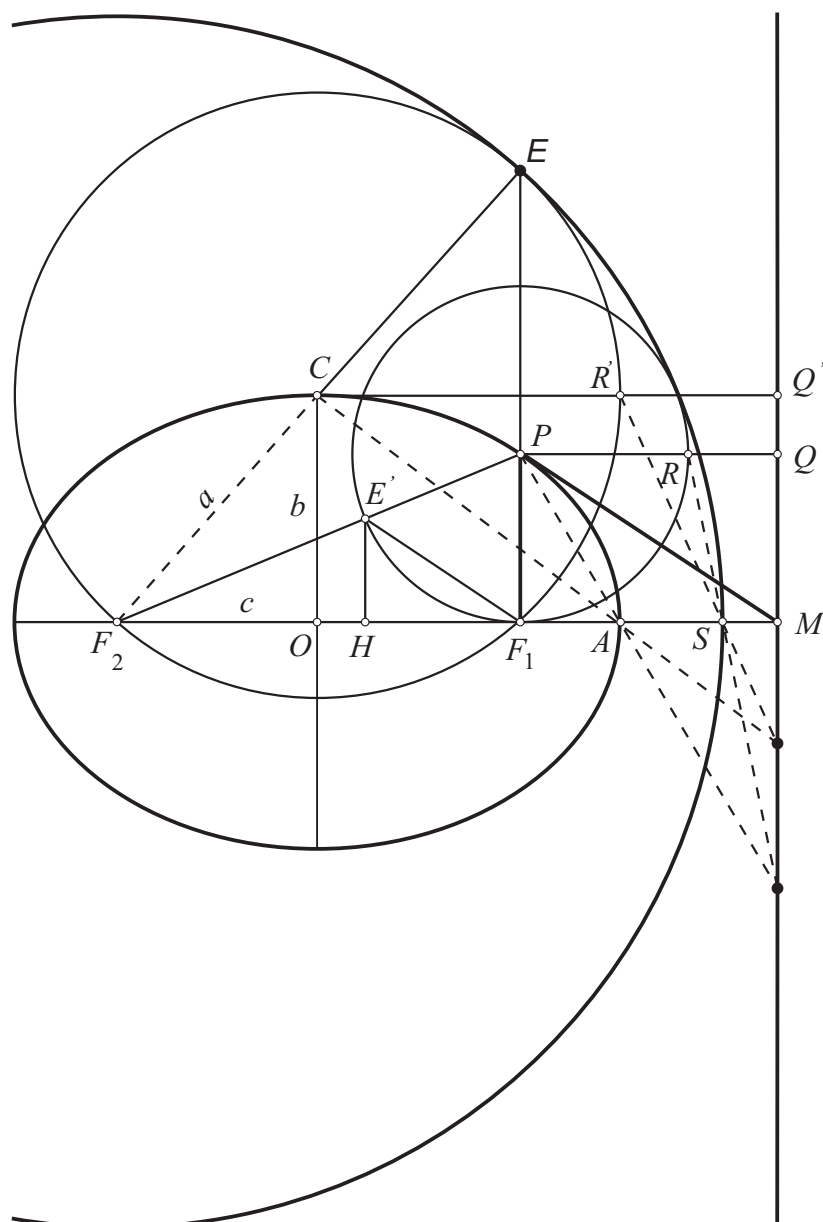
Az ellipsziszénél elmondottak változatlanul elmondhatók a hiperbola esetén, de itt a fókuszok $2c$ távolsága nagyobb a fix kúpalkotó $|\overline{D_1D_2}| = |\overline{E_1E_2}| = 2a$ távolságánál, és így a P pontok az

$$||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|| = 2a$$

egyenlőséget elégítik ki, a hiperbolát meghatározó arány pedig

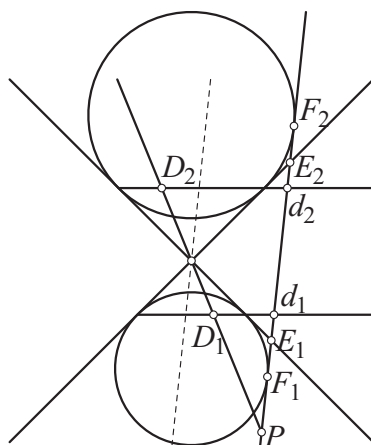
$$\frac{|\overline{PF_1}|}{|\overline{Pd_1}|} = \frac{c}{a} > 1.$$

Áttérve a hiperbola alapábrájára szintén újabb fogalmakat vezethetünk be, ezek közül az ellenpont, érintő, ellenkör vagy vezérkör illetve főkör fogalma teljes analógiában áll az ellipsziszénél mondottaknál. Azonban az ellenkör



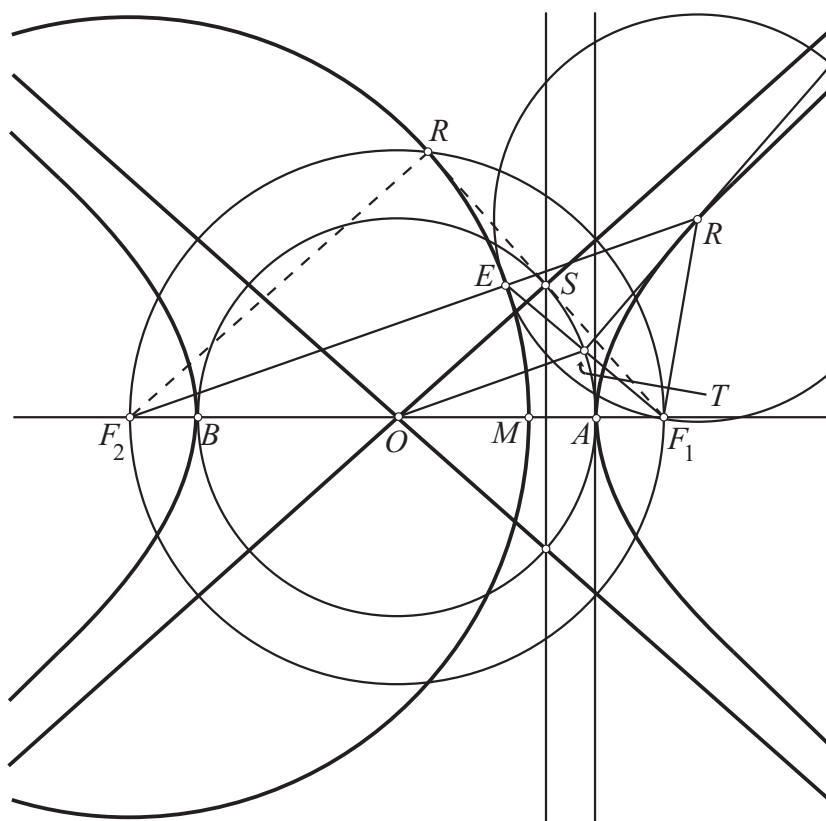
2.20. ábra. Latus rectum

Világos, hogy nem találunk pontot az A , B pontok szakaszfelezőmerőleges egyenesén, ezért csak egy igazi tengelyünk van a két szimmetria tengely ellenére, ezt *valós* tengelynek míg a másikat *képzetesnek* nevezzük. Két csúcspontunk van A és B .



2.21. ábra. Dandelon tétele

$$|\overline{OM}| = a \frac{a}{c} \text{ és } |\overline{MA}| = \frac{a(c-a)}{c}.$$



2.22. ábra. Hiperbola alapábra

Ezért

$$\frac{|\overline{AF_1}|}{|\overline{AM}|} = \frac{c}{a}$$

és így M a vezéregyenes pontja. Mivel a vezéregyenes szimmetrikus a valós tengelyre, ezért az MS egyenessel egyezik meg. Továbbá bevezetve a $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ jelölést,

$$|\overline{MF_1}| = c - \frac{a^2}{c} = \frac{b^2}{c},$$

ezért az F_1 feletti hiperbola pont valós tengelytől való távolsága, azaz a latus rectum hossza:

$$\frac{b^2}{a}.$$

Érdemes a jellegzetességeket tartalmazó új ábrát készíteni ugyanúgy, ahogy azt az ellipszis esetében tettük (lásd 2.23. ábra).

Ábránkon a P pont az F_1 feletti hiperbola pont. A hozzátartozó ellenpont E illetve a megfelelő érintő a PT egyenes. Az érintő megint felezi a vezérsugarak (ezúttal) belső szögét ezért olyan M' pontban metszi a valós tengelyt, melyre

$$|\overline{M'F_1}| : |\overline{M'F_2}| = \frac{b^2}{a} : \left(2a + \frac{b^2}{a}\right)$$

teljesül. Ebből

$$\left(2a + \frac{b^2}{a}\right) |\overline{M'F_1}| = (2c - |\overline{M'F_1}|) \frac{b^2}{a}$$

összefüggés adódik, ahonnan

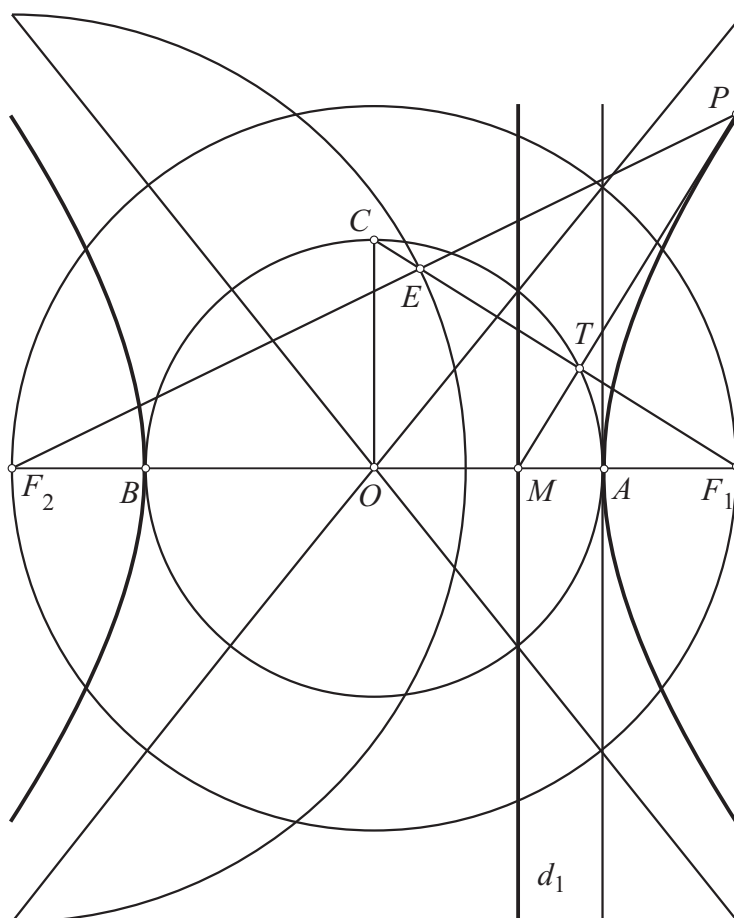
$$|\overline{M'F_1}| = \frac{cb^2}{a(a + \frac{b^2}{a})} = \frac{b^2}{c}$$

adódik, ezért $M = M'$. Hosszabbítsuk meg az $\overline{F_1E}$ szakaszt E -n túl, amíg nem metszi a főkört valamely C pontban. Mivel $|\overline{PT}| |\overline{PM}| = |\overline{PF_1}|^2$, ezért

$$|\overline{PT}| = \frac{b^4}{a^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{b^4}{a^2} + \frac{b^4}{c^2}}} = \sqrt{\frac{b^4}{a^2 + \frac{a^4}{c^2}}} = \frac{b^2 c}{a \sqrt{c^2 + a^2}}.$$

Mivel $|\overline{PT}| : |\overline{F_1T}| = c : a$ ebből

$$|\overline{F_1T}| = \frac{b^2}{\sqrt{c^2 + a^2}}$$



2.23. ábra. Latus rectum

kifejezés adódik. Mivel $|\overline{F_1T}||\overline{F_1C}| = |\overline{F_1A}||\overline{F_1B}|$ ezért

$$|\overline{F_1C}| = \frac{b^2}{\frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}} = \sqrt{c^2+a^2}.$$

Azaz C a főkör AB -re merőleges átmérőjének végpontja, hiszen a $COF_{1\Delta}$ derékszögű. Azaz a P pont szerkeszthető a következő módon:

A főkör C pontját F_1 -el összekötve kapjuk a második T metszéspontot, amiben ugyanezen szakaszra merőlegesen állítva a TP érintő egyeneshez jutunk. A P pont ezen egyenes és az F_1 -ben a valós tengelyre állított egyenes közös pontja.

2.3.3. Parabola

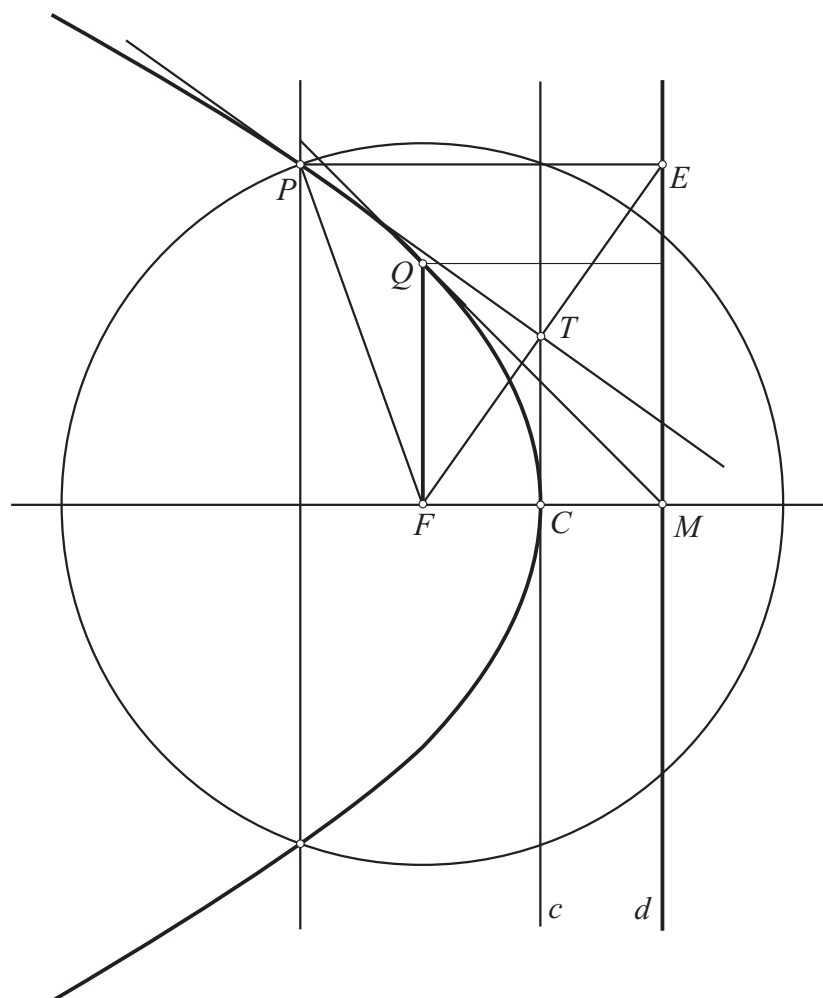
A parabola esetén új térbeli ábrára nincs szükség, nincs további Dandelon gömb. A lehetséges síkbeli definíciók egy definícióba esnek össze, mert csak egy fókusz van, és a vezérkör (ellenkör) egybeesik a vezéregyenessel. Szintén egy "valódi" tengelyt találunk, de már szimmetria tengely sincs több. Ezen az egy tengelyen van az egy darab csúcspont, amelyet a hagyományoknak megfelelően C -vel fogunk jelölni. A latus rectum szerkesztése szintén nem jelent problémát, hiszen olyan Q pontot keresünk, mely a d egyenessel párhuzamos F -n áthaladó egyenesen van és egyenlő távolságra F -től és d -től, azaz az M metszéspontból induló d -vel $\frac{\pi}{4}$ szöget bezáró egyenesen, mely egyúttal a Q -beli érintő is.

2.3.4. Kúpszelet és egyenes metszéspontjai

Az ábrázoló geometria alapvető problémája, hogy miként lehet kúpszelet és egyenes metszéspontjait megszerkeszteni. A különféle definíciók különböző geometria feladatokhoz vezetnek. A vezérkört használó definíció közös módszer eredményez a három kúpszelet esetében a pont körre vonatkozó hatványának fogalmát használva. A két centrális kúpszelet esetén a feladat megfogalmazása is azonos, az adatok felvétele dönti el, hogy ellipszissel vagy hiperbolával való metszetet kereshetünk. Az elemi geometriai feladat, amire visszavezethető a metszéspontok szerkesztése:

Szerkesztendő olyan kör, aminek középpontja adott egyenesre illeszkedik, egy adott ponton áthalad és egy adott egyenest érint.

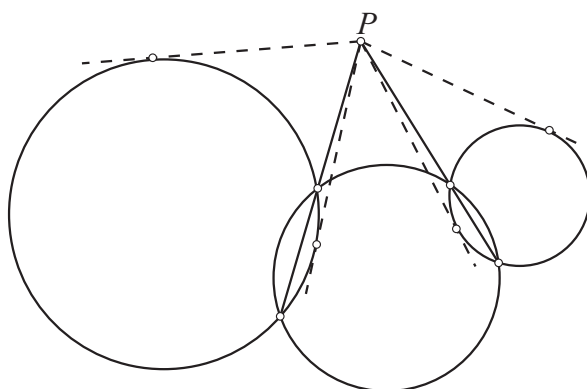
Ha a pont a kör belsejébe esik a megoldások egy ellipszisnek az adott egyenessel való metszéspontjai, ha a pont a körön kívül volt, akkor egy hiperbolának az egyenessel való metszéspontjairól van szó. Most a hiperbola és parabola esetét tárgyaljuk, mert az ellipszisre vonatkozó analóg feladat affinitással is könnyen megoldható.



2.24. ábra. A parabola alapábrája

Hiperbola, parabola és egyenes metszéspontjának szerkesztése

A körön kívül fekvő pont *körre vonatkozó hatványának* nevezzük a pontból a körhöz húzott szelők hosszainak szorzatát. Mivel ezen szorzat akkor is konstans, amikor a pont a körön belül helyezkedik el, illetve zérus, ha a körvonalon, a hatvány minden síkbeli pontra értelmes nem negatív szám. Két körre vonatkozóan megegyező hatványú pontok a sík egy egyenesét adják, ezt a két kör hatványvonalának nevezzük. Metsző körök esetén a hatványvonal a két metszéspont összekötő egyenese, érintkező köröknél a közös érintő, míg egymást elkerülő körök esetén egy a középpontokat összekötő egyenesre merőleges egyenes, melyet könnyen megszerkeszthetünk, ha felvesszünk kettő új kört, mely mindkét kiindulási kört metszi (lásd 2.25. ábra).

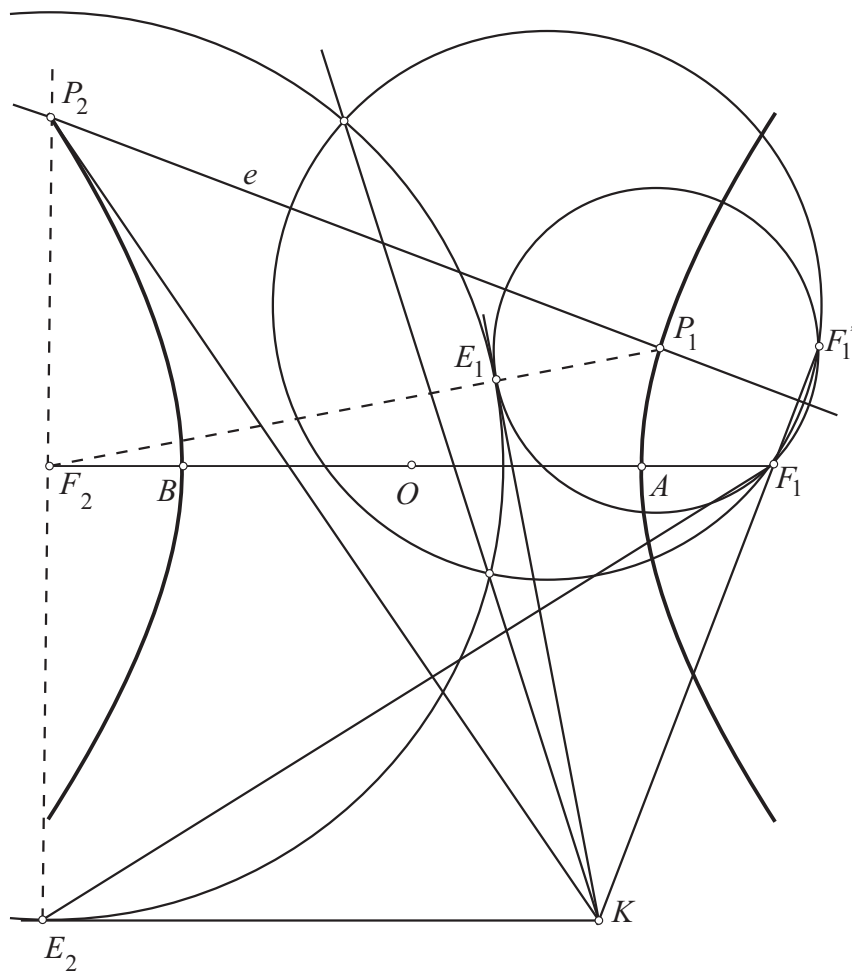


2.25. ábra. Hatványvonal

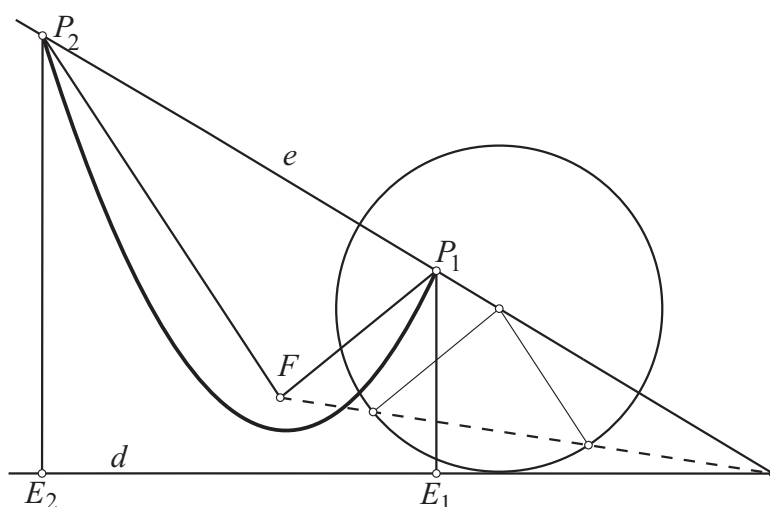
A szerkesztés azon múlik, hogy az F_1 ponton keresztülhaladó azon körök, melyeknek középpontja e -re esik, tartalmazzák az F_1 pont e -re vonatkozó tükkörképét is F'_1 -t. Azaz ezek közös hatványvonala az $F_1F'_1$ egyenes. Az érintési tulajdonság azt jelenti, hogy az adott kör és a keresendő hatványvonala, a közös érintő, így ezen érintőnek az $F_1F'_1$ egyenessel való K metszéspontja olyan pont, melynek hatványa az adott körre vonatkozólag éppen $|\overline{KF_1}||\overline{KF'_1}|$.

Véve tehát egy tetszőleges kört mely középpontja e -n van, metszi az F_2 középpontú adott ellenkört és átmegy F_1 -en, majd ennek és az ellenkörnek a hatványvonalát megszerkesztve a K pontot megkapjuk az $F_1F'_1$ egyenesen. A K -n keresztülmenő érintőket szerkesztve kapjuk az E_1, E_2 érintési pontokat, melyek a keresett köröknek is pontjai. Így az F_2E_1, F_2E_2 egyenesek e -ből kimetszik a körök keresett P_1, P_2 középpontjait.

A parabola esetén F_2 végtelen távoli pont, az ellenkör megegyezik a vezéregyenessel, így a feladat adott kör szerkesztése, mely adott ponton átmegy, adott egyenest érint, és egy másikon van a középpontja. A feladatot hasonlósággal lehet a legegyszerűbben megoldani, vegyünk fel egy tetszőleges kört



2.26. ábra. Hiperbola és egyenes metszéspontjai

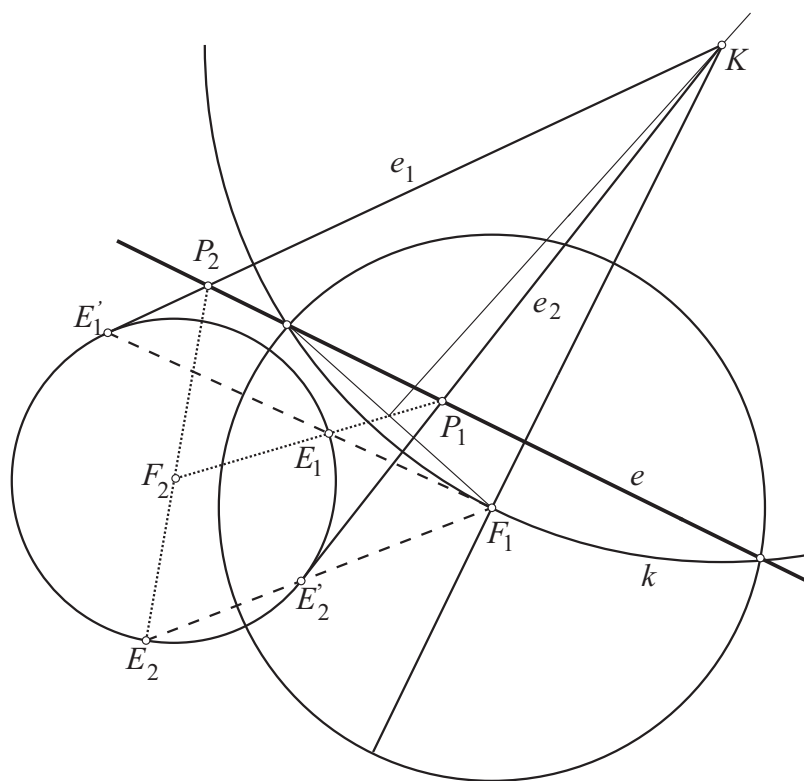


2.27. ábra. Parabola és egyenes metszéspontjai

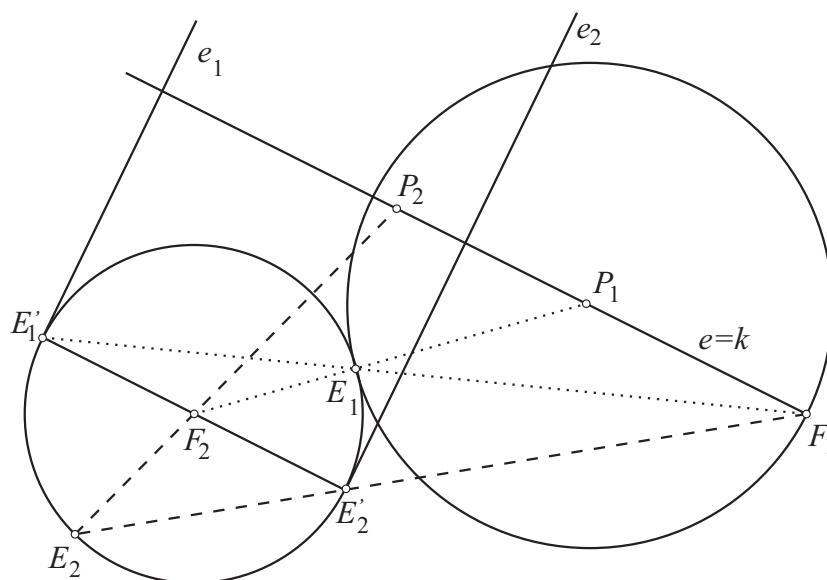
mely a vezéregyeneset érinti és középpontja az adott egyenesen van és alkalmazzunk rá egy centrális nyújtást a két egyenes metszéspontjából, hogy keresztül menjen az adott ponton.

Hiperbola esetén másik szép megoldáshoz jutunk, ha inverziót alkalmazunk. Tekintsünk egy F_2 középpontú az adott körre merőleges kört. Legyen ez az inverzió alapköre. Az inverzió az adott kört invariánsan hagyja, az adott egyenest a K középpontú k körbe viszi, a keresett kört pedig a sík valamely olyan egyenesébe, mely az adott kört érinti és merőleges k -ra. Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy K -n keresztülhaladó egyenest keresünk, azaz a megoldások invertált képei az e_1, e_2 érintő egyenesek, melyeken az érintési pontok rendre E'_1, E'_2 . Az érintési pontok inverz képei E_1, E_2 a keresett körök és az adott kör közös pontjai, azaz az F_2E_1, F_2E_2 egyenesek kimetszik e -ből a körök P_1, P_2 középpontjait. Ha valamelyik kör úgy érint, hogy tartalmazza az adott kört, akkor az eredeti feladatnak a hozzá tartozó P pont nem megoldása, a felvett egyenes csak egy pontban metszi a hiperbolát. Ilyen egyenesek lehetnek például az aszimptoták eltoltjai a sík valamely alkalmas pontjába.

Úgy tűnik, mintha a P_1, P_2 pontok illeszkednének az e_2, e_1 érintőegyenesekre is. Ez most csak az ábra sajátossága, amit rögtön beláthatunk, hogyha az e egyenes egy pontjának választjuk F_1 -t. Ekkor $e = k$ és e_1, e_2 e -re merőleges irányú érintők. Azaz minden ilyen esetben az E'_1, E'_2 pontok az ellenkör ugyanazon pontjai F_1 felvételétől függetlenül. Az e_1, e_2 egyenesnek az e -vel való metszéspontjai is mindig ugyanazok a pontok, de P_1, P_2 helyzete nyilvánvalóan az F_1 helyzetének a függvénye (lásd 2.29. ábra).

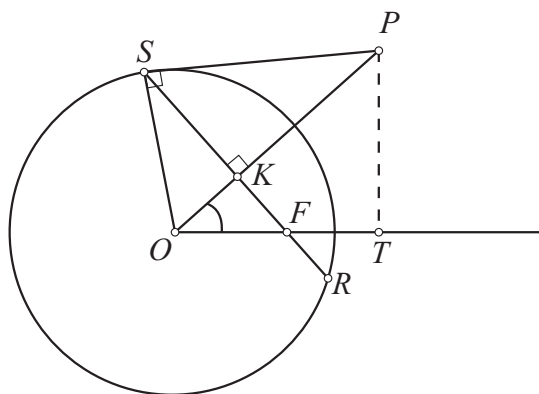


2.28. ábra. Hiperbola és egyenes metszéspontjai inverzióval



2.29. ábra. Szerkesztés amikor a metsző egyenesre illeszkedik a fókusz

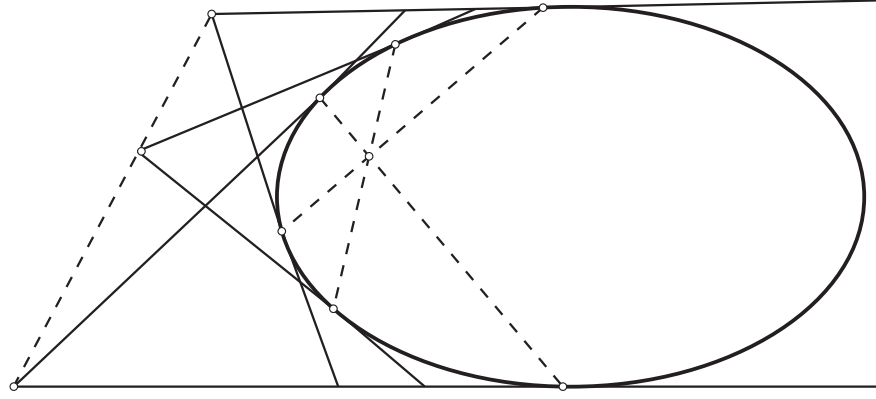
A kúpszeletek egyenessel való metszéspontjainak szerkesztése során – ha a végtelen távoli pontokat is figyelembe vesszük – a metsző egyenesek két pontban metszik a kúpszeletet. A metsző egyenes *pólusának* nevezzük a metszéspontokban húzott érintők (esetleg ideális) metszéspontját. A fókuszon áthaladó metszők pólusai a megfelelő vezéregyenesre illeszkednek. Ennek belátására vegyük észre, hogy tetszőleges három, közös belső ponton átmenő szelő pólusai egy egyenesre illeszkedik. Valóban elegendő az állítást körre igazolni, mert a kúp síkmetszeteinek érintői a metszősík és a pontot kimetsző alkotó mentén érintő érintősík metszészvonala, ezért a fenti tulajdonság vagy minden síkmetszetre igaz, vagy egyre sem. Körre viszont a következő egyszerű számítással adódik. Tekintsük az 2.30. ábra jelöléseit.



2.30. ábra. Polaritás körre

$$|\overline{OK}| = x \cos \alpha$$
$$|\overline{KS}|^2 = r^2 - x^2 \cos^2 \alpha.$$
$$|\overline{KS}|^2 = |\overline{OK}| |\overline{KP}| = x \cos \alpha |\overline{KP}|,$$
$$|\overline{KP}| = \frac{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}{x \cos \alpha} \text{ és } |\overline{OP}| = \frac{r^2}{x \cos \alpha}.$$
$$|\overline{OT}| = \frac{r^2}{x},$$

ami független α -tól. Azaz a P pontok a T -n áthaladó OF -re merőleges egyenesre illeszkednek.



2.31. ábra. Polaritás kúpszeletre

Visszatérve eredeti feladatunkhoz, mivel egy a fókuszon keresztülhaladó speciális szelő éppen a latus rectum, amiről igazoltuk, hogy végpontjaiban az érintők a vezéregyenes és a tengely metszéspontján haladnak keresztül, a tengelyre való szimmetriát is használva adódik, hogy a fókuszon áthaladó szelők pólusai a vezéregyenesre illeszkednek.

Igazoljuk, hogy tetszőleges metrikus kúpszelet projektív értelemben is kúpszelet. Ehhez szükségünk lesz a következő lemmára.

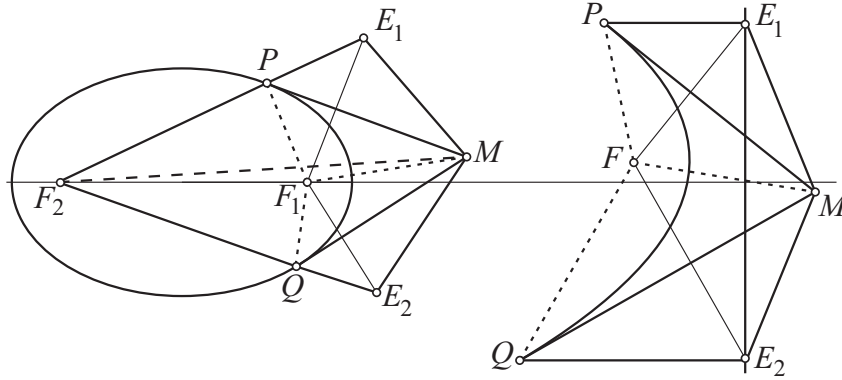
2.3.1. Lemma. *A kúpszelet két érintőjének metszéspontját összekötve a fókusszal a fókusból a két érintési ponthoz húzott vezérsugarak egyik szögfelező egyenesét kapjuk.*

Bizonyítás: Legyen a két érintő PM illetve QM a hozzájuk tartozó ellenpontok E_1, E_2 . Mivel $\overline{ME_1} = \overline{MF_1} = \overline{MF_2}$ és a centrális kúpszeleteknél $2a = \overline{F_2E_1} = \overline{F_2E_2}$, ezért az $F_2E_1M_\perp$ megegyezik az $F_2E_2M_\perp$ -el. De akkor a $PE_1M_\perp = PF_1M_\perp$ és $QE_2M_\perp = QF_1M_\perp$ egyenlőségekből az állítás következik.

Parabola esetén az $E_1ME_2\Delta$ egyenlőszárú ezért szintén teljesül $PE_1M_\perp = QE_2M_\perp$ egyenlőség, ahonnan megint $PE_1M_\perp = PFM_\perp$ és $QE_2M_\perp = QFM_\perp$ egyenlőségek az állítást adják. $\square$

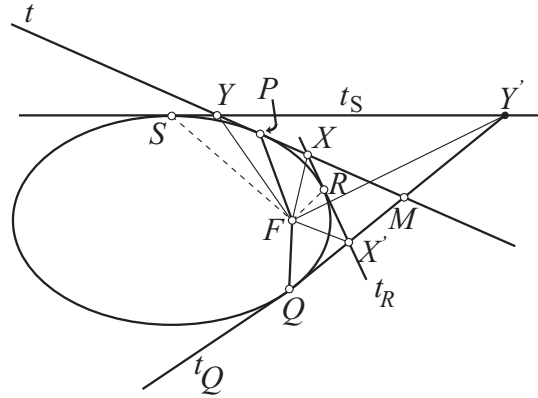
2.3.1. Tétel. *A kúpszelet tetszőleges két pontja legyen P és Q bennük az érintők t_P, t_Q . Ekkor a kúpszelet további érintő egyenesei a t_P illetve t_Q bizonyos projektív de nem perspektív pontsorainak megfelelő elemeit kötik össze.*

Bizonyítás: Tekintsük a két érintőt és egy tetszőleges harmadikat t_R -t. Ez messe t_P -t és t_Q -t X -ben illetve X' -ben (lásd 2.33. ábrát). A lemma szerint



2.32. ábra. A szögfelezés

ha R a PQM_{Δ} pontja, akkor $PFX_{\angle} = XFR_{\angle}$ és $RFX'_{\angle} = X'FQ_{\angle}$ miatt $XF'X'_{\angle} = \frac{1}{2}PFQ_{\angle}$. Ha S pont ezen a háromszögön kívülre esik az utolsó egyenlőség akkor is fennáll, pld. az ábrának megfelelő elhelyezkedés során,



2.33. ábra. A kúpszelet mint projektív pontsorok képződménye.

$SFY_{\angle} = YFP_{\angle}$ és $SFY'_{\angle} = Y'FQ_{\angle}$ alapján

$$YFY'_{\angle} = \frac{1}{2}(SFQ_{\angle} - SFP_{\angle}) = \frac{1}{2}PFQ_{\angle}$$

megint teljesül. Így az X pontok által létrejövő pontsorhoz tartozó F tartójú sugársor $\frac{1}{2}PFQ_{\angle}$ szöggel való elforgatottja olyan sugársort ad, melynek metszete a t_Q egyenesen az X' pontok által definiált pontsor. A két pontsor nyilván projektív de nem perspektív kapcsolatban áll egymással és a megfelelő elemek összekötő egyenesei adják a kúpszelet érintőit. $\square$

Azaz minden euklideszi kúpszelet egy projektív képződmény is és a dualitás elve szerint kielégíti a projektív kúpszelet definícióját is. Mint ahogy

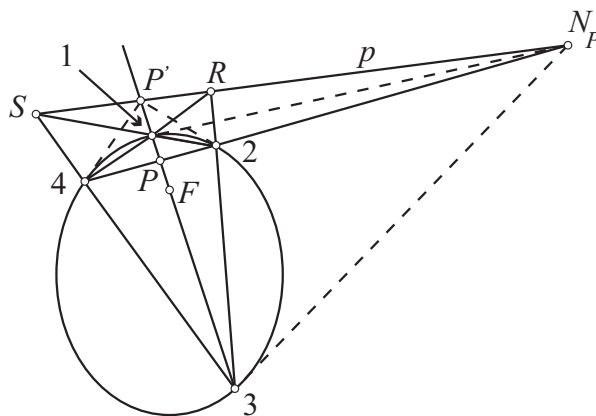
láttuk a fókusz a *pólusa* a vezéregyenesnek a vezéregyenes pedig *polárisa* a fókusznek. A kúpszelet pontjainak polárisai az érintők, a középpont polárisa olyan egyenes, melynek pontjai párhuzamos érintők metszéspontjai, azaz az ideális egyenes.

Ezért, valamely ideális ponton áthaladó metszőket az ideális pont polárisa, a pont harmonikus társában metszi, azaz a poláris előáll mint párhuzamos metszőkön létrejövő metszetszakaszok felezőpontjainak a halmaza. Mindig tartalmazza a kúpszelet centrumát így ha van centrum, az ezen polárisok közös pontja, ezért a kúpszelet *átmérőinek* egy új definíciójához jutottunk.

Parabola esetén tehát az egyik ideális pont egyben középpont is, melyben a parabolát az ideális egyenes érinti. Véve két tetszőleges parabola pontot, ezek összekötő egyenesének ideális pontjához tartozó poláris tehát átmérő. A pontokhoz tartozó parabola érintők ezen a polárison metszik egymást, így a következő euklidészi állításhoz jutottunk: *a parabola két érintőjének a metszéspontját összekötve az érintési pontok által meghatározott szakasz felezőpontjával, a tengellyel párhuzamos egyeneshez (átmérőhöz) jutunk.*

Kör esetén a fókusz és középpont fogalma egybeesik, a vezéregyenes az ideális egyenes.

A kúpszeletre vonatkozó polaritás meghatározza a sík egy érdekes leképezését. Ha P a vizsgálatunkban rögzített F fókusztól különböző pont, akkor legyen a P képe az FP egyenes azon P' pontja, melyben őt a P pont p polárisa metszi. Az F pontnak és d vezéregyenes pontjainak nem tulajdonítunk képet, a leképezés a projektív sík maradék pontjain bijekció.



2.34. ábra. Inverzió

Jelöljük az FP egyenes kúpszelettel való metszéspontjait 1-el és 3-al (lásd a 2.34. ábrát). Az 1-es és 3-as pontban meghúzott érintők az N_P pontban metszik egymást. Az N_P pontot kössük össze a P ponttal. Ha az egyenes metszi a kúpszeletet akkor P annak *belső pontja*, és a p polárison az N_P

pont mellett a kapott 2-es 4-es pontokban meghúzott érintők metszéspontja is rajta van, ez éppen a keresett P' pont (lásd a 2.34. ábra). Világos, hogy az 14 és 23 egyenesek R illetve az 12 és 34 egyenesek S metszéspontja is p -re illeszkedik. (Ha az összekötő egyenes elkerüli a kúpszeletet, akkor P *külső pont* és a belőle húzott érintők érintési pontjait köti össze a p poláris, ahonnan szintén a 2.34. ábrához jutunk csak P és P' felcserélődnek. Így tehát mindkét esetben használhatjuk ábránkat.) Vegyük észre, hogy az S, P', R, N_P pontok az 1,2,3,4 teljes négyszög ⁴ két átlós pontja illetve a másik két átlónak a p -vel való metszéspontja. Ezért a négy pont kettősviszonya $(SRN_PP') = -1$. A pontnégyest a 4-es pontból az FP egyenesre vetítve, újabb harmonikus pontnégyest találunk, azaz:

$$(31PP') = -1.$$

Kaptuk tehát, hogy *A P, P' pontokat az összekötő egyenesnek a kúpszelettel való metszéspontjai harmonikusan választják el egymástól.* Ha a kúpszelet kör akkor az F középpont és a PP' egyenes átmérő. Ekkor a kapott összefüggés:

$$-1 = (31PP') = \frac{|\overline{3P}|}{|\overline{P1}|} : \frac{|\overline{3P'}|}{|\overline{1P'}|} = \frac{r + |\overline{OP}|}{r - |\overline{OP}|} : \frac{r + |\overline{OP'}|}{r - |\overline{OP'}|}.$$

Ebből rögtön adódik, hogy

$$r^2 = |\overline{OP}| |\overline{OP'}|$$

azaz a leképezés a körre vonatkozó inverzió. Ezért nevezzük az eredeti leképezést *kúpszeletre vonatkozó inverziónak*.

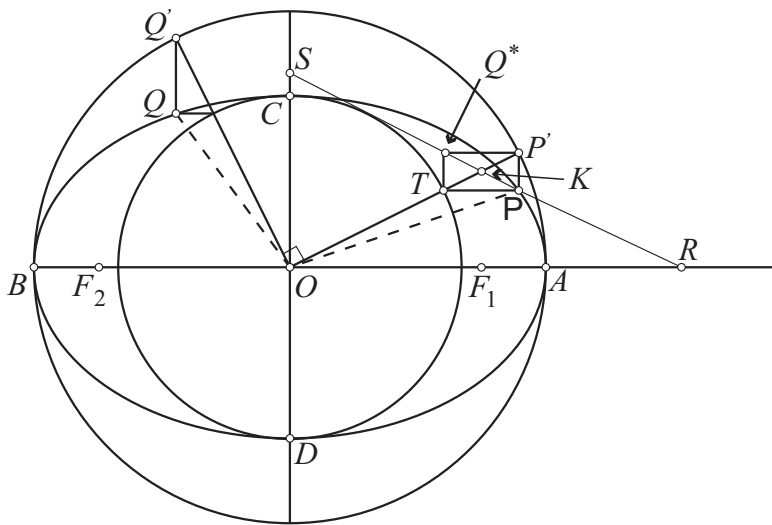
2.3.6. Az affinitások használata kúpszeleteknél

Az affinitás kúpszeletet kúpszeletbe visz és nem változtatja a kúpszelet végtelen távoli pontjainak a számát. Ezért a metrikus típusokat őrzi. Igen jól használható szerkesztési és bizonyítási feladatok megoldására, lássunk erre néhány példát.

Az ellipszis mint kör képe

Az ellipszis affinitással mindig körbe vihető, hiszen tekintve a főkör egy sugárát, annak végpontját a $b : a$ arányú nagytengelyre merőleges irányú affinitásnak alávetve, az ellipszis egy pontjához jutunk.

⁴ A teljes négyszög négy általános helyzetű pont által meghatározott hat egyenes metszéspontjainak halmaza. A keletkező két új pont a teljes négyszög két átlós pontja



2.35. ábra. Affin alapábra

Valóban, ha a P' pont távolsága a szokott jelölések mellett x illetve y a kistengelytől illetve a nagytengelytől, akkor egyrészt $x^2 + y^2 = a^2$ másrészt a P ellipszis pont távolsága a két fókuszról, rendre

$$\sqrt{(x+c)^2 + \left(\frac{b}{a}y\right)^2} \text{ illetteve } \sqrt{(x-c)^2 + \left(\frac{b}{a}y\right)^2}.$$

Azaz

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = \sqrt{(x+c)^2 + \left(\frac{b}{a}y\right)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + \left(\frac{b}{a}y\right)^2} = 2a$$

is fennáll, hiszen

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + \left(\frac{b}{a}y\right)^2} &= \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}} = \sqrt{2xc + a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2}} \\ \left(\sqrt{(x+c)^2 + \left(\frac{b}{a}y\right)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + \left(\frac{b}{a}y\right)^2} \right)^2 &= \left(2xc + a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} \right) + \\ + \left(-2xc + a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} \right) + 2\sqrt{\left(2xc + a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} \right) \left(-2xc + a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} \right)} &= \\ = 2 \left(a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} \right) + 2\sqrt{\left(a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} \right)^2} &= 4a^2. \end{aligned}$$

Ezek szerint, ha a kitengely meg a nagytengely fölé egyaránt megrajzoljuk a kört, akkor egy közös OP' sugár segítségével a megfelelő P ellipszis ponthoz úgy juthatunk, hogy a T kiskörrel alkotott metszéspontból a nagytengellyel húzunk párhuzamos egyenest, majd a P' pontból a kistengellyel, és a két egyenes metszéspontjaként a P ellipszisponthoz jutunk. Ezt a szerkesztést *kétkörös módszernek* nevezzük. Ha két merőleges körsugarat tekintünk ábránkon, az ezekhez tartozó OP , OQ félátmérőket *konjugáltaknak* nevezzük. Forgassuk el az $OQ'Q$ zászlócskát kilencven fokkal az óramutató járásával megegyező irányban. Ekkor a Q' pont a P' pontba fordul, a Q pedig a Q^* helyzetbe kerül. A kapott PTQ^*P' négyszög oldalai párhuzamosak a tengellyel, tehát téglalap. A Q^*P átlója messe a tengelyeket R -ben illetve S -ben. Ezért $|\overline{KT}| = |\overline{KP}|$ és mivel a TP egyenes párhuzamos az OR egyenessel $|\overline{KO}| = |\overline{KR}|$ következésképpen

$$|\overline{PR}| = |\overline{OT}| = b.$$

Hasonlóképpen

$$|\overline{PS}| = |\overline{P'O}| = a$$

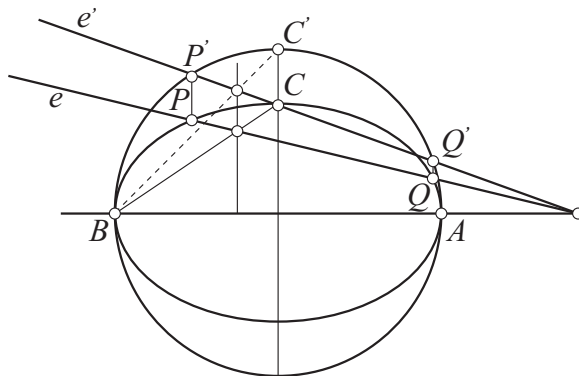
azaz

$$|\overline{SR}| = a + b$$

függetlenül a P pontnak az AC ellipszisíven elfoglalt helyétől. Ez alapján úgy is rajzolatunk ellipszis pontokat, hogy egy $a + b$ hosszú szakasz végpontjait a tengelyek egyenesesire illesztjük, majd megjelöljük az $a : b$ arányú osztópontot rajta. Ezen elv alapján működtek a mechanikus ellipszis rajzoló gépek az *ellipszográfok*. A módszer az ábrázoló geometria világában *papírcsík módszernek* van nevezve, de hívhatnánk létrás módszernek is, hiszen egy falhoz támasztott létrán álló ember a létra megcsúszása esetén ellipszis pályán fog a talaj síkjához közeledni.

A fenti észrevétel alapján, két konjugált ellipszis átmérő ismerete elegendő az ellipszis meghatározó adatainak a megszerkesztéséhez. Tegyük fel ugyanis, hogy a Q, O, P pontok adottak és tudjuk, hogy $\overline{OQ}$ illetve $\overline{OP}$ két konjugált félátmérő. Ekkor az Q pontnak az $QOP_\perp$ tompaszögű tartományban való kilencven fokos elforgatásával a Q^* ponthoz jutunk. a Q^*P egyenesből a $\overline{Q^*P}$ szakasz K felezőpontja mint középpont körül megrajzolt O -n áthaladó körvonal kimetszi az R és S pontokat, melyek meghatározzák a tengely egyeneseket. Adódnak a fél tengely hosszak is a $\overline{PS}$ illetve a $\overline{PR}$ szakaszok hosszaként. A nagyobbik a nagytengely félhossza ezt mérjük a konjugált átmérők által meghatározott, hegyesszögű tartományban haladó tengelyre, hiszen csak ez lehet a nagytengely. Megkaptuk az ellipszis csúcspontjait, melyekből az ellipszis fókuszai, vezéregyenesei, vezérkörei megszerkeszthetők. Ezt a szerkesztést *Rytz szerkesztésnek* nevezzük.

Szép egyszerű szerkesztést kínál az affinitás az ellipszis és egyenes metszéspontjainak meghatározására. Az ellipszist és az adott egyenest merőleges tengelyes affinitással a főkörébe illetve egy újabb egyenesbe transzformáljuk, majd a transzformált alakzatok metszéspontjait az inverz leképezéssel vissza transzformáljuk a kiindulási egyenesre. A szerkesztés könnyen nyomkövethető a 2.36. ábrán.



2.36. ábra. Ellipszis és egyenes metszéspontja

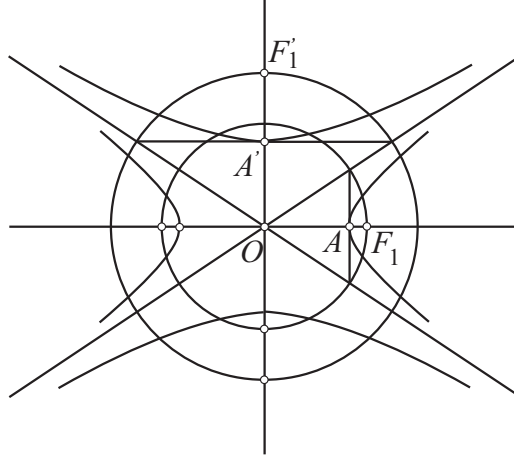
Hiperbola és affinitás

A hiperbolák affin osztálya nem tartalmaz a körhöz hasonló elfajuló elemet. Mégis van egy kitüntetett hiperbola az *egyenlőoldalú hiperbola*. Tekintsük a következő szerkesztési feladatot. Adott a hiperbola aszimptotája és a $2a$ távolság szerkesztendő a hiperbola. Világos, hogy a feladatnak két megoldása van, mert nincs megadva, hogy az aszimptoták szögfelezői közül melyikre esik a valós és melyikre a képzetes tengely.

A két megoldást a 2.37. ábrán láthatjuk. Rögtön adódik, hogy abban az esetben, ha az aszimptoták merőlegesek egymásra, a két megoldás egybevágó, egymás kilencven fokra elforgatottjai. Ezeket a hiperbolákat nevezzük *egyenlőoldalú hiperboláknak*. Tetszőleges hiperbola affinitással *egyenlőoldalú hiperbolába* vihető. Ha a Descartes koordinátarendszert úgy vesszük fel, hogy a tengelyek az aszimptotákkal egyezzenek meg, a jól ismert

$$y = \frac{1}{x}$$

függvény gráfként való előállításához juthatunk az egység alkalmas választása után. Azonban ebből az előállításból a hiperbola két szép tulajdonsága is rögtön adódik. Mivel $1 = xy$ egy $P(x, y)$ pont két koordinátájára ezért az OP_xPP_y téglalap területe egységnyi. Mivel az affinitás területarány tartó,



2.37. ábra. Hiperbola pár

tetszőleges hiperbola esetén fennáll, hogy *tetszőleges pontján át az aszimptotákkal húzott párhuzamosok és az aszimptoták által meghatározott paralelogramma területe független a pont választásától.*

Másik érdekes észrevétel adódik, ha koordináta-rendszerünket a tengelyekkel megegyező irányúnak választjuk. Ekkor a pozitív első koordinátával rendelkező ág pontjainak koordinátái $(\cosh t, \sinh t)$ koordinátákkal adhatók meg, ahol t valós paraméter. A t_1, t_2 paraméterekhez tartozó P_1, P_2 pontokat összekötő egyenes paraméteres vektoregyenlete:

$$\overrightarrow{OP} = (\cosh t_1, \sinh t_1) + \tau(\cosh t_1 - \cosh t_2, \sinh t_1 - \sinh t_2),$$

vagy a második pontot használva az egyenletben

$$\overrightarrow{OQ} = (\cosh t_2, \sinh t_2) + \rho(\cosh t_1 - \cosh t_2, \sinh t_1 - \sinh t_2).$$

Ha P az $x = y$ aszimptotának az összekötő egyenessel való metszéspontja, akkor az első egyenletből

$$\tau = \frac{\cosh t_1 - \sinh t_1}{(\sinh t_1 - \sinh t_2) - (\cosh t_1 - \cosh t_2)}$$

és

$$\overrightarrow{P_1P} = \tau(\cosh t_1 - \cosh t_2, \sinh t_1 - \sinh t_2).$$

A második felírásból azon Q pontjára az összekötő egyenesnek, mely az $x = -y$ aszimptotára esik,

$$\rho = \frac{\cosh t_2 + \sinh t_2}{-(\sinh t_1 - \sinh t_2) - (\cosh t_1 - \cosh t_2)}$$

és

$$\overrightarrow{P_2Q} = \rho(\cosh t_1 - \cosh t_2, \sinh t_1 - \sinh t_2)$$

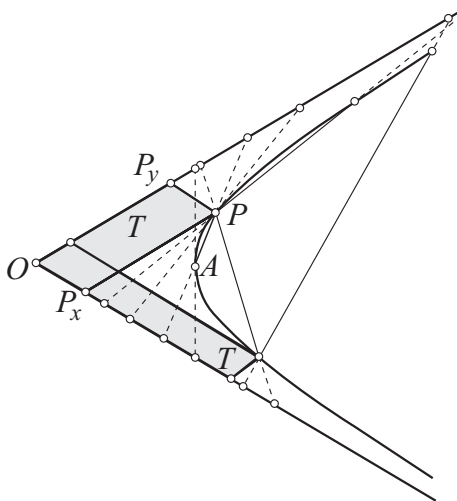
adódik. Azonban $\tau = -\rho$ mert

$$\begin{aligned} & (\cosh t_1 - \sinh t_1)[-(\sinh t_1 - \sinh t_2) - (\cosh t_1 - \cosh t_2)] = \\ & = \cosh t_1 \sinh t_2 - \sinh t_1 \cosh t_2 = \sinh(t_2 - t_1), \end{aligned}$$

míg

$$\begin{aligned} & -(\cosh t_2 + \sinh t_2)[(\sinh t_1 - \sinh t_2) - (\cosh t_1 - \cosh t_2)] = \\ & = -(\cosh t_2 \sinh t_1 - \sinh t_2 \cosh t_1) = -\sinh(t_1 - t_2) = \sinh(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

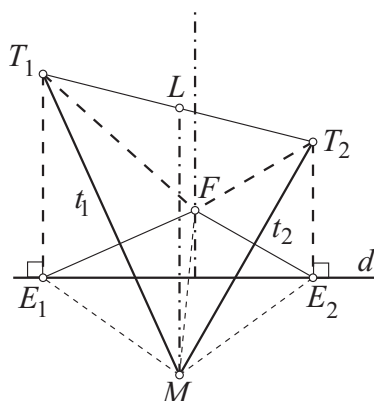
Ezért $|\overline{P_1P}| = |\overline{P_2Q}|$ azaz a *hiperbolát azonos ágán két pontban metsző egyenesnek a görbe és az aszimptoták közé eső darabjai egyenlő hosszúak*. Az állítás nyilván akkor is igaz, ha a két metszéspont különböző ágra esik, ezt is hasonlóképpen ki lehet számítani. Ha a metsző egyenes érintővé egyszerűsödik az állítás a következő szintén érdekes észrevételt adja: *a hiperbola érintőjének az érintési pont és az aszimptoták közé eső darabjai egyenlő hosszúak*.



2.38. ábra. Gyorsszerkesztés hiperbolánál

Ezeket az állításokat fel lehet használni arra, hogy az aszimptoták és egy pont ismeretében további hiperbola pontokat szerkesszünk, hiszen a ponton áthaladó sugarak metsző egyeneseket határoznak meg, amelyeken a másik metszéspont az említett észrevétel alapján rögtön adódik. Ezt a szerkesztési eljárást nevezik a hiperbola *gyorsszerkesztésének*. A gyorszerkesztés a 2.38. ábrán látható.

Parabola gyorsszerkesztése



2.39. ábra. A parabolát két érintő az érintési ponttal meghatározza.

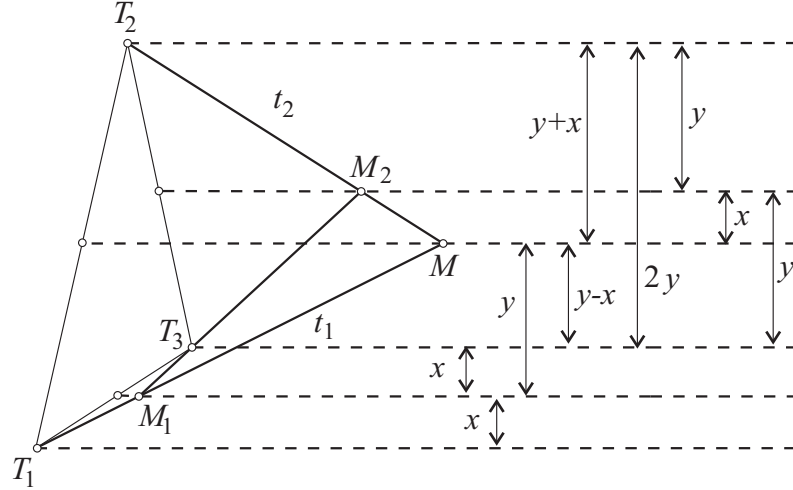
A parabolák affin osztálya igazából hasonlósági osztály, igaz ugyanis, *hogy tetszőleges két parabola hasonló egymással*. Tekintsük ugyanis a meghatározó adataikat. Nyilván a sík alkalmas eltolásával elérhető, hogy a két fókusz megegyezzen. Ezután az egyik tengely a közös fókusz körüli forgatással a másikba vihető. Végül a fókuszról mint középpontból való alkalmas nyújtás az egyik vezéregyenest a másikba viszi. Az utolsó lépés hasonlóság az első kettő egybevágóság így a leképezések szorzata hasonlóság.

Igen fontos volt a projektív részben kimutatott következő állítás: *a parabola két érintőjének a metszéspontját összekötve az érintési pontok által meghatározott szakasz felezőpontjával, a tengellyel párhuzamos egyeneshez jutunk*. Ezt közvetlenül is könnyen beláthatjuk (lásd a 2.39. ábrát).

Legyen a két érintő t_1 és t_2 az érintési pontok T_1 és T_2 . A két érintő metszéspontja M az érintési pontokat összekötő szakasz felezőpontja L . Az M pont egyenlő távol van a két érintőhöz tartozó ellenpontoktól, mert ezen közös távolság éppen a fókuszról mért távolság az érintő egyenesek szakaszfelező merőleges volta miatt. Így az $E_1ME_2\triangle$ háromszög egyenlőszárú, ezért az M -ből induló magasság, súlyvonal is egyben. Azaz ezen egyenes párhuzamos a T_1E_1 illetve T_2E_2 egyenesekkel és azoktól egyenlő távolságra halad. Minden szakaszt felez, melynek egyik végpontja T_1E_1 -re másik végpontja T_2E_2 -re illeszkedik. Ezért tartalmazza a $\overline{T_1T_2}$ szakasz L felezőpontját is.

Ugyanezen ábra alapján leszögezhetjük: *két érintő az érintési pontokkal a parabolát egyértelműen meghatározza*. Valóban először megrajzolhatjuk az ML egyenest, mely megadja a tengely irányát. Ezután vele párhuzamosan megrajzolhatjuk a T_1E_1 illetve T_2E_2 vezérsugár egyeneseket. Ezeket az érintőjükre tükrözve két egyeneshez jutunk, mely áthalad a fókuszon, a tü-

körképek metszéspontja tehát F . F -t tükrözve az érintőkre adódik E_1 illetve E_2 és így a vezéregyenes is.

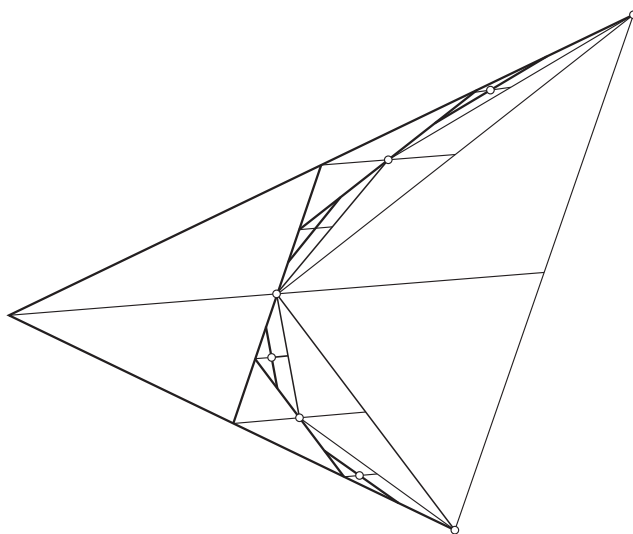


2.40. ábra. Három érintő viszonya parabolánál.

Láttuk a projektív részben, hogy a két érintő bizonyos projektív pontsorainak megfelelő elemeit összekötő egyenesek adják a kúpszelet érintőit. Parabolánál ez a projektív kapcsolat affin kapcsolattá egyszerűsödik. Ennek belátásához tekintsünk egy harmadik érintőt t_3 -t. Ezen az érintési pont T_3 az előző két érintőt pedig rendre M_1 -ben illetve M_2 -ben metszi. Minden metszés és érintési ponton keresztül húzzunk egy átmérőt, ezek távolságai közötti kapcsolatokat a 2.40. ábrán követhetjük nyomon. Ha T_1 és M_1 egyenesének a távolsága x ugyanennyi M_1 és T_3 egyenesének a távolsága. Jelöljük y -al M_1 és M átmérőjének távolságát. Akkor a T_3 és M átmérők távolsága $y - x$ és M valamint T_2 távolsága $y + x$. Ezért T_3 és T_2 átmérők távolsága $2y$ így ennek fele y az M_2 és T_2 átmérők távolsága. Ekkor az MM_2 átmérők távolsága megint x , amiből kapjuk, hogy T_3 illetve M_2 átmérők távolsága megint y . A párhuzamos szelők tétele szerint

$$x : y = |\overline{T_1 M_1}| : |\overline{M_1 M}| = |\overline{M M_2}| : |\overline{M_2 T_2}| = |\overline{M_1 T_3}| : |\overline{T_3 M_2}|$$

egyenlőségek állnak fenn, azaz a harmadik érintő azonos arányban osztja az eredeti két érintő szakaszt, és ez az aránya az új érintési pont és az új metszéspontok által meghatározott két távolságnak is. Ha $x = y$ feltétellel érünk a következő egyszerű észrevételhez jutunk: a kiindulási érintési háromszögnek az érintési pontokat összekötő oldalhoz tartozó középvonala egy új érintő, melyen az érintési pont ezen középvonal felezőpontja. Ezen észrevétel adja a lehetőséget a parabolaív gyorsszerkesztésének, mely az 2.41 Ábrán látható.



2.41. ábra. A parabola gyorszerkesztése.

2.3.7. Közös fókusz, Ivory tétele

Két évszázaddal ezelőtt J.Ivory publikált egy geometriai tételt, amely hatása a fizikára azonnal nyilvánvalóvá vált. Igazolta, hogy a gravitációs erőternek egy elliptikus rétegre vonatkozó szintfelületei konfokális ellipszoidok. (Az elliptikus réteg infinitezimális réteg két koncentrikus ellipszoid között.) A mechanikában ez a tétel Newton tételének a párja (általánosítva gömbökről elliptikus rétegekre a hatást) ez azt mondja ki, hogy elliptikus rétegen belül a gravitációs potenciál konstans.

Euklideszi homogén koordinátákkal dolgozunk, az oszlopvektorok pontokat a sorvektorok egyeneseket koordinátáznak. Egy euklideszi transzformáció ekkor ‘

$$T = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alakú, ahol A egy forgatás mátrixa b pedig az eltolás vektort adja. Az *Abszolút* jelenti azon pontok mértani helyét a projektív síkon, melyekre $x^T \Omega x = 0$ teljesül az

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lineáris leképezéssel. Az x pont koordinátái kielégítik tehát az $x_1^2 + x_2^2 = 0$ egyenletet, azaz esetünkben csak egy pontot tartalmaz a $(0,0,1)^T$ homogén

koordinátákhoz tartozót. A duális forma visszahúzottja a

$$\tilde{\Phi}(u, v) = (u_1, u_2, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ahol $u = (u_1, u_2, 0)^T$ és $v = (v_1, v_2, 0)^T$ az Ω képterének elemei.

Ha valamely kúpszeletnek a fókuszai a $(0, \pm c)^T$ pontok valamely inhomogén koordinátarendszerben akkor a kúpszelet egyenlete homogén koordinátarendszerben a

$$0 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2 + \lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

egyenlet. Mivel a mátrix reguláris, a duálisa a

$$0 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} c^2 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

alakot ölti. Ebből közvetlenül látszik, hogy a konfokális kúpszeletek duálisaihoz tartozó formák az összes formák terének lineáris alterét adják. Ebben az altérben az Abszolút duálisa benne van, de az identitás duálisa nincs benne. Valóban az Abszolút duálisa a következő számolás alapján tetszőleges két konfokális kúpszelethez tartozó forma különbségeként előáll:

$$\begin{aligned} & \alpha \begin{pmatrix} c^2 + \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c^2 + \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)c^2 + (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{cases} \begin{pmatrix} c^2 + \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{ha } (\alpha + \beta) \neq 0 \\ \begin{pmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{ha } (\alpha + \beta) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2.3.2. Lemma. *Legyen adott két pont a síkon. A sík tetszőleges pontján át pontosan két kúpszelet halad át, amelyek fókuszai az adott pontok. Az egyik ellipszis a másik hiperbola, és a két kúpszelet merőlegesen metszi egymást.*

Bizonyítás: Formulánk szerint, keressük az

$$\frac{x^2}{c^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} = 1$$

egyenlet megoldásait λ -t tekintve ismeretlennek. Ez átírható a vele ekvivalens

$$0 = \lambda(c^2 + \lambda) - (c^2 + \lambda)y^2 - \lambda x^2 = \lambda^2 + \lambda(c^2 - x^2 - y^2) - c^2 y^2$$

formába. Látjuk, hogy két megoldás van, ezek rendre

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(c^2 - x^2 - y^2) \pm \sqrt{(c^2 - x^2 - y^2)^2 + 4c^2 y^2}}{2}.$$

Szorzatuk $-c^2 y^2$ negatív szám így az egyik pozitív a másik negatív. A negatív λ -hoz tartozó másik nevező pozitív, ezért az egyik megoldás ellipszis míg a másik hiperbola. Mivel a kúpszeletek fókuszai közösek, a közös pontjukban meghúzott vezérsugarak is megegyeznek, azaz a pontbeli érintők egybeesnek vagy merőlegesek egymásra. Ha különbözőek az első eset nyilván nem állhat fenn, ezért utolsó állításunk is teljesül. $\square$

A lemma következménye, hogy két konfokális ellipszis ortogonális trajektóriái, az ellipszisekkel konfokális hiperbolák.

2.3.3. Lemma. *Ha két ellipszisnek közösek a fókuszai, akkor az egyik a másikba egy olyan affinitással vihető, ahol a pontok nagytengellyel párhuzamos koordinátái a nagytengelyek, míg a kistengelyekkel párhuzamos koordinátái a kistengelyek arányában nyúlnak. Ez az affinitás a merőleges konfokális hiperboláknak az első ellipszissel való metszéspontjait a második ellipszissel való metszéspontjaiba viszi.*

Bizonyítás: A sík pontjainak koordinátái kifejezhetők a rajtuk áthaladó konfokális ellipszis $\{a, b\}$ illetve hiperbola $\{a', b'\}$ tengelyhosszaival. (Mindig kanonikus alakból indulunk ki!) A koordináták rendre:

$$x^2 = \frac{a^2 a'^2}{c^2}, \quad y^2 = \frac{b^2 b'^2}{c^2},$$

ahol a, b az ellipszis a', b' a hiperbola tengelyhosszai. Két konfokális ellipszis és közös merőleges hiperbola esetén ebből az

$$\frac{x}{X} = \frac{a}{A}, \quad \frac{y}{Y} = \frac{b}{B}$$

egyenlőségekhez jutunk igazolva az állításokat. $\square$

A lemma formulájából azonnal következik egy újabb szép összefüggés:

2.3.4. Lemma. *A sík valamely $(x, y)^T$ pontján áthaladó konfokális ellipszisre és hiperbolára fennáll az*

$$a^2 - b^2 = x^2 + y^2$$

összefüggés.

Bizonyítás: Az előző lemma formulájából

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 a'^2}{c^2} + \frac{b^2 b'^2}{c^2} = \frac{a^2(c^2 - b'^2) + (a^2 - c^2)b'^2}{c^2} = a^2 - b'^2.$$

□

Végül a síkbeli Ivory tétel:

2.3.2. Tétel. *Két konfokális kúpszeletet, másik két, az előzőekkel konfokális de rájuk merőleges kúpszelettel metszve, egy négyoldalú derékszögű (görbevonallú) négyszöghöz jutunk, mely minden oldala valamelyik kúpszelet íve. Ezen négyszög átlói egyenlő hosszúak.*

Bizonyítás: Legyen a négy metszéspont x, y, x', y' a kapcsolódó oldalak $\{x, x'\}, \{x, y\}, \{y, y'\}, \{x', y'\}$. A vizsgált távolságok négyzete ekkor:

$$\rho^2(x, y') = \langle x - y', x - y' \rangle, \quad \langle y - x', y - x' \rangle = \rho^2(x', y).$$

Az

$$\langle x - y', x - y' \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y', y' \rangle - 2\langle x, y' \rangle$$

összefüggésben

$$\langle x, y' \rangle = \langle x', y \rangle$$

a 2.3.3 Lemma szerint adódik, ugyanakkor

$$\langle x, x \rangle + \langle y', y' \rangle = (a^2 - b'^2) + (A^2 - B'^2) = \langle x', x' \rangle + \langle y, y \rangle$$

is teljesül a 2.3.4 Lemma szerint. A két egyenlőség együtt igazolja Ivory tételét. □

Az Euklideszi síkon újra fogalmazhatjuk Ivory tételét használva az affin leképezések nyelvezetét:

2.3.3. Tétel (Ivory). *Ha adott két azonos típusú konfokális kúpszelet (pld. ellipszis) akkor van egy olyan l affin leképezés, hogy ha az előzőekkel konfokális másik típusú kúpszelet (hiperbola) az első kúpszeletet metszi egy pontban, akkor a másikat is metszi, mégpedig abban a pontban, mely az első metszéspont képe az affinitásra vonatkozóan. Mindkét metszés ortogonális. Két ilyen metszéspontra x -re és y -ra, valamint az euklideszi távolságfogalomra vonatkozóan teljesül, hogy:*

$$\rho(x, l(y)) = \rho(y, l(x)).$$

2.4. Pascal



2.42. ábra. Blaise Pascal

Blaise Pascal rendkívüli elme volt. A matematikai, fizikai munkáin túl számos értékes gondolatot hagyott maga után, legismertebb műve a Gondolatok c. csodálatos munkája valószínűleg minden kor emberéhez szól, így sose fog elavulni. Egy kevésbé ismert de szintén igen érdekes munkát idézünk most, mely a matematikai gondolkozás alapjait boncolgatja. Korában és számára a matematikai gondolkozás nem vált szét a geometriai gondolkozástól, ami az egzakt tudomány egyetlen példája volt, így nem meglepő, hogy esszéjének címe: A geometriai szellem. Magyar fordításunkat a "Minor Works of Blaise Pascal" c. Harvard classics 48/3 kötet azonos c. fejezete alapján közöljük.

B. PASCAL: A GEOMETRIAI SZELLEM

O. W. WRIGHT ANGOL FORDÍTÁSA ALAPJÁN

Három alapvető módszer van az igazság tanulmányozásában: az első felfedezni **1** azt, amikor keressük; a második igazolni, amikor már birtokoljuk; és a harmadik, megkülönböztetni őt a hamistól, a vizsgálat közben.

Nem beszélek az elsőről, leginkább a másodikkal foglalkozom és ez magában **2** foglalja a harmadikat is. Ha ismerjük az igazság bizonyításának módszerét, akkor rendelkezésre áll a hamistól való megkülönböztetés lehetősége, hiszen annak eldöntéséhez, hogy az adott bizonyítás konform-e a vizsgált szabályokkal tudnunk kell, vajon pontosan bizonyítottat-e.

- 3 A geometria, ezen három módszerben egyaránt kiemelkedik, kifejti a felfedezés művészetének ismeretlen igazságait –melyet analízisnek neveznek – és annak ellenére nem haszontalan erről beszélni, hogy sok kiváló könyv született már a témában.
- 4 Azaz a megtalált igazság igazolása, és értelmezése oly módon, hogy a bizonyítás ellenállhatatlan legyen, az egyetlen, amit adni szeretnék; és ehhez csak azt a módszert van lehetőségem kifejteni, amelyet a geometria vesz észre benne; és tanít tökéletesen a példáival, mégha nem is tudja részletezni. Mivel a felfedezés művészete két fő dologból áll, az egyik a feladatok önmagában való bizonyítása, a másik a feladatok legjobb sorrendbe való rendezése. Két szakaszt fogok készíteni, az egyik tartalmazza a geometriai levezetés, azaz, a módszeres és tökéletes szemléltetés szabályait; a másik megmutatja, hogy geometriai, azaz, módszeres és teljes a sorrend: így a kettő együtt tartalmazni fogja mindazt, ami szükséges a közvetlen érveléshez az igazság bizonyításában és megkülönböztetésében. Ezt jelöltem ki írásom céljának.

5 AZ ELSŐ SZAKASZ – A geometria módszere; a rendszeres és tökéletes szemléltetés módszere.

Nem tudom annál jobban kifejteni azt az általunk megőrzendő, a szemléltetést oly meggyőzővé tevő módszert, minthogy megmagyarázom azt, ami meg van figyelve a geometriában.⁵

- 6 De először is említenem kell egy jelesebb és teljesebb módszer eszméjét, amit az emberiség soha nem tud majd alkalmazni; mert meghaladja a minket átható geometriát; és, annak ellenére, hogy lehetetlen a gyakorlatban alkalmazni, mégis valamit mondani kell róla.
- 7 Ez az igaz módszer, ami a legkiválóbb módon bizonyítana, ha lehetséges volna

⁵ Ezután a bekezdés után, zárójelek közé téve egy finomabb kézzel a következők voltak írta a kéziratba: „... inkább sikerülni fog ebben mint másban, és ezt a tudományt csak azért választottam, mert ez ismeri egyedül az érvelés szabályait, és anélkül, hogy megállna a szillogizmus szabályainál (amik olyan természetesek, hogy biztosan ismerjük őket) megáll és tartja magát a conductive indoklás módszeréhez, amiről szinte senkinek sincs tudomása, és amit nagyon előnyös ismerni, mert tapasztalatból tudjuk, hogy egyforma elmék között előbbre jut és új lendületet kap, aki megismeri a geometriát.” „Ezért szeretném geometriai példákon keresztül megmagyarázni, hogy mik azok a bizonyítások, mert a geometria szinte az egyetlen olyan emberi tudomány, ahol tévedhetetlen bizonyítások vannak, míg az összes többi tudomány a természetéből adódóan kissé zavaros, és ezt a zavart egyedül a geometriával foglalkozók tudják kitűnően megérteni.” A következő megjegyzés szerepel a kézirat margóján: „Azt, ami itt kis betűkkel van írva, egy olyan lap alá volt elrejtve, melynek szélei le voltak ragasztva a cikk kezdete felett: Nem tudom jobban kifejteni, stb.”-szerk.

alkalmazni, két alapvető dolgot jelentene: az egyik, nem használná olyan dolog jelentését, amit először ki ne fejtett volna; a másik, soha nem előlegezne meg semmilyen állítást, amely igazsága ne lenne már ismert módon igazolva; azaz, egy szóval, minden dolgot definiálna, és minden állítást igazolna. De hogy a kifejtés általam kitűzött sorrendjében haladjunk, szükséges, hogy elmondjam mit értek definíció alatt.

Egy féle definíció ismert a geometriában, amit a logikusok hívnak definíciónak, 8
tetszőleges alkalmazása neveknek olyan dolgokra, amelyek világosan ki vannak jelölve már tökéletesen ismert dolgok segítségével; és ez a definíció az egyedül, amiről én beszélek.

Az értekezés hasznossága és használhatósága érdekében tisztázni és rövidíteni 9
kell, egy név csatolásával azokat a kifejezéseket, amelyek egyébként csak több dologgal lennének kifejezhetők; amely nevet egyébként, ha van neki más jelentése, ettől a csatolás során megfosztanánk, hogy ne jelenthessen mást mint, amire mi terveztük. Egy példa:

Ha meg szeretnénk különböztetni azokat a számokat melyek kettővel oszthatóak, 10
azoktól amik nem, annak érdekében, hogy a gyakori ismétlését ennek a feltételnek elkerüljük, egy nevet csatolunk hozzájuk: Minden kettővel osztható számot, páros számnak nevezünk.

Ez egy geometriai definíció; mert miután tisztán kijelöltünk egy dolgot, neveze- 11
tesen, hogy minden neki megfelelő szám kettővel osztható, egy nevet adtunk neki megfosztva minden más jelentésétől, annak érdekében, hogy ezt a tulajdonságot kijelölje.

Úgy tűnik, hogy a definíciók tetszőlegesek, és soha nem vezetnek ellentmondás- 12
hoz; semmi sem megengedhetőbb mint bármilyen nevet választani egy dolognak, ami tisztán ki van jelölve. Egy dologra kell csak tekintettel lenni, nem adhatjuk ugyanazt a nevet két különböző dolognak.

Ez nem fordulhat elő, ha nem zavarjuk össze a következményeket, és nem ter- 13
jesztjük ki az egyiket a másikra.

Egy biztos és csalhatatlan gyógy mód segít ezen hiba elkerülésében: helyettesít- 14
sük mással a definíciót azon a helyen, ahol a dolog definiálva volt és mindenhol, ahol megjelenik, például, hogy akármikor, amikor azt mondjuk, hogy páros szám, pontosan jelentse azt, hogy két egyenlő részre bontható, és ez a két dolog olyan fokon érintkezzen és legyen elválaszthatatlan egymástól gondolatban, hogy, amint az egyiket az értekezés használja, az értelem azonnal kapcsolja össze a másikkal. Geómeterek, és mindazok számára említeném, akik módszeresen haladnak,

ahhoz, hogy rövidítsük az értekezést, csak a dolgok neveit kell említeni, és nem rövidíteni vagy változtatni a fogalmát a dolognak, amelyikről beszélünk. Ők úgy fognak tenni, mintha a gondolat tartalmazná a teljes definíciót azon rövid részekben amelyeket használnak, és elkerülik a zűrzavart, amit a szavak többszörös jelentése okoz.

- 15 Ez a módszer szükséges és önmagában is elegendő mindenféle nehézség és mellébeszélés elűzésére, és nincs nála hatékonyabb a szofisták gáncsoskodó szörzéseinek elkerüléséhez.
- 16 Ezek a dolgok jól érthetők, visszatérek azon eredeti gondolat kifejtéséhez, amelyik minden dolog definiálását és minden dolog bizonyítását tartalmazza.
- 17 Ez a módszer bizonyosan csodálatos, de abszolút lehetetlen; nyilvánvaló, hogy az első fogalmak, amelyeket definiálni szeretnénk magukba foglalnak előzményeket, amiket alkalmazni fogunk a kifejtésük során, és hasonlóképpen, az első állítás amit bizonyítani akarunk magába foglal másokat, amelyek megelőzik őket; eképpen világos, hogy soha sem érhetjük el az elsőt.
- 18 Így, haladva kutatásunkban tovább és tovább, szükségképpen megérkezünk olyan primitív szavakhoz, melyeket nem tudunk tovább definiálni, és olyan elvekhez, amelyek olyan tiszták, hogy nem találunk továbbiakat, amelyek szolgáltatnának ezek bizonyítását.
- 19 Ezért úgy tűnik az ember természetesen és megváltoztathatatlanul képtelen bármely tudományt egy abszolút teljes rendbe gyűjteni.
- 20 De ebből nem következik, hogy el kéne vetnünk minden rendet.
- 21 Van egy, a geometriáé, amelyik az igazság dolgában kevesebb, azaz kevésbé meggyőző, de nem kevésbé bizonyos. Nem definiál minden dolgot és nem bizonyít minden dolgot, és ez az, amiben alábbvaló; de csak a tiszta és a természetes világosságukban állandó, és ezért a tökéletesen igaz, a természet által a beszélgetés alapértelmezésének fenntartott dolgokat teszi fel.
- 22 Ez a rend, tökéletes bárkinek, aki nem tartozik azok közé, akik minden dolgot definiálnak vagy igazolnak, de olyanok közé sem akik semmilyen dolgot nem definiálnak és igazolnak, hanem megmaradnak a középúton, nem definiálva semmit, ami kellőképpen nem világos és alátámasztott minden ember számára, és a többi definiálják; nem bizonyítanak mindent, ami az emberiség számára ismert, de bizonyítják mindazt, ami ezentúl megmarad. A rend ellen az követ el bűnt, aki mindent definiál és mindent bizonyít, és aki elmulasztja ezt tenni azon dolgokkal, amelyek önmagukban nem nyilvánvalóak.

Ez az amit tökéletesen tanít a geometria. Nem definiálja a tér, idő, mozgás, szám, egyenlőség fogalmát, és hasonló dolgokat, amelyek nagy számban léteznek, mert ezen kifejezések olyan természetesen illeszkednek az általuk jelentett dolgokhoz a nyelvet ismerő számára, hogy az értelmezésük nagyobb homályt adna mint útmutatást.

Nincs annál rosszabb mint egy beszélgetés azokkal, akik ezeket a primitív szavakat akarják definiálni. Mi szükség arra, például, hogy kifejtsük mit jelent az ember szó? Nem eléggé ismerjük azt a dolgot, amit szerettünk volna kijelölni ezzel a kifejezéssel? És miféle előnyt gondolt Platón szerezni nekünk, amikor azt mondta, hogy ő egy kétlábú állat szárnyak nélkül? Mintha a gondolat, ami természetes nekem, de nem tudom kifejezni, nem lenne tisztább és biztosabb mint az a használhatatlan és nevetséges kifejtés, amit ő adott; hiszen egy ember elveszítve két lábát nem veszti még el ember mivoltát, ahogy egy kappan sem válik emberré azáltal ha elveszíti a szárnyait.

Ők azok, akik elegendően abszurdak ahhoz, hogy kifejtsenek egy szót saját magával. Tudom, hogy van aki a fényt ezen „bölcseességgel” definiálja: A fény egy világító test térvilágító mozgása. Mintha értenénk a térvilágítás és világító szavakat a fény szó ismerete nélkül! ⁶

Nem tudjuk meghatározni az élőlényt, anélkül, hogy bele ne esnénk ugyanebbe az abszurdításba: ehhez a fogalomhoz nem tudunk definiálni egy szót anélkül, hogy ne kezdjük saját magával, és így ne alkalmazzunk a szó definícióját magában a definícióban.

Világosan láthatjuk ebből, hogy vannak nem definiálható szavak; és; ha a természet nem szolgáltatott volna egy megfelelő gondolatot, amely az egész emberiség számára adott, minden kifejezésünk ellentmondó lenne; amíg ugyanazzal a természetességgel és bizonyossággal használjuk őket, ahogy gondoljuk, megmagyarázottak lesznek, tökéletesen mentesen a félreértésektől; mivel a természet szavak nélkül is megadja világosabb ismeretüket, mint ahogy a tudomány képes lenne azt az értelmezéseink nyomán.

Nem azért gondolják ugyanazt az emberek a dolgok lényegéről mert én azt

⁶ Pascal itt egy Jezsuita pap, Noël Atya szavaira utal, amelyeket ebben a témában az „Expériences touchant le vide” c. munkájában fejtett ki. 1647-ben ezt írja Noël Atyának: „A záró szavakat megelőző mondatban a következő módon definiálja a fényt: A fény egy világító test térvilágító mozgása; erről, az a véleményem, hogy először definiálni kell azt, hogy mi a térvilágítás és a világító test, és amíg ez nem történik meg én nem értem mi a fény. Különben is mi sohasem használjuk fel definícióinkban a definiált dolgot, nagy nehézséget okoz nekem, hogy egyetértsek önnel, amikor azt állítja: A fény egy világító test térvilágító mozgása.” – szerk.

mondom, hogy lehetetlen és haszontalan definiálni.

- 29 Például az idő ilyen fogalom. Ki tudja definiálni? És miért kéne magyarázni hiszen minden ember tudja mit jelent a beszédben az idő, további definíció nélkül is. Mégis számtalan különböző vélemény érinti az idő lényegét. Néhányan azt mondják, ez a teremtett dolgok mozgása; mások, a mértéke a mozgásnak, stb. De ez a dolgoknak nem azon természete, amire én azt mondom, hogy mindenki számára ismert; ez egyszerűen a kapcsolat a név és a dolog között; azaz az idő kifejezés, mindenki gondolataiban közvetlenül ugyanarra az objektumra mutat; amit maga a kifejezés elegendően indokol, nem szükséges, hogy definiálva legyen, bár azután, megvizsgálva mi az idő, eltérő nézetekhez vezetnek a róla való gondolataink; definíció során csak kijelölünk dolgokat hogy elnevezzük őket, és nem mutatjuk meg a természetüket.
- 30 Nem azért engedhető meg az idő elnevezéssel illetni a teremtett dolgok mozgását mert azt mondtam, hanem mert nem egyéb ez mint definíció.
- 31 De ezután a definíció után lesz két dolog, amit az idő elnevezéssel illetünk: az egyik az, amit az egész világ ért rajta természetesen mindazok, akik a mi nyelvünkön beszélve használják ezt a fogalmat; a másik a teremtett dolgok mozgása, mivel ezt is jelenti ez a név az új definícióval egyetértésben.
- 32 Eképpen szükséges elkerülni a kétértelműséget és nem összezavarni a következményeket. Így nem következik, hogy a dolog, amit természetesen érteni szoktunk az idő szó alatt ténylegesen a teremtett dolgok mozgása. Csak el van látva két dolog ugyanazzal a névvel; de nem kell a természetben azonosítani őket úgy mint a nevüket.
- 33 Így ha azt állítjuk, hogy *az idő a teremtett dolgok mozgása*, szükséges megkérdezni mit is jelent az idő szó, azaz, vajon a szokásos és általában elfogadott jelentését meghagytuk neki, vagy megfosztottuk ettől, azért, hogy adni lehessen számára ezen az alapon azt, hogy egy teremtett dolog mozgása. Ha minden más jelentés le van róla vetköztetve, nem tud ellentmondást adni, és egy tetszőleges definícióvá válik, amely következményeiben, ahogy mondtam, nem lesz két dolog, aminek ugyanaz a neve. De ha az eredeti jelentését is megtartjuk, és úgy teszünk mintha, amit ezzel a szóval jelöltünk az a teremtett dolgok mozgása lenne, akkor ellentmondáshoz juthatunk. Ez továbbá nem egy egyszerű definíció, hanem egy állítás, ami igazolásra szorul, ha nem evidens magában; és axiómává, vagy alapelvvé válik, de sohase lesz definíció, mivel ebben a kijelentésben nincs megmagyarázva, hogy az idő szó ugyanazt a dolgot jelzi-e mint a *teremtett dolgok mozgása*, hanem magától értedődőnek tekintjük, hogy az idő kifejezés ez a bizonyos mozgás.

Ha nem tudtam, hogyan lehet, az olyan dolgokat, amelyről a példát adtam tökéletesen megérteni, és indokolni, akár bizalmas akár tudományos értekezésekben, nem hagyott nyugodni. De úgy tűnik számomra, azon tapasztalat alapján, amit a viták zűrzavara adott, hogy nem tudunk teljességgel eljutni ide, ez a szelleme a precizitásnak inkább annak az értekezésnek az érdekében van, amit írok, mint azon tartalom érdekében, amit feldolgozok benne.

Hány személy van, aki azt képzei, ha elhagyja annak eredeti jelentését, definiálhatja az időt azt mondván az idő a mozgás mértéke! Ennek ellenére egy állítást gyártott nem egy definíciót. Hányan vannak, ugyanígy, akik úgy gondolják definiálták a mozgást, amikor ezt mondták: *Motus nec simpliciter motus, non mera potentia est, sed actus entis in potentia!* És ennek ellenére, ha elhagyják a mozgás szó eredeti jelentését, ahogy ezt csinálják, ez nem egy definíció hanem egy állítás; és zavart okoz eképpen azon definíciókban amiket a dolgok elnevezésére használnak. Ezek pedig az igazi megengedhető és geometriai definíciók, amelyek, tulajdonképpen, a továbbiakban nem tetszőleges definíciók, hanem ki vannak téve az ellentmondásnak. Tartják magukat ahhoz, hogy szabadon tehetik ezt, mint mások; és mindenki definiálja ugyanazt a dolgot a saját módján, a személyes szabadság alapján. Ez ugyanúgy eléggé el nem ítéhető a definiálás módjában, mintahogy megengedhető a korábbi módon. Ők összezavarnak mindent, és elveszítenek minden rendet és fényt, elveszítve saját magukat barangolva a bonyolult akadályok között.

Sohasem fogunk ebbe a hibába esni ha a geometria rendjét követjük. Ez az értelmes tudomány igen messze áll attól, hogy olyan primitív szavakat definiáljon mint tér, idő, mozgás, egyenlőség, többség, kisebbség, egész, és másokat, amelyeket mindenki ért. De ezeken kívül, a maradék kifejezéseket amelyeket alkalmaz, olyan szinten tisztázza és definiálja, hogy nincs szükségünk szótárra megérteni bármelyiket is közülük; azaz ezen kifejezések összes szava tökéletesen érthető, természetes fényében is és a neki adott definíció alapján is.

A módszer, ami segít elkerülni azokat a hibákat, amelyeket felvázoltunk az első pontban, abban áll, hogy csak azokat a dolgokat definiáljuk, amelyek szükségesek. Ezt ugyanazon a módon teszi a módszer a másik pontra vonatkozóan is, csak a nem evidens állításokat bizonyítja.

Amikor eljut az első ismert igazságokig, elidőzik ott, és megkérdezi, vajon ezek csatolhatók-e, nincs-e semmi világosabb tény, ami ezeket már bizonyítja; azaz mindaz ami a geometria által javasolt, tökéletesen igazolt, vagy saját természetes fényében vagy valamilyen bizonyítás által.

Eképpen adódik, hogy ha ez a tudomány nem definiál vagy igazol mindent,

annak az az egyszerű oka, hogy ez nem lehetséges.⁷

- 40 Különösnek találhatjuk, hogy a geometria nem definiál minden dolgot a saját alapvető objektumairól; sem a mozgást, sem a számokat, sem a teret nem tudja definiálni; és egyébként ez a három dolog az, amit feldolgoz speciálisan, tekintettel azokra a vizsgálatokra, amelyeket a három különböző név takar, mechanika, aritmetika és geometria, ez az utolsó név tartozik a fajhoz és a fajtához.
- 41 Nem meglepő, ha megjegyezzük, ez a csodálatos tudomány csak a legegyszerűbb dolgokat csatolja magához, ugyanazt a minőséget mutatja fel abban, hogy mi méltó a tárgyának lenni, mint abban, hogy mit nem tud definiálni; azaz a definíció törvénye inkább egy tökéletesítés mint egy hiányosság, mivel nem a bizonytalanságból jön, hanem ellenkezőleg a szélsőséges nyilvánvalóságából, amelyik olyan, hogy habár nem lehet meggyőzően igazolni, de teljesen bizonyos. Felteszi tehát, hogy mi tudjuk mi az a dolog, amit mi tanulmányozunk a mozgás, szám, tér szavak alapján; és anélkül, hogy megállna definiálni őket, áthatol a természetükön és felfedezi a bámulatos tulajdonságaikat.
- 42 Az a három dolog, amely a "*Deus fecit omnia in pondere, in numero, et mensura*"⁸ mondásnak megfelelően magában hordozza az univerzumot, fordított és szükségszerű kapcsolatban áll egymással. Nem tudunk elképzelni mozgást valami mozgó objektum nélkül; ez a két dolog egy, ez az egység a számok eredete; végül, a mozgás nem képzelhető el tér nélkül, látjuk tehát, hogy mindhárom dolog benn foglaltatik az elsőben.
- 43 Az idő szintén benne van; a mozgás és az idő kapcsolódnak egymáshoz; gyorsulásnak és lassulásnak, melyek a mozgás differenciái, szükségszerűen szintén kapcsolata van az idővel.
- 44 Így vannak közös tulajdonságai ezen dolgoknak, ezek tudása nyitja meg az elmét a természet legnagyobb csodái felé.
- 45 A legfontosabb ezekben a mindenben keveredő végletek: a nagyság illetve a kicsiség, felfogása.
- 46 Habár egy mozgás lehet gyors, el tudunk képzelni egy gyorsabbat is, és így a végtelenségig, anélkül, hogy valaha elérjünk a gyorsaság egy olyan mértékéig, amihez többet ne lehetne hozzátenni. És fordítva, habár lehet egy mozgás lassú, még jobban vissza lehet tartani; végtelenségig, anélkül, hogy elérnénk a lassúság

⁷ Ide a kéziratban zárójelek közé ez került: „(A természet úgy bünteti a tudományokat, hogy nem adományoz az igazság elérése érdekében emberfeletti tökéletességet, csak mindazt adja, amit az ember el tud érni. Úgy tűnik nekem ez adatott valójában ezen diskurzus kezdetétől fogva, stb...)”–szerk.

⁸ „Isten teremtett mindent annak súlyában, számában és arányában.”

egy olyan fokára, amit nem lehetne csökkenteni végtelen sok másikra, a meglevők alá.

Ugyanezen a módon, ha van egy nagy számunk, el tudunk képzelni nagyobbat; 47 a végtelenségig, anélkül, hogy ne tudnánk tovább növelni. És fordítva, habár egy szám lehet kicsi, a század vagy tízezred részét is el tudjuk képzelni ennek a kicsiségnek; és így tovább a végtelenségig, anélkül, hogy elérnénk a nullát vagy a semmit.

Bár egy tér lehet nagy, el tudunk képzelni egy nagyobbat; a végtelenségig, anél- 48 kül, hogy megérkeznénk egybe, amelyet tovább nem lehet növelni. És, fordítva, habár, egy tér lehet kicsi, el tudunk képzelni egy kisebbet; a végtelenségig, anélkül, hogy elérnénk egy láthatatlanba, aminek nincs semmilyen kiterjedése.

Ugyanez a helyzet az idővel. Mindig el tudunk képzelni egy nagyobb időtartamot 49 egy végső nélkül, és egy kisebbet egy ponthoz vagy a tiszta semmi időtartamhoz való megérkezés nélkül.

Azaz, egy szóval, bármi lehet a mozgás, a szám, a tér, az idő, mindig van nagyobb 50 és kisebb: így valamennyien a semmi és a végtelen között állnak, végtelen távol ezen szélsőségektől.

Ezek az igazságok nem bizonyíthatóak; és mégis ők az alapjai és elvei a geomet- 51 riának. De ahogy nem a homályosságuk az oka, hogy alkalmatlanok arra hogy bizonyítást rendeljünk hozzájuk, hanem ellenkezőleg az ő szélsőséges nyilvánvalóságuk, úgy a bizonyítás hiánya nem hiányosság, hanem inkább tökéletesség.

Ebből látjuk, hogy ha a geometria nem tud definiálni objektumokat vagy bizo- 52 nyítani bizonyos elveket; annak az egyetlen és nyilvánvaló oka, hogy mindkettő szélsőségesen természetes világossággal bír, mely erőteljesebben meggyőző mint bármely beszélgetés.

Mi evidensebb, mint annak az igazsága, hogy bármi is egy szám meg tudjuk 53 növelni - meg tudjuk kétszerezni? Ugyanígy, nem lehet egy mozgás sebességét kétszeresére növelni, és nem lehet egy teret hasonlóképpen megkétszerezni?

És aki meg tud kétszerezni egy számot, bármi is az, nem tudja azt megfelezni, 54 és a felét szintén megfelezni? Ezen két fél vajon a semmi lenne? És véve ezt a két felet, mely két nullát adna, visszadja-e az összegük az eredeti számot?

Hasonlóképpen, lehet-e egy mozgás, olyan lassú, ha megfelezzük a sebességét, 55 úgy, hogy ugyanazon a téren kétszeres idő alatt halad keresztül, akkor ez az utolsó leglassúbb mozgás? Ez lenne a tökéletes maradék? És vajon ezen két fele

a sebességnek, amely a két maradékot adná, előállítaná ismét az első sebességet?

- 56 Végül, lehet-e egy tér olyan kicsi, hogy két részre osztva a kapott felek kiterjedés nélküliek legyenek? És ezen kiterjedés nélküli feleket össze lehet-e illeszteni úgy, hogy az eredeti kiterjedést adják?
- 57 Nincs oly természetes ismeret az emberiségben, ami ezt megelőzné, vagy felülmúlná világosságban. Mindazonáltal, amiatt, hogy lehetnek példák mindenre, találunk minden egyéb dologban amúgy kiváló elméket, melyeket sokkoltak ezek a végtelenek, és semmiképpen sem tudták ezeket elfogadni.
- 58 Sohasem ismertem olyan személyt, aki úgy gondolta, hogy egy tér nem növelhető. Bár láttam néhányat, más tekintetben igen jó képességűt, aki állította, hogy a tér felbontható két oszthatatlan részre, bár számomra ez elég abszurd gondolat.
- 59 Annak vizsgálatára szorítottam magam, hogy mi az oka ennek a homályosságnak, és azt találtam, hogy főképpen abból állt ez, hogy ők nem tudták elképzelni a folytonosságát a felbonthatóságnak a végtelenben, eképpen azt a konklúziót vonták le, hogy felbonthatatlan.
- 60 Az ember természetes fogytékossága az a hit, hogy közvetlenül rendelkezik az igazsággal; ebből azonnal következik, hogy mindig hajlandó tagadni azokat a dolgokat, amik érthetetlenek számára; miközben valójában tudja, hogy ez természetes nem más mint hazugság, és csak azoknak a dolgoknak az ellenkezőjét kell elfogadnia igaznak, amelyeket hamisnak tartott.
- 61 Eképpen, amikor egy állítás hihetetlen, szükséges felfüggeszteni róla az ítéletet, és nem pedig tagadni ezen jelzés alapján, hanem megvizsgálni az ellentétét; és ha azt találjuk, hogy az nyilvánvalóan hamis, merészen erősítsük meg az eredetit, még ha érthetetlennek is tűnik. Alkalmazzuk ezt a szabályt most is.
- 62 Nincs olyan géométer, aki nem hinné el, hogy a tér végtelenségig osztható. Enélkül az elv nélkül a géométer nem lehetne több, mintha az ember lélek nélkül létezne. Ennek ellenére senki sincs aki érti a végtelen felbonthatóságot; és a géométer csak egy, bár kétségtelenül elegendő okot tud ennek igazolására, tökéletesen egyetért avval, hogy ha hamis lenne, akkor fel lehetne bontani a teret felbonthatatlan, kiterjedés nélküli részekre.
- 63 Mert mi abszurdabb annál, mint folytatni a tér felbontását addig, míg kapunk egy olyan darabot, amelyet két részre bontva, mindkét rész kiterjedés nélküli felbonthatatlan lesz, és ez a két kiterjedés nélküli együtt kiterjedést adjon? Meg kell kérdeznem azokat, akik ezt gondolják, hogy vajon világosan látják-e a kapott

felbonthatatlanok érintkezési részét; ha ez kiadja az egészet, akkor ez csak egy dolog, és a kettő együtt is felbonthatatlan; ha azonban nem az egész, akkor vannak részei a daraboknak, tehát nem felbonthatatlanok.

Ha bevallják, márpedig tény, hogy nyomás alatt elismerik, hogy állításuk ugyan- 64
olyan hihetetlen, mint a másik, azt is elismerik, hogy a mi képességeinkkel nem
lehet ezen dolog igazságát eldönteni, hiszen mindkét állítás hihetetlen, de az
egyiknek igaznak kell lennie.

De a képzeletbeli nehézségekkel, amelyek csak a mi gyengeségünkkel kapcsola- 65
tosak, szemben áll egy természetes tisztaság és a következő szilárd igazságok: ha
igaz lenne, hogy a tér bizonyos véges számú felbonthatatlan együttese lenne, az
is következne, hogy véve két teret, amelyek mindegyike négyzet, azaz, egyenlő és
hasonló minden oldalon, és az egyik a kétszerese a másiknak, akkor az első ezek
közül kétszer annyi felbonthatatlant tartalmazna mint a másik. Tartsuk ezt a
következményt is szem előtt, és alkalmazzuk a négyzetekben levő pontok számí-
tására addig amíg két négyzetet nem kapunk, az egyikben kétszer annyi pont lesz
mint a másikban; és, ahogy én is, ezt a világ minden geométere megcsinálhatja.
De ha a dolog természetes módon lehetetlen, azaz áthidalhatatlan lehetetlensé-
get jelent megadni pontok két olyan négyzetét, melyek közül az egyikben kétszer
annyi pont van mint a másikban, el kéne időznünk itt annyira, amennyira a dolog
megérdemli, és le kéne vonnunk belőle a megfelelő következtetést.

Látva, hogy a tér végtelen osztása kis idő alatt történik meg, bizonyos előíté- 66
letekből származó bajokat feloldhatunk, ha figyelmeztetjük az embereket arra,
hogy nem szabad arányíthatatlan dolgokat hasonlítani, amint a végtelen oszttha-
tóságot a kicsi idővel, ami alatt végrehajtható; ellenkezőleg az egész teret a teljes
idővel, és a végtelen oszthatóságot az idő végtelen kicsi pillanatával. Ekkor azt
fogják találni, hogy egy végtelen kicsi pillanat alatt elvégezték a végtelen felbon-
tást és a kis teret hasonlíthatjuk a kis idővel. Ebben nincs már meg a meglepő
aránytalanság.

Végül, ha meglepi a kétkedőket, hogy egy kis térnek ugyanannyi része van mint 67
egy nagynak, magyarázzuk meg, hogy azok a részek is kisebbek mértékben, és
ezzel az ismerettel való barátkozáshoz, nézzék az égboltot egy kicsinyítő üvegen
keresztül, az ég minden részét az üveg megfelelő részének tekintve.

Ha nem tudják felfogni, hogy a részek olyan kicsik, hogy számunkra észrevehe- 68
tetlenek, tovább oszthatunk, ahogy az égbolt esetén is; nincs jobb orvoslás, mint
átnézetni őket egy olyan üvegen, mely kinagyítja a kényes pontot egy óriási tö-
meggé; eképpen könnyen elképzelhetik, hogy egy még művészből vágott üveg
segítségével, felnagyíthatóak olyannyira, hogy az égbolt általuk csodált kiterje-
désével egyenlők lesznek. Eképpen ezek az objektumok, amelyek megjelentek,

könnyen oszthatók, emlékeztetvén arra, hogy a természet végtelenül több mint a művészet.

- 69** Végülis, ki győzi meg őket arról, hogy ezek a nagyító üvegek változtatják meg a természetes méretét az objektumoknak, ahelyett, hogy éppen ellenkezőleg, helyreállítanak az igazi méreteket, melyeket a szemünk megváltoztat és mint egy kicsinyítő üveg csökkent?
- 70** Bosszantó, hogy ilyen apróságoknál időznünk kell; de kell, hogy legyen idő a csekélységekre is.
- 71** Elegendő azt mondani a kérdés megvilágításához, hogy két kiterjedés nélküli nem alkothat kiterjedést. De vannak, akik a következő csodálatos válasszal térnek ki ezen fény elől, két kiterjedés nélküli tud kiterjedést létrehozni, ahogy két egység, amelyek egyike sem szám, létre tud hozni egy számot a kombinációjával; erre azt kell válaszolni nekik, hogy ugyanígy azt is mondhatnák, hogy húszezer ember hadsereget alkot, bár közülük egyik sem egy hadsereg; vagy hogy ezer ház egy város, bár nincs közülük egy sem, ami város lenne; vagy a részek adják az egészet, bár nincs egy sem, ami az egész lenne; vagy, megmaradva a számoknál, hogy két bináris adhat egy quaternálisat, és tíz tízes egy százast, bár közülük egyik sem az.
- 72** De ez nem helyes gondolat, hiszen összekeveri egyenlőtlen dolgok összehasonlításával a dolgok megváltoztathatatlan természetét, az esetleges és önkéntes nevekkel, amelyek azon emberek szeszélyeitől függnék, akik kitalálták őket. Világos, hogy a beszéd megkönnyítése érdekében nevezünk húszezer embert hadseregeknek, városnak egy csomó házat, ahogy tízesenként egy egységet; és ebből a szabadságból születnek az egység, bináris, ternáris, tízes, százaz különböző elnevezések, a mi szeszélyeinkből, bár ezek a dolgok, tény, hogy azonos típusúak a megváltoztathatatlan természetük alapján, arányosak egymással és csak abban különböznek egymástól, hogy az egyik kisebb a másik nagyobb, és bár, a nevek eredményeként, bináris nem lehet ternáris, ugyanúgy, ahogy a ház nem város, sőt mitöbb a város sem ház. De ismét, habár egy ház nem a város, azonban nem is a város tagadása; nagy a különbség a két kijelentés között, hogy "valami nem egy dolog", és "valami a dolog tagadása".
- 73** A fentiek megértése érdekében, szükséges ismerni azt, hogy az egyetlen ok amiért az egység nincs a számok között az, hogy Euklidész és az aritmetikával foglalkozó korábbi szerzők, számtalan tulajdonságot adtak, mely alkalmazható volt minden ettől különböző számra, ezért, hogy ne kelljen gyakran ismételtetni azt, hogy minden számra teljesül a feltétel az egység kivételével, kizárták az egységet a számok közül, azzal a szabadsággal, amivel mi élni szoktunk valami definiálása során. Eképpen ha kívánnák, ugyanígy kizárhatnánk a bináris vagy

ternáris, és az összes egyéb általuk óhajtott kifejezést; mivel mi vagyunk a megalkotói ezen kifejezéseknek, mi jegyezzük fel őket; fordítva ha nekünk úgy tetszik helyet adunk az egységnek a számok között és a törteknek ugyanígy. Tény, hogy általános állításokban ezt kell tennünk ahhoz, hogy az általunk említett és nem definiáltnak tartott tulajdonságokat folyamatosan elkerülhessük.

De Euklidész, aki elnevezésében kizárta az egyet a számok közül, annak megér- 74
tetése végett, hogy mindazonáltal ez nem tagadása az egy szám tulajdonságának, hanem ellenkezőleg ugyanazon fajhoz tartozik mint a számok, definiálja az egynemű(homogén) terjedelmeket: Két terjedelem fajtája ugyanolyan, ha az egyik számos alkalommal való sokszorozásával meg tudja haladni a másikat; és következésképpen, mivel az egység sokszorosa, meg tud haladni tetszőleges számot, így azon Euklidész véleménye szerint, aki nem hívta számnak, lényegénél és a megváltoztathatatlan természeténél fogva az egy ugyanolyan fajú nagyság mint a számok.

Ez nem ugyanaz a dolog mint a kiterjedésre vonatkozó felbonthatatlanság. Nem 75
csak a nevében különbözik, mely önkényes, de a fenti meghatározás szerinti típusában is különbözik; mivel egy felbonthatlant akárhányszor megsokszorozva is, nagyon messze lesz attól, hogy meghaladjon egy kiterjedést, mivel ez sosem tud semmi mást alkotni mint egy egyedülálló és kizárólagos oszthatatlant; amely természetes és szükségszerű, mintahogy ezt már megmutattuk. Mivel ezen utóbbi bizonyítás az oszthatatlan és kiterjedés definícióin alapul, ezekkel folytatjuk a bizonyítás befejezését és tökéletesítését.

Oszthatatlan az, aminek nincs része, és kiterjedés az, aminek többféle elkülönülő 76
része van.

Ezekre a definíciókra tekintettel, állítom, hogy két oszthatatlan egyesítése nem 77
ad kiterjedést.

Amikor őket egyesítjük, érintkeznek néhány részben; eképpen részek jönnek 78
létre, amelyek nem különállóak, mivel különben nem érintkezhetnének. Most, a definíciójuk alapján, más részük nincs; ezért nem kiterjedés a kiterjedés definíciója alapján, mely megköveteli, hogy a részek különállóak legyenek.

Ugyanezen okból, ugyanez mutatható ki minden más oszthatatlan esetén mely 79
összeillesztéssel keletkezett. Következésképpen egy oszthatatlant, akárhányszor sokszorozhatunk nem fog kiterjedést adni. Azaz az oszthatatlan nem azonos fajú nagyság mint a kiterjedés, az azonos fajúság definíciója szerint.

Ezen a módon mutatjuk ki, hogy az oszthatatlan nem azonos fajú mint a számok. 80
Eképpen adódik, hogy két egység valóban egy számot ad, mert azonos fajúak;

és két oszthatatlan nem ad egy kiterjedést, mert nem azonos fajúak.

- 81 Eképpen látjuk azt is, hogy egy kis hasonlóság azért van az egység és számok kapcsolata és az oszthatatlan és kiterjedés kapcsolata között.
- 82 De ha a számokban szeretnénk olyan összehasonlítást tenni, ami pontosan reprezentálja a kiterjedésben tekintetteket, akkor a nulla és a számok közötti relációt kell tekinteni; a nulla nem azonos fajú a számokkal, mivel sokszorozva sem tudja meghaladni őket: ez az igazi oszthatatlan a számok között, mintahogy az oszthatatlan az igazi nulla a kiterjedésben. És hasonló dolgot találunk a nyugalom és mozgás, a pillanat és az idő között; ezek a dolgok mind eltérő fajúak a nagyságukban, mert végtelenszer sokszorozva sem adhatnak semmi mást mint oszthatatlant, mint a kiterjedés oszthatatlanja esetében, ugyanabból az okból kifolyólag. Találtunk egy tökéletes megfeleltetést ezen dolgok között; ezek a terjedelmek végtelenségig oszthatók, anélkül, hogy valaha oszthatatlannak ká válnának, eképpen mindig egy közbeeső helyen vannak a végtelen és a semmi között.
- 83 Ilyen ez a csodálatos kapcsolat, amit a természet felállított ezen dolgok és a csodálatos végtelenek között, és javasolt az emberiség számára, nem megérteni, hanem megcsodálni. Ennek a vizsgálatnak a befejezéséhez egy végső megjegyzést kapcsolnánk a végtelenekhez, bár végtelenül különböznek, annak ellenére kapcsolódnak egymáshoz, egy oly módon hogy az egyik ismerete szükségszerűen elvezet a másik ismeretéhez.
- 84 A számok esetében, amennyiben azok folytonosan bővíthetők, tökéletesen és világosan következik, hogy folytonosan csökkenthetők is; ha egy szám szorozható 100000-el, például, a 100000-ik része szintén megkapható belőle, osztva ugyanazzal a számmal, amivel szoroztatott; eképpen minden tagja a növelésnek egy tagjává válik az osztásnak, kicserélve az egészeket törtekre. Így a végtelen növelés tartalmazza a végtelen csökkentést is.
- 85 A térben ugyanez a kapcsolat látható a két ellenkező végtelen között; azaz, ha egy tér végtelenül kiterjeszthető, akkor végtelenül csökkenthető is, ahogy ezt a következő példában alkalmazzuk: Ha távcsövön keresztül nézzük egy egyenes vonalon haladó hajó összehúzódását, nyilvánvaló, hogy minden pontja a megfigyelt hajónak folyamatosan halad egy állandó áramlás szerint, mely a hajó összehúzódásával arányos. Ezért ha a hajó menetét a végtelenségig kiterjesztjük, ez a pont folytonosan összehúzódik; és sohasem fogja elérni azt a pontot a horizonton, amelybe a szemünkből induló a távcsövön keresztül haladó sugár érkezik, azaz folytonosan megközelíti azt anélkül, hogy elérné, szüntelenül felosztva azon teret, amely megmarad a horizont pont és a soha meg nem érkező pont között. Ebből látható az a szükségszerű következmény, hogy kapcsolat van a hajó mozgásának

végtelemben való kiterjesztése által definiált és horizont pontig megmaradt kis tér végtelen kicsi osztása során adódó végtelen fogalmak között.

Akiket nem elégítenek ki ezek az okok, és fenntartják azt a hitüket, hogy a tér 86 nem osztható végtelenségig, nem igénylik a geometriai bizonyítást, és habár lehet, hogy felvilágosultak egyéb dolgokban, nagyon elmaradtak ebben; könnyen lehet valaki egy nagyon tehetséges ember és rossz geométer egyszerre.

De azok, akik világosan látják ezeket az igazságokat, képesek lesznek megcsodálni a természet pompáját és erejét ebben kettős végtelenben, mely minden oldalról körül vesz minket, és képesek lesznek tanulni és megismerni magukat azzal a csodálatos figyelemmel, amely magunk vonatkozásában elhelyezkedik a végtelenség és a kiterjedés tagadása között, a végtelenség és egy szám tagadása között, a végtelenség és egy mozgás tagadása között, a végtelenség és az idő tagadása között. Ebből lehet megtanulni korlátozni magunkat az igazi értékeinkre, és olyan elmékedésekre, melyek értékesebbek lesznek, mint az összes többi megmaradó geometria önmagában. 87

Azt gondoltam, hogy azok javára, akik először nem értik ezt a kettős végtelenséget, de alkalmasak a meggyőzésre, köteles vagyok belekezdeni ebbe a hosszú eszmefuttatásba. Valószínűleg ez a tanulmány – ami szükséges az előbb említetteknek – nem teljesen haszontalan azok számára (és ilyenek is lehetnek sokan), akik elegendően felvilágosultak ugyan általában, de mégsem értik ezt a gondolatmenetet. 88

2.5. Riemann



2.43. ábra. Bernhard Riemann

A most következő előadás alapvető változást hozott a tér leírását szolgáló természettudományok fejlődésének irányában. Gauss kérésére Riemann habilitációs előadását – szokatlan módon – a harmadiknak megjelölt „A geometria alapjait adó hipotézisekről” c. témájában tartotta meg.

B. RIEMANN: A GEOMETRIA ALAPJAIT ADÓ HIPOTÉZISEKRŐL

W. K. CLIFFORD ANGOL FORDÍTÁSA ALAPJÁN

A vizsgálat terve.

Mint tudjuk, a geometria feltételezi a tér fogalmának, illetve a szerkesztések első alapelveinek, mint ismert dolgoknak az ismeretét. Definíciókat ad közöttük, melyek elnevezés szintűek, az igazi meghatározottságuk az axiómákban lépnek fel. Következésképpen az ezen feltevések közötti viszony felderítetlen marad, sem felfogni sem a priori elfogadni nem tudjuk, hogy e kapcsolatok vajon szükségesegek-e vagy csak lehetségesek.

Euklidésztől Legendre-ig (a leghíresebb modern geométerekig) ezen a ponton a sötétség nem volt eloszlatva sem a matematikusok sem ezen témával foglalkozó

filozófusok által. Az oka ennek az, hogy a többmértetű sokaság fogalma (ami-be a tér-méretének fogalma is beleértendő) feltáratlan maradt. Ezért először is az általános sokaság fogalomból kiindulva a többszörösen kiterjesztett sokaság fogalmának konstrukciójával kezdtem foglalkozni. Következni fog ebből, hogy a sokdimenziós sokaságot különféle mérték-viszonyokkal lehet ellátni, következésképpen a tér csak egy speciális esete egy háromdimenziós sokaságnak. Eképpen egy szükséges következmény, hogy a geometria állításai nem származtathatók a sokaság általános fogalmából, azonban azok a tulajdonságok, amelyek megkülönböztetik a teret más lehetséges háromdimenziós sokaságoktól csak a tapasztalat útján vezethetők le. Eképpen az a probléma, hogy hogyan fedezzük fel a leg-egyszerűbb gyűjteményét olyan tényeknek, amikből a tér mérték-viszonyai már meghatározottak; olyan feladat, ami a természet vonatkozásában nem teljesen determinált. Lehetséges több együttese is a tényeknek, amelyek lehetővé teszik a tér mérték-viszonyainak meghatározását - a legfontosabb rendszer ehhez a célhoz az, amelyet Euklidész lefektetett az $\bar{O}$ alapjaiban. Ezen tény gyűjtemény – és úgy tűnik minden gyűjteménye tényeknek – nem szükségszerűség, csak empirikus lehetőség; hipotéziseket tartalmaz. Tudjuk vizsgálni a valószínűségüket, amelyik az érzékelésünk határán belül igen nagy, és érdeklődhetünk az igazság tartalmuk iránt az érzékelésünk határain túl is, mindkét végtelen, a végtelenül nagy és a végtelenül kicsi irányában is.

I. Az n -dimenziós sokaság fogalma.

A következőkben az első kérdéssel fogunk foglalkozni, a sokdimenziós sokaság fogalmának felépítésével. Úgy gondolom elnézőbb kritikát igénylek ebben, nem vagyok gyakorlott olyan filozófiai természetű vállalkozásokban, ahol a nehézségek inkább magukban a fogalmakban találhatók nem pedig a konstrukcióban; mindemellett néhány rövid segítséget erről a témáról, melyet Privy Councillor Gauss Biquadratus Residuumok című második memoárjában, a Jubileumi-könyvében, és Herbart néhány filozófiai kutatásában találhatunk, előzetes vizsgálat nélkül használni fogok.

1.§ A kiterjedés fogalma csak ott lehetséges, ahol van egy megelőző általános fogalom, amely különféle specializációkat enged meg. Aszerint, hogy ezen specializációk között létezik-e egy folytonos út az egyikből a másikba, vagy nem, folytonos vagy diszkrét sokaságot alkot; az első esetben az egyéni specializációkat a sokaságok pontjainak nevezzük, a másodikban elemeinek. A diszkrét sokaságot alkotó specializációk fogalmai olyannyira közösek, hogy legalább a kultivált nyelvekben minden adott dologhoz találhatunk egy fogalmat, ami őket tartalmazza. (Eképpen a matematikusok habozás nélkül létrehozták a diszkrét kiterjedés elméletét azon posztulátum alapján, hogy bizonyos dolgok ekvivalensnek tekinthetők.) A másik oldalról, olyan kevés és távoli lehetőség van a folytonos sokaság

specializálásával kapott fogalom létrehozására, hogy csak két egyszerű fogalom van, aminek specializálása sokdimenziós sokaságot ad, a helyzete az észlelt objektumoknak és a színek. Először a felsőbb matematikában kínálkozott kiemelt lehetőség a megalkotására és fejlesztésére ezeknek a fogalmaknak.

Tömegnek (Quanta) nevezzük azt a részét a sokaságnak, amit megkülönböztünk egy jellel vagy határral. Összehasonlításuk a mennyiségre vonatkozóan, a diszkrét mennyiségek esetében a számolás, folytonos mennyiségek esetén a mérés segítségével megoldható. A mérés az összevetett mennyiségek szuperpozícióján alapul; eképpen egy standard mennyiségnek a használatát igényli. A probléma ebben az, hogy két mennyiség csak akkor vethető össze, ha az egyik a másik része; és ekkor is csak a kisebb nagyobb voltot tudjuk meghatározni, azt azonban nem, hogy mennyivel kisebb vagy nagyobb. A kutatókat ez arra indította, hogy létrehozzanak egy általános területet a terjedelem tudományának, amelyben a terjedelem nem egy helytől függetlenül létező, és nem valamilyen egységgel kifejezhető mennyiségként jelenik meg, hanem egy sokaság tartományaként. A matematika sok területén ilyen kutatások váltak szükségessé, mint pld., a sokrétű analitikus függvények vizsgálata esetén; ez a szándék kétségtelenül az egyik fő oka annak, hogy az ünnepezt Abel féle tétel és Lagrange, Pfaff, Jacobi eredményei a differenciálegyenletek általános elméletében miért maradtak olyan hosszú ideig terméketlenek. Kilépve a kiterjesztett terjedelem tudományának általános részéből, amikor is semmit sem teszünk fel ami a fogalomban benne foglaltatik, jelen célunkhoz elegendő kiemelni két mozzanatot; az egyik a sokdimenziós sokaság fogalmának a konstrukciójához kapcsolódik, a másik az adott sokaság egy helye határozottságának a mennyiség határozottságára vonatkozó visszavezetésre. Világos lesz az n -szeres kiterjesztés jellege is.

2.§ Egy olyan fogalom esetén, amely specializálása folytonos sokasághoz vezet, ha az egyik specializálásából egy meghatározott módon áttérünk egy másik specializálásra, az átsuhanó specializáció egy egyszeresen kiterjesztett sokaságot alkot, aminek az igazi jellege az, hogy csak két irányú lehet egy pontból induló folytonos folyamat, előre vagy vissza haladó. Ha feltesszük, hogy ez a sokaság egy másik meghatározott, de az előzőtől különböző módon változik, azaz minden pont az egyikből egy meghatározott módon kerül át a másikba, akkor az összes specializáció mely így áll elő, egy kétszeresen kiterjesztett sokaságot ad. Hasonló módon lehet előállítani egy háromszorosan kiterjesztett sokaságot, ha elképzelünk egy kétszeresen kiterjesztett sokaságot, amint átsuhan egy meghatározott módon egy tőle különbözőbe; könnyű elképzelni, hogy a fenti konstrukció folytatható. Ha változtatható objektumot tekintünk egy meghatározott fogalom helyett, a konstrukciónk ugyanúgy leírható, mintahogy egy $(n + 1)$ -dimenziós változó sereget megkapunk egy n -dimenziósból és egy egydimenziósból.

3.§ Megmutatjuk, hogy hogyan lehet felbontani egy adott tartománnyal rendelkező változó sereget egy egy-dimenziósra és egy kisebb dimenziósra. Ehhez vegyünk

egy 1-dimenziós változót egy sokaság valamely darabján - egy fix pontból indítva úgy, hogy az értékei összehasonlíthatók legyenek egymással - amely a sokaság minden pontján felvesz egy a ponttal folytonosan változó értéket; vagy, más szavakkal, tekintsük egy folytonos függvényét az adott sokaságon belüli pozíciónak, amely, nem konstans a sokaság semmilyen részén. Ekkor a pontok minden rendszere, ahol a függvény konstans értéket vesz fel, egy a kiindulási sokaság dimenziójánál kisebb dimenziós folytonos sokaságot definiál. Ezek a sokaságok folytonosan mennek egymásba a függvény változásával; így feltehetjük, hogy az egyikből a többi származtatható, és beszélhetünk általában arról, hogy ez megtörténhet úgy is, hogy bármely pont az egyikből egy meghatározott pontjába megy a másiknak; a kivételes esetektől (amelyek tanulmányozása fontos) itt eltekinthetünk. Ezáltal a hely meghatározottsága az adott sokaságban redukálódik egy mennyiség és egy kisebb dimenziós sokaságban felvett pozíció meghatározására. Könnyű megmutatni, hogy ez a sokaság $n - 1$ -dimenziós, amikor az adott sokaság n -szeresen kiterjesztett. n -szer ismételve ezt a műveletet a hely meghatározása egy n -szeresen kiterjesztett sokaságban redukálódik véges sok mennyiség meghatározására, amikor ez lehetséges. Vannak sokaságok, amelyekben a hely meghatározása nem véges, hanem vagy végtelen sok a meghatározandó mennyiségek száma vagy ezek folytonos sokaságot alkotnak. Ilyen sokaságok például a lehetséges meghatározásai egy adott tartomány egy függvényének, a lehetséges formái egy testnek, stb...

II. Az n -dimenziós sokaság mérés-viszonyai azon feltevés alapján lehetségesek, hogy a vonalakon függetlenül a helyzetüktől van hosszúság és következésképpen minden vonal minden másik vonallal mérhető.

A korábban felvetett második problémához vezet el bennünket az a felismerés, hogy az n -dimenziós sokaság fogalmának igazi jellege azon alapul, hogy a hely meghatározása benne redukálható az n terjedelem meghatározására; azaz vizsgálunk kell azon mérték-relációkat, amelyek egy ilyen sokaságban lehetségesek, és azokat a feltételeket, amelyek szükségesek a meghatározásukhoz. Ezek a mérték-viszonyok, csak a mennyiségek absztrakt fogalma alapján tanulmányozhatóak, és az egymás közötti kapcsolataik formulákkal írhatók le. Bizonyos feltételek, azonban, felbonthatók olyan relációkra, amelyeket külön-külön tekintve, geometriai reprezentációval láthatunk el; ezért a kiszámított eredmény geometriai úton kifejezhetővé válik. Ezen az úton – igaz nem tudjuk szilárd alapokhoz jutunk-e, kikerülve a formuláink absztrakt viszonyai közül – legalább a számítási eredményeink geometriai formában is előállíthatók. A kérdés ezen két részének a megalapozása Gauss, „Disquisitiones generales circa superficies curvas.” c. műveleiben található.

1.§ A mérték-meghatározásokhoz szükséges, hogy a mennyiségek függetlenek legyenek a helytől, ez sokféleképpen lehetséges. A hipotézis, amit először felállítok, és most kifejték, az az, hogy a hossz az egyeneseken független az egyenes helyzetétől, és így minden egyenes minden másik egyenessel mérhető. A hely-rögzítés a mennyiség-rögzítésre redukálódik, és következésképpen a pont helyzetének rögzítése az n -dimenziós sokaságban kifejezhető n db $x_1, x_2, \dots, x_n$ mennyiséggel, az egyenes meghatározása nem más mint megadni ezeket az egydimenziós függvényeket. A probléma abban áll, hogy matematikai kifejezést adjunk az egyenesen való hossz számára, és az x mennyiségeket bizonyos egységek segítségével fejezzük ki. Csak bizonyos megszorítások mellett foglalkozom ezzel a kérdéssel, és először is azokra az esetekre figyelek, amikor a dx mennyiségek arányai a változóknak folytonos függvényeik. Ekkor azt gondolhatjuk, hogy az egyenesek olyan elemekre vannak törve, amelyekben a dx mennyiségek arányai konstansnak tekinthetők; a probléma ekkor a pontból induló ds lineáris elem egy általános kifejezésének felállítására redukálódik, amely az x és dx mennyiségeket fogja tartalmazni. Fel fogom azt is tenni, hogy a lineáris elem hossza, elsőrendben változatlan, amikor a pontjait ennek az elemnek egy infinitezimális mennyiséggel áthelyezzük, ebből következik, hogy ha minden dx mennyiséget ugyanazzal az aránnyal növeljük, a lineáris elem is ugyanazzal az aránnyal változik. Ezekből a feltevésekből következik, hogy a lineáris elem olyan elsőrendű homogén függvénye lehet a dx mennyiségeknek, mely nem változik, ha az összes dx előjelét megváltoztatjuk, és amelyben tetszőleges konstans az x mennyiségek folytonos függvénye. Ahhoz, hogy megtaláljuk a legegyszerűbb eseteket, megkeressük egy olyan $(n-1)$ -dimenziós sokaság lineáris elemének előállítását, mely minden pontja egyenlő távol van az origótól; azaz, keressük egy folytonos függvényét a helynek, amely értékei megkülönböztetik az egyiket a másiktól. Kifelé haladva az origóból, ez szükségképpen nő minden irányban vagy csökken minden irányban; felteszem, hogy nő, és ezért itt van a minimuma. Ha az első és második deriváltjai az együtthatóknak végesek, az első deriváltnak el kell tűnnie, és a második nem válhat negatívvá; felteszem, hogy mindig pozitív.

Ez a differenciál kifejezés másodrendben konstans ha ds is az, és dx illetve eképpen ds növekedésének négyzetes függvénye, ezért szükségképpen ds^2 konstansszorosa, következésképpen ds a négyzetgyöke a dx egy pozitív másodrendben homogén függvényének, amelyben az együtthatók az x mennyiség folytonos függvényei. A derékszögű koordinátákkal kifejezett térben ez a kifejezés $ds = \sqrt{\sum (dx)^2}$; a Tér tehát most ezen legegyszerűbb esetnek felel meg. Az egyszerűség szempontjából a következő eset azon sokaságokat tartalmazza, amelyek íveleme egy negyedrendű differenciál kifejezés negyedik gyökei. Ezen általánosabb fajta vizsgálata nem más elveket igényel, hanem jelentős időt. Egy kis új fényt hoz a tér elméletébe, azonban az eredmények geometriailag nem kifejezhetők, ezért magam azon sokaságok vizsgálatára szorítkozom, amelyekben az ívelem

egy kvadratikus differenciál kifejezés négyzetgyöke. Ilyen kifejezéseket másokba transzformálni hasonlóképpen lehet, mint, ahogy n független változó függvényébe helyettesítünk n új változót. Ezen az úton, azonban, nem tudunk minden kifejezést minden másik kifejezésbe transzformálni; mivel a kifejezés $\frac{1}{2}n(n+1)$ együtthatót tartalmaz, melyek a független n változó függvényei; ezért az új változók bevezetésével csak n feltételnek tudunk eleget tenni, eképpen csak n együttható lehet egyenlő valamely adott mennyiségekkel. A fennmaradó $\frac{1}{2}n(n-1)$ determinálva van a reprezentált folytonosság természete által, következésképpen $\frac{1}{2}n(n-1)$ függvénye a helynek, szükséges a mérték-viszonyok meghatározásához. A Síkhoz illetve Térhez hasonló sokaságok, amelyekben, az ívelem a $\sqrt{\sum dx^2}$ alakra hozható speciális esetek, melyek számára speciális nevet kell bevezetni, ezeket *lapos* sokaságoknak fogom nevezni. Annak érdekében, hogy a feltételezett formában reprezentálható összes kontinuumot vizsgálhassuk, szükséges megszabadulnunk a reprezentáció módjából származó azon nehézségektől, mely akkor merülnek fel, amikor egy bizonyos elv szerint választjuk a változókat.

2.§ Ennek a célnak az eléréséhez tegyük fel, hogy tetszőleges pontból induló leg-rövidebb vonalak rendszere meg van konstruálva; a pozíciója akkor egy tetszőleges pontnak, azaz a pont helyzete meghatározott, azon geodetikus kiindulásának iránya és a pont ezen geodetikuson mért origótól való távolsága által, amelyen fekszik. Kifejezhető így a dx mennyiség dx_0 vektora koordinátái arányával és az s ívhosszal. Vezessük most be a dx_0 helyett a dx olyan lineáris függvényeit, hogy a vonalelem négyzetének az eredeti értéke megegyezzen ezen kifejezések négyzetösszegével, azaz a független változók az s ívhossz és a dx mennyiségek arányai legyenek. Végül helyettesítsük a dx $x_1, x_2, \dots, x_n$ mennyiségeit, velük arányos mennyiségekkel úgy, hogy azok négyzetösszege s^2 legyen. Amikor ezeket a mennyiségeket bevezettük, a vonal-elem négyzete az infinitezimális x elemekre nézve $\sum dx^2$ lesz, és a következő rendű tag homogén függvénye az $\frac{1}{2}n(n-1)$ darab $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1), \dots$ alakú tagnak így szintén infinitezimális, eképpen, negyedrendű; azaz egy véges mennyiséghez jutunk, amikor azt a

$$(0, 0, 0, \dots), (x_1, x_2, x_3, \dots), (dx_1, dx_2, dx_3, \dots)$$

infinitezimális háromszög területének négyzetével osztjuk. Ez a mennyiség ugyanolyan jól megőrzi az értéket, mint az x és dx behelyettesítve ugyanabba a két-változós lineáris formába, vagy mint a két geodetikus a 0-ból x -be és a 0-ból dx -be vezető által kijelölt felszín-elem; eképpen csak a helytől és iránytól függ. Amikor a reprezentált sokaság lapos, azaz a vonal-elem négyzete $\sum dx^2$ alakra hozható, akkor nyilvánvalóan zérus, eképpen tekinthető a laposságtól való eltérés mértékeként az adott pontban az adott felszín-irányra nézve. Ha $-\frac{3}{4}$ -el szorozzuk ez az érték a Gauss által a felületre bevezetett totális görbülettel egyezik meg. Azt találtuk korábban, hogy $\frac{1}{2}n(n-1)$ függvény szükséges a mérték-viszonyok

a sokaság feltételezett reprezentációnak megfelelő meghatározásához, ha eképpen a görbület minden pontban $\frac{1}{2}n(n-1)$ felszín-irányban adott, a kontinuum mérték-viszonyai meghatározhatók belőlük, ha nincs azonos reláció közöttük. Ez azonban ténylegesen az általános esetre vonatkozóan nem áll fenn. Ezen az úton a sokaság azon mérték-viszonyai, amelyekben a vonalelem egy másodrendű differenciál négyzetgyöke, kifejezhetők oly módon, amely teljesen független a független változók megválasztásától. A módszer teljesen hasonlóan alkalmazható ugyanezen cél elérésére akkor is, amikor a vonal-elem egy kevésbé egyszerű alakban van megadva, pld. egy negyedrendű differenciál negyedik gyöke. Ebben az esetben a vonal-elem, általában, nem redukálható négyzetösszeg négyzetgyökévé, így az eltérés a laposságtól a négyzetes vonal-elemben nem másodrendben infinitézimális, ezekre a sokaságokra az eltérés negyedrendű. Ezen kontinuumok ezen tulajdonságát a legkisebb részben való laposságnak nevezzük. Jelen céljainkhoz – amelyeket most vizsgálni szeretnénk – tartozó legfontosabb tulajdonsága ezen kontinuumoknak az, hogy a kétdimenziós sokaságok geometriailag reprezentálhatók felületekkel, és a többméretűek redukálhatók azokra, amelyeket tartalmaznak. Ez a tulajdonság most egy további rövid diszkussziót igényel.

3.§ A felületek elméletében, azon belső mérték-viszonyokkal együtt, amelyekben csak a felületen haladó vonalak hosszát tekintjük, mindig összekeverednek azon pontok helyzetei, amelyek a felületen kívül helyezkednek el. Azonban, mi el tudunk vonatkoztatni a külső relációktól, ha olyan deformációkat tekintünk, amelyek a vonal hosszát változtatlanul hagyják – pld., ha tekintjük a felület minden módon való szakítás nélküli hajlítását, és az így kapott felületeket ekvivalensnek tekintjük. Eképpen, például, minden hengeres és kúpszerű felület a síkkal ekvivalensnek tekinthető, mivel egymásba vihetők pusztán hajlítással, amely során a belső mérték-viszonyok nem változnak, és minden a síkra vonatkozó tétel – eképpen a teljes síkgeometria – megőrzi rajtuk az érvényességét. A másik oldalról ezeket lényegesen különbözőnek tartjuk a gömbfelszíntől, amit nem lehet a síkba képezni szakítás nélkül. A korábbi vizsgálataink szerint a belső mérték-viszonyai egy kétdimenziós sokaságnak, amelyben a vonalelem kifejezhető egy másodrendű differenciál gyökeként, jellemezhetők a teljes görbülettel, azaz a felületek esetében ez a helyzet. A felületek esetében ez a mennyiség szemléletesen interpretálható, vagy a szorzata két felületi görbületnek, vagy szorozva van egy kis geodetikus háromszög területével, ami a szférikus feleslege ugyanannak. Abból a tényből kiindulva kell intelligens értelmet adni a görbület n -dimenziós kiterjesztésének egy adott pontban egy hozzá tartozó adott felületi-irányban, hogy a geodetikus kiindulva egy pontból teljesen meghatározott legyen ha a kiindulási irány is adott. Ezek szerint kapunk egy jól meghatározott felületet ha meghosszabbítjuk az adott pontból és az adott felületi-irányban induló geodetikust; ennek a felületnek az adott pontban van egy meghatározott görbülete, amely az n -méretű kontinuum görbülete is az adott pontban az adott felületi-irányban.

4.§ Mielőtt alkalmazzuk a fentieket a térre, szükséges a lapos sokaságokról (amelyekben a vonal-elem négyzete kifejezhető a teljes differenciálok négyzet összegeként) néhány általános megfontolást tennünk. A totális görbület egy n -szeres lapos kiterjesztése esetén minden pontban és minden irányban zéró; azonban a korábbiak szerint elegendő a mérték-viszonyok meghatározásához tudni, hogy minden pontban $\frac{1}{2}n(n-1)$ független felületi irányban a görbület zéró. Azon sokaságokat melyek görbülete konstans zéró azon sokaságok speciális eseteként tekinthetjük, amelyek görbülete konstans. Az együttes jellege azon kontinuumoknak, amelyek görbülete konstans kifejezhető úgy, hogy a bennük levő alakzatok nyújtás nélkül mozgathatók. Világos, hogy az alakzatok nem tolhatók, vagy forgathatók el a sokaságban, ha a görbület nem ugyanaz minden pontban és minden irányban. A másik oldalról, azonban, a sokaság mérés-viszonyai meghatározottak a görbülettel; ezek eképpen pontosan ugyanazok minden pontban és minden irányban, következésképpen ugyanazok a konstrukciók csinálhatók belőlük; ahonnet következik, hogy csoportosíthatjuk a konstans görbületű alakzatokat tetszőleges számukra előre adott pozíciókba. A mérés-viszonyai ezen sokaságoknak csak a görbület értékétől függ, és α -val jelölve az értékét, a vonal-elem analitikus kifejezése az

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{4}\alpha \sum x^2} \sqrt{\sum dx^2}$$

alakba írható.

5.§ A konstans görbületű felületek elmélete egy geometriai illusztrációval szolgál. Könnyű látni, hogy egy pozitív görbületű felület mindig feltekerhető egy gömbfelszínre, amely sugara a görbület négyzetgyökének a reciproka; de ezen felületek teljes sokaságának áttekintéséhez, egyet közülük tekintsünk a gömbfelszínnek és a többi olyan forgásfelületnek, mely a gömböt az egyenlítője mentén érinti. Azon felületek, melyeknek nagyobb a görbülete a gömbénél, a szférát belülről érintik, és vehetjük olyan alakúnak, mint egy gyűrű külső felülete; ezek feltekerhetők egy új sugarú gömb zónáira, de egynél többször fognak körbe menni. A kisebb pozitív görbületű felületek nagyobb sugarú gömbökből származnak oly módon, hogy kivágunk belőlük két holdat, amit két fél nagykör határol és azonosítjuk a határoló vonalakat. A zéró görbületű felület egy henger lesz az egyenlítőn keresztül, a negatív görbületű felületek kívülről érintik a hengert és olyanok mint a belső felülete egy gyűrűnek. Ha ezeket a felületeket mint a felületi-tartományok elhelyezése lehetséges helyeinek tekintjük – mintahogy a Tér a testek elhelyezésének lehetséges helye – a felületi-tartományok ezeken a felületeken mozgathatók nyújtás nélkül. A pozitív görbületű felületek mindig alakíthatók úgy, hogy a felületi-tartományok tetszőlegesen körbe mozgathatók rajta nyújtás nélkül, azaz (alakíthatók) szféra-felületté; de ez nem teljesül a negatív-görbületűekre. Mindemellett a felületi-tartományok függetlensége a helytől a zéró görbület esetében

ugyanúgy fellép, mint az irány függetlensége a helytől, ez az utóbbi a korábbi felületek esetében nem létezik.

III. Alkalmazás a térre.

1.§ Ha feltesszük az ívhossz függetlenségét a helyétől és a vonal-elem kifejezhetőségét egy másodrendű differenciál gyökeként, azaz, a sokaság legkisebb részekben való laposságát, akkor a mérték-viszonyok n -szeres kiterjesztése meghatározására vonatkozó vizsgálatokkal deklarálhatóak azok a feltételek, amelyek szükségesek és elégségesek a tér metrikus tulajdonságainak meghatározásához.

Először is kifejezhetők eképpen: minden pontban a görbület zéró három felület-irányban; és innen a tér metrikus tulajdonságai meghatározottak, ha a háromszögek szögeinek összege mindig két derékszög összegével egyenlő.

Másodszor, ha Euklidésszel mi is feltesszük, hogy nem csak az egyenesek létezése független a helytől, hanem a testeké is, azonnal kapjuk, hogy a görbület mindenhol konstans; és a háromszögek szögösszege minden háromszögben meghatározott, ha egyben ismert.

Harmadszor, lehetséges, „a vonalhossz független a helytől és az iránytól” kitétel helyett, feltenni valamilyen függetlenséget a hossztól és a helyhez tartozó iránytól. Ezen koncepció szerint a helybéli változások olyan komplex mennyiségek, amelyek három független egységgel vannak kifejezve.

2.§ Az előző vizsgálatainkban, először megkülönböztettük a kiterjesztés relációit vagy partícióit és a mérés-viszonyokat, és azt találtuk, hogy ugyanazon széleskörű tulajdonságokkal, különböző mérés-viszonyok képzelhetők el; ezután vizsgáltuk azt az egyszerű méret-rögzítő rendszert, amellyel a tér mérés-viszonyai teljesen meghatározottakká válnak, és amelyekből minden állítás róluk egy szükségszerű következmény; visszamaradt tehát az a kérdés, hogy miként, milyen fokban és terjedelemben korlátozza a tapasztalat mindezen feltételeket. Ebben a vonatkozásban van egy valódi megkülönböztetés a pusztán kiterjedésre vonatkozó viszonyok és a mérték-viszonyok között; míg az előbbiben, ahol a lehetséges esetek diszkrét sokaságot alkotnak, a tapasztalat deklarációi valóban nem bizonyosságok, de nem is helytelenek; addig a másodikban, ahol a lehetséges esetek folytonos sokaságot alkotnak, minden tapasztalat alapuló meghatározottság helytelen: a valószínűség még ha nagy is sohasem pontos. Ez a meggondolás fontossá válik ezen empirikus meghatározottságoknak a megfigyelés határain túli kiterjesztésénél a végtelen nagy vagy a végtelen kicsi esetében; mivel az utóbbi világos, hogy helytelenné válhat túl a megfigyelés határain, míg a korábbi nem. A tér-konstrukció végtelenül nagyra kiterjesztésében, meg kell különböztetnünk a *nem korlátos* illetve a *végtelen nagy* fogalmakat, az első a kiterjedés viszonyai közé tartozik, a második a mérés-viszonyok közé. Az a feltétel, hogy valami nem korlátos három-méretű sokaság, a külső világ tetszőleges fogalmai között

kifejtett feltétel, amely szerint minden pillanat a valódi észlelés tartományában befejezett, a keresett objektum lehetséges pozíciói meghatározottak, és az alkalmazások örökre jóváhagyják saját magukat. A tér korlátlanága eszerint nagyobb empirikus bizonyosság mint bármilyen külső tapasztalás. De a sokaság végtelen nagysága nem következik ebből; a másik oldalról viszont, ha feltesszük a test függetlenségét a helyétől, és eképpen konstans görbületet tulajdonítunk a térnek, szükségképpen végesnek kell lennie, ha ellátjuk egy akármilyen kicsi pozitív görbülettel. Ha meghosszabbítjuk az összes geodetikust kiindulva egy adott felület-elemből, egy nem korlátos konstans görbületű felülethez jutunk, azaz a felülethez, amelyik a gömböt formáló három dimenziós lapos sokaság, következőképpen véges.

3.§ A végtelenül nagyról szóló kérdések a természet interpretálása szempontjából hasznavehetetlenek. De nem ez a helyzet a végtelenül kicsivel. A pontosságtól, amivel a jelenségeket követjük a végtelen kicsibe, alapvetően függenek az okozati összefüggéseikről való ismereteink. A jelen század előmenetele a mechanika megismerésében csaknem egészében a mérések pontosságától függ, amely az infinitezimális kalkulus feltalálása nyomán, az Archimédész, Galilei, Newton által felfedezett, a modern fizikában használt egyszerű elveken keresztül vált lehetségessé. De a természettudományban, amelyben ilyen konstrukciók számára mindig egyszerű alapelveket akarunk, keressük az okozati összefüggések felfedezését követve a jelenségeket a parányok világába annyira, amennyire a mikroszkóp engedi. Az infinitezimálisan kicsi méretű térbeli mérés-viszonyokról szóló kérdések tehát eképpen nem feleslegesek.

Ha feltesszük, hogy a testek a helyüktől függetlenül léteznek, a görbület konstans, és akkor csillagászati mérésekből következtethetünk vagy arra, hogy nem tud különbözni zérustól; vagy valamilyen aránya a reciproknak szükségképpen egy olyan terület, amit összevetve a teleszkópunk hatótávolságával elhanyagolhatónak bizonyul. Ha azonban a testek függetlensége a helytől nem létezik, nem tudunk olyan következtetéseket levonni a nagyra vonatkozó metrikus relációkból, mint, amilyeneket az infinitezimálisan kicsiéből, ebben az esetben a görbület minden pontban három irányban tetszőleges értéket vehet fel, feltéve, hogy a tér minden mérhető részében a teljes görbület érzékelhetően nem különbözik a zérustól. Még bonyolultabb összefüggések létezhetnek, ha nem tesszük fel a lineáris elem kifejezhetőségét a negyedrendű differenciál négyzetgyökével. Most úgy tűnik, hogy azok az empirikus fogalmak, amelyeken a tér metrikus kifejezhetősége alapul, a tömör test és a fénysugár fogalma, érvénytelenné válnak a végtelen kicsi esetén. Eképpen teljesen szabadon feltehetjük, hogy a tér metrikus összefüggései végtelenül kicsiben nem alkalmazkodnak a geometria hipotéziseihez; és nekünk ezt tényként kell kezelnünk, ha ezáltal hozzájuthatunk a jelenség egyszerűbb értelmezéséhez.

A geometriai hipotézisek végtelenül kicsiben való érvényességének kérdése a tér

metrikus összefüggéseinek kérdései alapján határolhatók be. Ezen utolsó kérdésben, amelyet mi a tér doktrínái közé sorolunk, megtalálható az a korábban említett alkalmazás, hogy egy diszkrét sokaságban, a metrikus összefüggések alapjai adottak a fogalmukban, míg egy folytonos sokaságban, ezek az alapok kívülről jönnek. Eképpen vagy az a valóság, hogy a tér diszkrét sokaságot alkot, vagy a metrikus összefüggések alapjait kívül kell keresnünk, a kötő erőben, ami hat rajta.

A válasz ezekre a kérdésekre csak azon jelenségek fogalmaiból kiindulva adható meg, amelyek ezideig a tapasztalattal voltak igazolva, és amelyeket Newton feltett mint alapot, és ezen fogalmakban dolgozva folytonos változtatás szükségeltetett azon tények alapján, melyeket nem tudtak megmagyarázni. A kutatás általános fogalmakkal kezdődik, olyanokkal, mint amelyeket mi éppen vizsgálunk, csak a túl szűk látásmód tudja ezt a munkát akadályozni, és a dolgok egymásra hatásának tudományában való előrehaladást pedig a tradicionális elfogultság gátolhatja.

Ez vezet minket egy másik tudomány területére, a fizikáéra, melyben munkánknak az objektumai fellépnek és ma még nem engednek minket haladni.

Összegzés.

A vizsgálat terve:

I. Az n -szeres kiterjedés fogalma.

1.§ Folytonos és diszkrét sokaság. A sokaság meghatározott részét Quanta-nak hívjuk. A folytonos terjedelem elméletének felosztása két részre a terjedelem-viszonyok elméletére, amelyben a mennyiség függése a helytől nincs feltéve; illetve a méret-viszonyok elméletére, amelyben egy ilyen feltevés kell, hogy legyen.

2.§ Az egyszeresen, kétszeresen és n -szeresen kiterjesztett terjedelem konstrukciójának fogalma.

3.§ A tér-rögzítés redukciója mennyiség-rögzítéssé egy adott sokaságban. Az n -szeresen kiterjesztett terjedelem igazi jellege.

II. Mérték-viszonyok amelyekben egy n -dimenziós sokaság képes arra a feltevésre, hogy a vonalaknak e helytől független hossza van, és következésképpen minden vonal minden másikkal mérhető.

1.§ A vonal-elem kifejezése. A lapos sokaságok, amelyekben a vonal-elem kifejezhető teljes differenciálok összegének négyzetgyökeként.

2.§ Azon n -dimenziós sokaságok vizsgálata, amelyekben a vonal elem reprezentálható egy negyedrendű differenciál négyzetgyökeként. A laposságtól való eltérés mértéke egy adott pontban egy adott felületi irányban. A mérés-relációk meghatározásához szükséges és elegendő, hogy a görbület tetszőlegesen adott legyen minden pontban $\frac{1}{2}n(n-1)$ irányban.

3.§ Geometriai illusztrációk.

4.§ A lapos sokaságok (melyekben a görbület mindenhol zérus) tekinthetők a konstans görbületű sokaságok speciális eseteinek. Ezek definiálhatók avval a feltétellel, hogy az n -szeres terjedelem nem függ a helytől (lehetséges nyújtás mentes mozgás).

5.§ Konstans görbületű felületek.

III. Alkalmazás a Térre.

1.§ Azon tények rendszere, melyek elegendők a geometriában feltételezett tér mérés-viszonyainak meghatározásához.

2.§ Mi az empirikus meghatározottság érvényessége a megfigyelés határán túl a végtelen nagy irányában?

3.§ Mi ez a végtelen kicsi irányában? Ezen kérdés kapcsolata a természet interpretációjával.

József Attila: Reménytelenül

Lassan, tűnődve

Az ember végül homokos,
szomorú, vizes síkra ér,
szétnéz merengve és okos
fejével biccent, nem remél.

Én is így próbálok csalás
nélkül szétnézni könnyedén.
Ezüstös fejszesuhanás
játszik a nyárfa levelén.

A semmi ágán ül szívem,
kis teste hangtalan vacog,
köréje gyűlnek szeliden
s nézik, nézik a csillagok.

3. fejezet

Egybevágóságok szintetikus kezelése

Célunk az euklidészi és hiperbolikus egybevágóságok szintetikus leírása kis dimenziós esetekben.

3.1. Az euklidészi sík egybevágóságai

Minden geometria egy speciális transzformációcsoport invariánsainak elmélete.

F. Klein: Erlangeni program

Először olyan leképezések osztályát nézzük, melyek tetszőleges objektumot magukkal egybevágóba visznek.

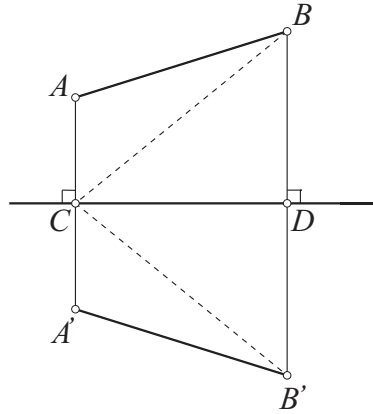
3.1.1. Definíció. *Az abszolút tér azon önmagára vonatkozó bijekcióit, melyek a szakaszokat velük egybevágó szakaszokba viszik egybevágóságnak nevezzük.*

Az abszolút tér egybevágóságai a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak. A csoport nem kommutatív, hiszen, például egy egyenlőoldalú ABC háromszög A csúcsa mint középpont körüli $+\frac{\pi}{3}$ szöggel való "forgatás" és a C körüli $-\frac{\pi}{3}$ szöggel való forgatás nem cserélhető fel, a B pont képe az első esetben C a második esetben pedig A . Persze először meg kell mondanunk, hogy mit értünk forgatáson. Először leírjuk a síkbeli egybevágóságok típusait és jellemző nevét választunk nekik.

3.1.2. Definíció. *A sík egy adott t egyenesére vonatkozó tükrözés a sík azon leképezése önmagára, mely tetszőleges P ponthoz azon P' pontot rendeli képként, melyre PP' szakasz merőleges t -re és a PP' és t egyenesek T metszéspontja a PP' szakaszt két egybevágó szakaszra bontja. A tér egy α síkjára*

vonatkozó tükrözés a tér azon leképezése önmagára, mely tetszőleges P ponthoz azon P' pontot rendeli képként, melyre PP' szakasz merőleges α -ra és a PP' egyenes és az α sík T metszéspontja a PP' szakaszt két egybevágó szakaszra bontja. Ha P pont illeszkedik a t egyenesre vagy az α síkra, akkor a képe definíció szerint legyen maga.

3.1.1. Lemma. A sík egyenesre vonatkozó tükrözése és a tér síkra vonatkozó tükrözése jól definiált egybevágósága a síknak illetve a térnek.



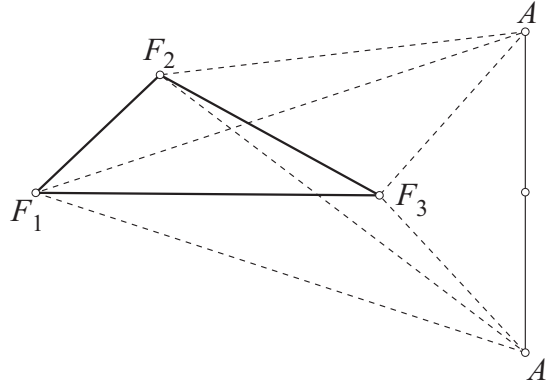
3.1. ábra. Az egyenesre tükrözés egybevágóság.

Bizonyítás: A síkban egyenesre egyértelműen bocsátható a sík egy pontjából merőleges egyenes (1.2.1. Tétel), így a szakasz egyértelmű felmérhetősége miatt az egyenesre vonatkozó tükrözés mint leképezés jól definiált. A síkra tükrözés leképezés jól definiált volta az 1.5.2. Tétel következménye. Elég tehát igazolni, hogy szakaszokat velük egybevágó szakaszokba visznek. A síkbeli eset bizonyítása után a térbeli az 1.5.5. Tétel következménye így elég az előbbivel foglalkozunk (lásd 3.1. ábra). Az A pont képe A' a B képe B' a tükör egyenesen való metszéspontok rendre C és D . A feltételek szerint BCD_{Δ} egybevágó $B'CD_{\Delta}$ ezért $|\overline{BC}| = |\overline{B'C}|$ és $BCD_{\angle} = B'CD_{\angle}$. Azaz BAC_{Δ} egybevágó $B'A'C_{\Delta}$ és így $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$. $\square$

A következő tétel adja az osztályozásunk alapját.

3.1.1. Tétel. A sík tetszőleges egybevágósága legfeljebb három egyenesre vonatkozó tükrözés szorzata, tetszőleges térbeli egybevágóság legfeljebb négy sík-tükrözés kompozíciója.

Bizonyítás: Tekintettel arra, hogy a két bizonyítás logikailag azonos, csak a térbeli állítás bizonyítására koncentrálunk. Tegyük fel először, hogy a Φ egybevágóságnak van négy nem egysíkú fixpontja. Ekkor Φ csak az identitás



3.2. ábra. Az egybevágóságok alaptétele.

lehet. Legyen ugyanis A és A' tetszőleges összetartozó pontpár. Ekkor az F_i fixpontokra $|\overline{AF_i}| = |\overline{A'F_i}|$ egyaránt teljesülnek. A merőlegességi tétel utáni megjegyzés alapján így a négy nem egysíkú fixpont egyaránt az $\overline{AA'}$ szakasz szakaszfelezőmerőleges síkjához tartozik, ami lehetetlen. Legyen most leképezésünknek három fixpontja F_i $i = 1, 2, 3$ és az A pont képe legyen A' . Tekintsük az $\overline{AA'}$ szakasz szakaszfelezőmerőleges síkjára vonatkozó tükrözést T_A -t. Ekkor négy fixponttal rendelkezik a $T_A \circ \Phi$ egybevágóság, eképpen az identitással azonos. Maga a Φ ekkor a T_A tükrözés. Hasonlóan vezethető vissza a két fixpontos eset a három fixpontosra, majd az egy fixpontos a két fixpontosra, végül a fixpontmentes leképezés az egy fixponttal rendelkezőre.

□

Vegyük észre, hogy a tétel n -dimenziós abszolút térben hasonlóan bizonyítható, ekkor legfeljebb $n + 1$ hipersíkra vonatkozó tükrözés szorzataként áll elő egy általános egybevágóság.

A fenti tétel szerint legfeljebb három egyenesre vonatkozó tükrözés kompozíciójával tetszőleges egybevágóság megadható. A továbbiakban a kompozíciót szorzásnak nevezzük és a megfelelő műveletet ponttal jelöljük. Mivel két egyenes kölcsönös helyzete a síkban metsző vagy párhuzamos, a tükrözések meghatározó egyenesének elhelyezkedése rögtön nagy típusokba sorolja a két tükrözés szorzataként előálló egybevágóságokat. E szerint

3.1.3. Definíció. *Párhuzamos egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzatát eltolásnak, metsző egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzatát elforgatásnak nevezzük.*

A következő lemma abszolút térben érvényes. Bizonyításában az euklideszi és hiperbolikus eseteket együtt kezeljük.

3.1.2. Lemma (Lemma a reprezentálásról). *Adott a $\phi = t_2 \cdot t_1$ leképezés. Ekkor tetszőleges a t_1, t_2 egyenespár sugársorához tartozó t'_1 egyeneshez, van*

olyan egyértelműen meghatározott t'_2 egyenesre ugyanezen sugársornak, hogy $\phi = t'_2 \cdot t'_1$.

Bizonyítás: Mivel ϕ egybevágóság, ezért illeszkedés, egyenes és távolságtartó bijekció. Világos, hogy minden sugársort vele azonos típusú sugársorba visz. Mivel a sugársor egyik elemének képe egy másik eleme, a tartója a leképezés invariánsa. Ha a tartó a sík egy pontja, akkor a leképezésnek ez fixpontja, és a sugársor valamennyi elemén szintén egy fixpontot ad. Ha egyenes, akkor a tartó invarianciája alapján a rá merőleges irány (végtelen távoli elem) fix volta adódik. Mindkét esetben a teljes sugársor invariáns marad a leképezésnél. Most három eset léphet fel.

Metsző egyenespár mind az euklidészi mind a hiperbolikus geometriában definiálja a t_1, t_2 egyenesek által meghatározott a nem nagyobb mértékűnek megfelelő szöget, melyet pozitív irányúnak tekintünk, ha a $P_1 \in t_1$ pontot valamely $P_2 \in t_2$ pontba az óramutató járásával ellentétes irányú π -nél nem nagyobb forgás viszi és negatívnak a másik esetben. A leképezés során a pontokat a képekbe ekkor $2P_1OP_{2\angle}$ szögű forgatás viszi, ezért megkeresve a t'_1 egyeneshez azt a t'_2 egyenest mely t'_1 egyenesnek a $P_1OP_{2\angle}$ szöggel való elforgatásával keletkezik, a $t'_2t'_1$ szorzat szintén ϕ -t definiálja.

A második esetben együtt vizsgálhatjuk az euklidészi párhuzamos egyenespár és hiperbolikus közös merőlegessel rendelkező egyenespár eseteket. Mindkét szituációban a közös merőlegesen definiálódik az irányított eltolás szakasz, ami segítségével a sugársor alkalmas t'_2 eleme azonnal kijelölődik.

Végül külön vizsgálatra szorul a hiperbolikus párhuzamos egyenespár esete. Ilyenkor adott paracikluson jelölődik ki az irányított „áthelyezési” ív, mely segítségével a sugársor t'_2 eleme ismét egyértelműen kijelölhető. $\square$

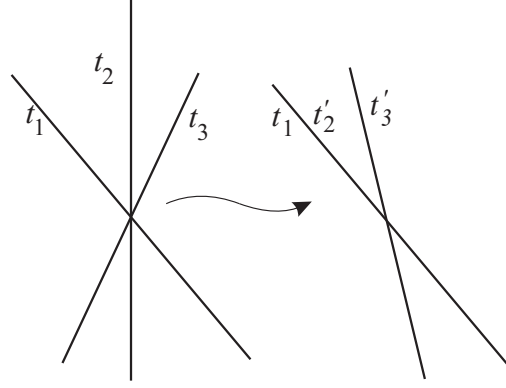
Különös jelentősége van két merőleges egyenesre való tükrözés szorzatának ezt a *metszéspontjukra vonatkozó tükrözésnek* nevezzük.

Fontos példa háromnál kevesebb tükrözés szorzataként nem előálló egybevágóságra a következő: Egy eltolás és egy az eltolás irányával párhuzamos egyenesre vonatkozó tükrözés szorzata. Az így kapott egybevágóságot *csúsztatva tükrözésnek* nevezzük.

3.1.2. Tétel. *Az euklidészi sík egybevágóságai a következő típusokba sorolhatók:*

- **identitás:** Minden pont képe saját maga.
- **tükrözés:** Egy egyenesre vonatkozó tükrözés.
- **eltolás:** Párhuzamos egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzata.
- **forgatás:** Metsző egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzata.

- **csúsztatva tükrözés:** *Eltolás szorzata vele párhuzamos tengelyű tükrözéssel.*



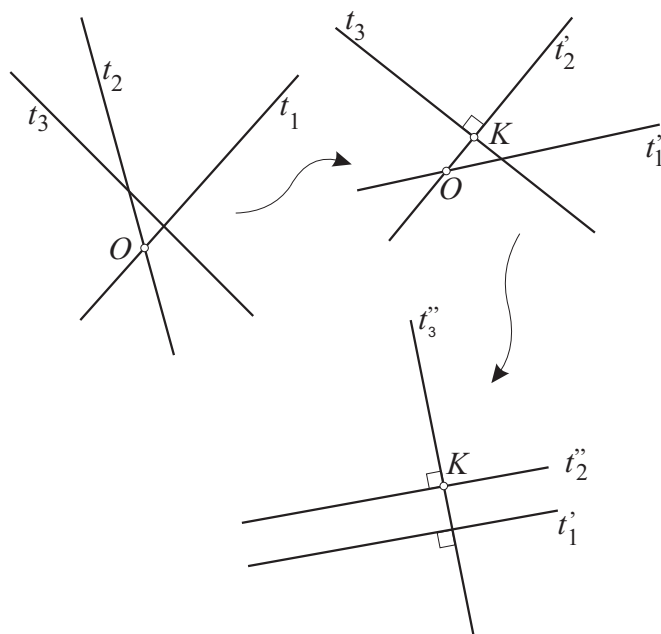
3.3. ábra. A bizonyítás első esete.

Bizonyítás: Az 3.1.1. Tétel szerint azt kell csak bizonyítani, hogy tetszőleges három tükrözés szorzataként megadott egybevágóság a fenti esetek egyikéhez tartozik, azaz identitás, tükrözés, eltolás, forgatás vagy csúsztatva tükrözés. Diskussziónk alapja a kiinduló tükrök egyenesek kölcsönös helyzete. Legyenek a tengelyek rendre t_1, t_2, t_3 , azaz $\varphi = t_3 \cdot t_2 \cdot t_1$. Eseteink ekkor

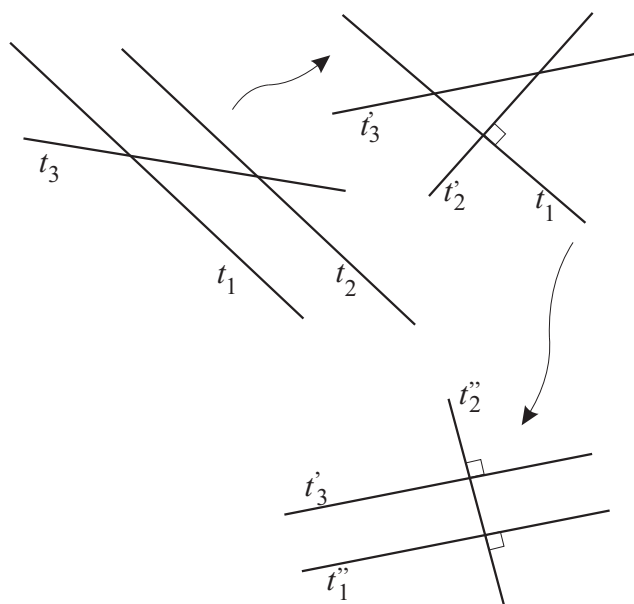
1. $t_1 \cap t_2 \cap t_3 = O$, a három tengely az O pontban metszi egymást. Ekkor a $t_3 \cdot t_2$ forgatást a 3.1.2. Lemma szerint reprezentáljuk egy olyan $t'_3 \cdot t'_2$ szorzattal, melynél $t'_2 = t_1$. Látjuk, hogy a leképezés egy tengelyes tükrözés.
2. $t_1 \cap t_2 = O$, t_3 nem megy át O -n. Ekkor az első lépésben elérjük, hogy t'_2 merőleges legyen t_3 -ra majd a szorzat második két tényezőjének változtatásával, hogy t'_3 merőleges legyen t'_1 -re. Így látható, hogy esetünk egy csúsztatva tükrözés.
3. $t_1 \cap t_2 = \emptyset$. Ha most t_3 párhuzamos t_1 -el, akkor az egybevágóság eltolás, ha nem akkor első lépésben $t_3 \cdot t_2$ -t reprezentáljuk úgy, hogy t'_2 legyen merőleges t_1 -re, majd $t'_2 \cdot t_1$ -t úgy, hogy t'_3 -re merőleges legyen t'_2 . Ekkor formálisan még nem értünk célra, de a $t'_3 \cdot t'_2$ szorzat a tengelyek merőlegessége miatt kommutatív. $\square$

3.2. A hiperbolikus sík egybevágóságai

Az (AM, BN) , (AM, EP) tartományok egybevágóak bár az utóbbi az előbbinek



3.4. ábra. A második eset.



3.5. ábra. A harmadik eset.

tetszőleges többszöröse lehet. Ez az eredmény különös ugyan, az S rendszer lehetetlenségét azonban nyilván mégsem bizonyítja.

Bolyai J.: Appendix

A hiperbolikus sík egybevágóságainak vizsgálata meglepő eredményre vezet, egyetlen új típus van csak, ez is a nem metsző egyenesek két különböző típusának megfelelő két "eltolás" közül az egyik.

3.2.1. Definíció. *Párhuzamos egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzatát párhuzamos áthelyezésnek, ultraparallel egyenesekre vonatkozó tükrözések szorzatát eltolásnak, metsző egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzatát elforgatásnak nevezzük.*

Megint használjuk a leképezések reprezentálhatóságáról szóló 3.1.2. lemmát. Így most a következő eredményre jutunk:

3.2.1. Tétel. *A hiperbolikus sík egybevágóságai a következő típusokba sorolhatók:*

- **identitás:** *Minden pont képe saját maga.*
- **tükrözés:** *Egy egyenesre vonatkozó tükrözés.*
- **párhuzamos áthelyezés:** *Párhuzamos egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzata.*
- **eltolás:** *Ultraparallel egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzata.*
- **forgatás:** *Metsző egyenespárra vonatkozó tükrözések szorzata.*
- **csúsztatva tükrözés:** *Eltolás szorzata a közös merőleges egyenesére vonatkozó tükrözéssel.*

Bizonyítás: Az esetek szétválasztásának alapját az euklidészi analógia adja. Az új leképezés a párhuzamos áthelyezés definíciója szerint adódik. Legyenek az általános esetben a tengelyek rendre t_1, t_2, t_3 , azaz $\varphi = t_3 \cdot t_2 \cdot t_1$. Eseteink ekkor

1. $t_1 \cap t_2 \cap t_3 = O$, a három tengely az O pontban metszi egymást. Ekkor a $t_2 \cdot t_1$ forgatást a 3.1.2. lemma szerint reprezentáljuk egy olyan $t'_2 \cdot t'_1$ szorzattal, melynél $t'_2 = t_3$. Látjuk, hogy a leképezés egy tengelyes tükrözés.

2. $t_1 \cap t_2 = O$, t_3 nem megy át O -n. Ekkor az első lépésben megint O -ból merőlegest állítunk t_3 -ra és evvel definiáljuk t'_2 -t majd a szorzat második két tényezőjének változtatásával elérjük, hogy t''_3 merőleges legyen t'_1 -re. Így látható, hogy esetünk egy csúsztatva tükrözés.
3. $t_1 \cap t_2 = \emptyset$. A két tüköregyenes párhuzamos: Ha most t_3 szintén párhuzamos velük akkor az egybevágóság tükrözés, ha nem akkor az első lépésben $t_2 \cdot t_1$ -t reprezentáljuk úgy, hogy t'_2 legyen merőleges t_3 -ra (itt használhatjuk a 3.1.2. lemmát), majd $t'_2 \cdot t_3$ -t úgy, hogy t''_3 merőleges legyen t'_1 -re.
4. $t_1 \cap t_2 = \emptyset$. A két tüköregyenes ultraparallel: Vegyük észre, hogy $t_2 \cdot t_1$ reprezentációját megváltoztathatjuk úgy, hogy t_3 messe az új t_2 -t. (Megint nézhetjük a 3.5. ábrát.) Így első lépésünk lehet ezen metszéspont körüli forgatással a $t_3 \cdot t_2$ szorzat olyan reprezentációjának megadása, melyben t'_2 merőleges t_1 -re. Ezután cseréljük a $t'_2 \cdot t_1$ reprezentációját olyanra, hogy t''_1 merőleges legyen t'_3 -re. Használhatjuk megint azt az észrevételt, hogy merőleges tengelyű tükrözések felcserélhetőek így t''_2 és t'_3 felcserélésével, megint csúsztatva tükrözéshez jutottunk.

□

3.3. Az euklidészi tér egybevágóságai

*Ha két egymást metsző sík merőleges valamely síkra,
akkor a közös részük is merőleges arra a síkra.*

Euklidész: Elemek XI

Alaptételünk szerint minden egybevágóság legfeljebb négy síktükrözés szorzata. A következő speciális esetek különösen érdekesek:

- **eltolás:** Két párhuzamos síkra vonatkozó tükrözés szorzata.
- **forgatás:** Metsző síkpárra vonatkozó tükrözések szorzata.
- **csúsztatva tükrözés:** Eltolás szorzata olyan tükrözéssel, mely síkja az eltolás irányával párhuzamos.
- **forgatva tükrözés:** Forgatás szorzata olyan tükrözéssel, mely síkja a forgatás tengelyére merőleges.
- **csavarmozgás:** Forgatás szorzata tengelyével párhuzamos irányú eltolással.

Fontos szerepet játszik most is az a tény, hogy az eltolás illetve elforgatás sokféleképpen reprezentálható. A valós projektív tér adott egyenesre illeszkedő síkjainak seregét *síksornak* nevezzük. Egy s síkra vonatkozó tükrözést szintén s -el jelölünk.

3.3.1. Lemma. *Legyen adott a $\phi = s_2 \cdot s_1$ egybevágóság. Ekkor tetszőleges az s_1, s_2 síkpár sugársorához tartozó s'_1 síkhoz, van olyan egyértelműen meghatározott s'_2 síkja ugyanezen sugársornak, hogy $\phi = s'_2 \cdot s'_1$.*

A lemma bizonyítása szó szerint megegyezik a síkbeli analóg állítás bizonyításával ezért elhagyjuk. (A hiperbolikus esetekre most nincs szükségünk.)

Az osztályozási tételünk szerint a fenti típusok egyikébe tartozik valamennyi egybevágóság. Pontosabban:

3.3.1. Tétel. *Az euklidészi tér egybevágósága identitás, síktükrözés, eltolás, forgatás, eltolva tükrözés, forgatva tükrözés vagy csavarmozgás.*

A tétel bizonyítása előtt bevezetünk egy újabb egybevágóság típust, mely jelentősen segíti az osztályok áttekintését.

3.3.1. Definíció. *A tér t egyenesre vonatkozó tükrözésének nevezzük a tér azon forgatását, melynek tükörsíkjai t -ben merőlegesen metszik egymást.*

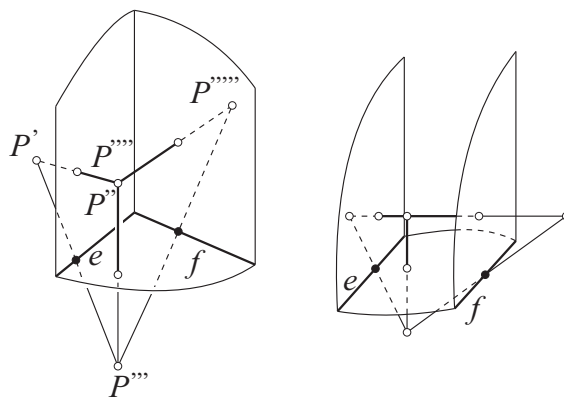
A következő lemma indokolja a csavarmozgás mint egybevágóság bevezetésének szükségességét.

3.3.2. Lemma. *Két metsző, párhuzamos vagy kitérő egyenesre vonatkozó tükrözés szorzata, rendre forgatás, eltolás és csavarmozgás. Fordítva minden forgatáshoz, eltoláshoz, vagy csavarmozgáshoz található olyan metsző, párhuzamos illetve kitérő egyenespár, melyre vonatkozó tükrözések szorzata éppen az adott forgatás eltolás vagy csavarmozgás.*

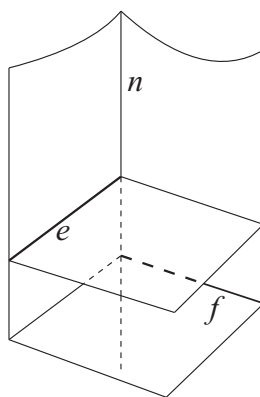
Bizonyítás: A közös síkú esetekben az egyenesekre vonatkozó tükrözéseket reprezentáljuk a közös sík illetve a közös síkra merőleges egyenesen keresztülhaladó síkra vonatkozó tükrözések szorzatával. Merőleges síkpárra vonatkozó tükrözések szorzata felcserélhető, így a lemma állítása könnyen látható (lásd 3.6. ábra).

A kitérő eset alkalmas reprezentálása a kitérő egyenesek normáltranszverzálisa segítségével történik, síkjaink rendre a normáltranszverzális és az egyik egyenes által meghatározott két sík, valamint az egyeneseken keresztülhaladó a normáltranszverzálisra merőleges síkok. Az állítás bizonyítása most már szintén könnyen leolvasható az ábráról (lásd a 3.7. ábrát). $\square$

A lemma következménye, hogy eltolások szorzata eltolás. Valóban ha az 1, 2 síkokra vonatkozó tükrözések szorzata az első eltolást, a 3,4 síkpár pedig



3.6. ábra. A közös síkúak esete.



3.7. ábra. A kitérők esete.

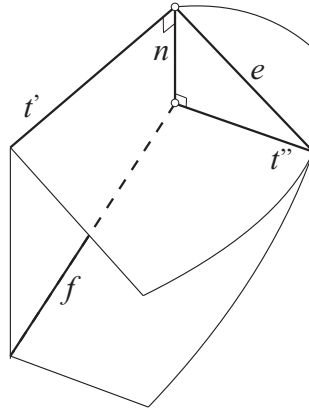
a második eltolást reprezentálja, az 1 és 3 síkok $t_{1,3}$ metszete tekinthető az első eltolást reprezentáló egyenestükrözések második és a második eltolást reprezentáló egyenestükrözések első tengelyeként. Mivel párhuzamos síkokat egy harmadik sík párhuzamos egyenespárban metsz a fennmaradó $t'_{1,3}, t_{1,3}$ egyenestükrözések tengelyei egymással is párhuzamosak így meghatároznak egy eltolást. A kapott eltolás éppen a kompozíció leképezést adja meg a

$$t'_{1,3} \cdot t_{1,3} \cdot t_{1,3} \cdot t_{1,3}'' = t'_{1,3} \cdot t_{1,3}''$$

egyenlőség alapján.

Az egyenesekre vonatkozó tükrözések szorzatával viszont merőleges tengelyű elforgatások szorzata helyettesíthető, ezért igaz:

3.3.3. Lemma. *Két merőleges tengelyű elforgatás szorzata csavarmozgás.*



3.8. ábra. Merőleges tengelyű elforgatások szorzata csavarmozgás.

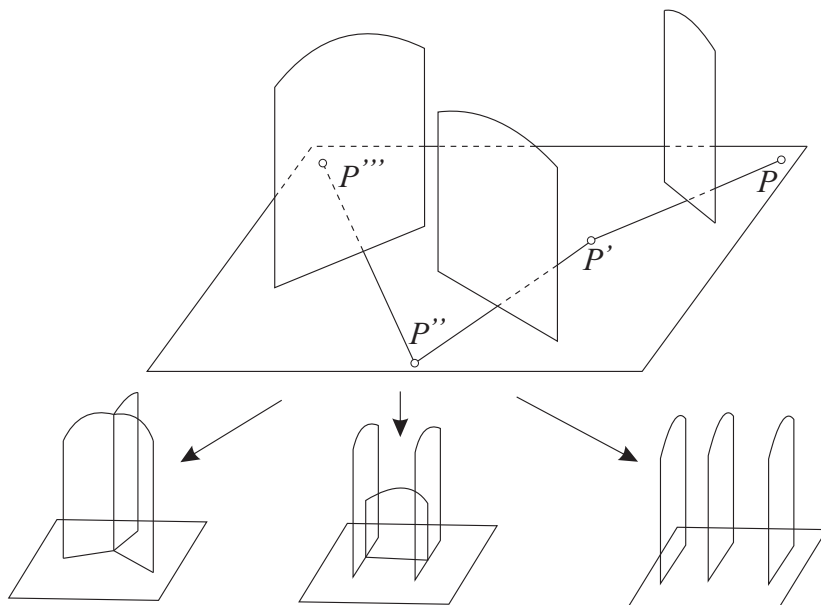
Bizonyítás: Legyen a két tengely t' és t'' a normáltranszverzálisuk n . Ekkor t' egyenes merőleges a (t'', n) egyenesek síkjára és t'' egyenes merőleges a (t', n) egyenesek síkjára. A t' tengelyű elforgatást reprezentálja egy olyan síkpárra vonatkozó tükrözés, melynek második tényezője a (t', n) síkra vonatkozó tükrözés, míg a második forgatást reprezentáló tükrözések első síkja legyen a (t'', n) sík. Leképezésünk most négy síkra vonatkozó tükrözés szorzat, ahol a második tükörsík (t', n) a harmadik pedig (t'', n) . Ezek a síkok merőlegesek egymásra így rájuk vonatkozó tükrözések felcserélhetők. Messe az első forgatás első síkja (t'', n) síkot az e egyenesben a második forgatás második síkja pedig (t', n) síkot f -ben a 3.8. ábra szerint. Felcserélve a (t', n) síkra vonatkozó tükrözést a (t'', n) síkra vonatkozó tükrözéssel, leképezésünk két újabb forgatás szorzataként áll elő, az első tengelye e a másodiké f . Ezen

forgatások meghatározó síkjai viszont páronként merőlegesek azaz a leképezések egyenesre vonatkozó tükrözések. Előző lemmánk szerint az egybevágóság csavarmozgás e és f kitérő volta miatt. $\square$

Most már kellőképpen előkészítettük a karakterizációs tétel bizonyítását.

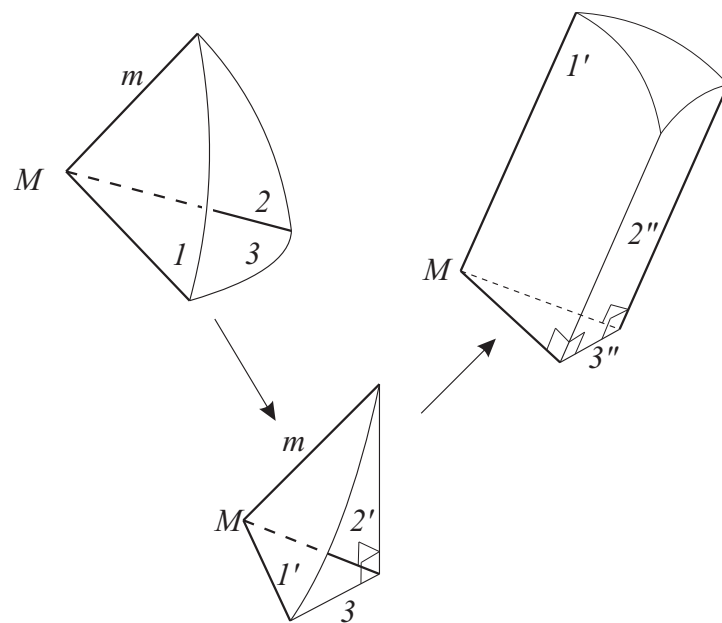
Bizonyítás: Nyilván elegendő legalább három tükrözés szorzatát vizsgálni. Eseteinket a síkok egymáshoz viszonyított helyzete alapján választjuk szét.

1. Tegyük fel először, hogy a három tükörsík rendelkezik közös merőleges síkkal. Ekkor tetszőleges pont pályája a közös merőleges síkkal párhuzamos síkba esik, az egybevágóság osztályozása a síkbeli eseteknek megfelelően történhet. Mivel három egyenesre vonatkozó tükrözés szorzata vagy csúsztatva tükrözés, vagy tükrözéssé fajul, ezért ebben az esetben a tér tükrözéséhez, vagy csúsztatva tükrözéséhez juthatunk.

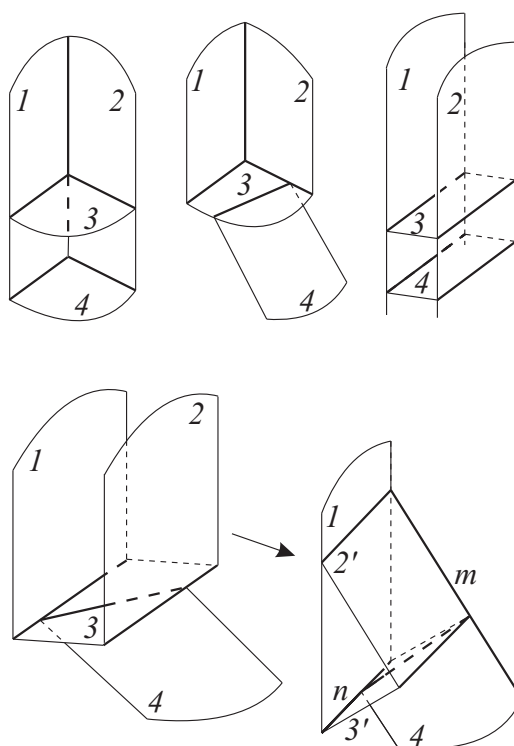


3.9. ábra. Közös merőleges síkkal rendelkező tükörsíkok.

2. Az első két sík, 1 és 2 messe egymást az m egyenesben. Ha a 3 sík m -et nem metszené az m -re merőleges síkok a három sík közös merőlegesei lennének, ezért feltehető, hogy a három sík egy M pontban metszi egymást. Ekkor először m körül forgassuk a reprezentáló síkpárt olyan helyzetbe, hogy $2'$ merőleges legyen 3-ra, majd $2'$ és 3 közös egyenese körül forgassuk a síkpárt úgy, hogy $3''$ merőleges legyen $1'$ -re. Ekkor $1'$ és $2''$ merőleges $3''$ -re, $1'$ és $2''$ metszete M -et tartalmazza így egy forgatva tükrözést reprezentáló síkhármashoz jutottunk.



3.10. ábra. Közös ponttal rendelkező tükörsíkok.



3.11. ábra. Négy tükrözés szorzatai.

3. Ha az 1 és 2 síkok párhuzamosak, akkor 3 őket vagy nem metszi és a leképezés egy tükrözéssé fajul, vagy metszi egy párhuzamos egyenes-párban, amikor is ezen egyenesekre merőleges sík a három sík közös merőleges síkja. Így egy esetünk maradt hátra.
4. Négy síkra vonatkozó tükrözés szorzata a leképezés. Az első három tükrözés szorzatáról feltehetjük, hogy az előző esetben adódó leképezések valamelyike. Ha kevesebb tükrözés szorzatára redukálható az eset, akkor új kategória nem jöhet szóba. Így feltehetjük, hogy az első három tükrözés szorzata forgatva vagy csúsztatva tükrözés. Ha a negyedik sík párhuzamos egy forgatva tükrözést természetes módon reprezentáló síkhármas harmadik elemével, akkor a szorzat leképezés definíció szerint csavarmozgás. Ha a harmadik és negyedik sík metszete egy m egyenes, akkor két merőleges tengelyű forgatás szorzatára bomlik a leképezés, így előző lemmánk szerint szintén csavarmozgást kaptunk.

Tegyük most fel, hogy az első három tükrözés szorzata csúsztatva tükrözés. Ha a negyedik sík a természetes reprezentáció harmadik elemével párhuzamos, akkor a leképezés két eltolás szorzata így maga is eltolás. Ha a negyedik 4 sík metszi a harmadikat 3-at, 2 és 3 metszete körül forgassuk ezen két síkot úgy, hogy $3'$ merőleges legyen 4-re. Ekkor $3'$ merőleges $2'$ -re és 4-re, ezért a metszésvonalukra m -re úgyszintén. m ezért merőleges az 1 és $3'$ metszésvonalára n -re. Felhasználhatjuk most $2'$ és $3'$ sík merőlegességét felcserélve ezen két síkra vonatkozó tükrözéseket. A kapott leképezés egy n tengelyű és egy m tengelyű forgatás szorzata így lemmánk szerint csavarmozgás. $\square$

3.4. Klein



3.12. ábra. Felix Klein

Felix Klein Erlangeni Habilitációs előadása úgy vált híressé a matematika történetében mint az "erlangeni program". Ebben fejt ki azon nézetét, hogy a legfontosabb geometriai vizsgálatokat csoportelméleti módszerekkel a geometriához tartozó transzformáció csoportok vizsgálatával lehet és kell elvégezni. A bevezető gondolatokat idézzük most. Érdekessége az előadásnak, hogy később megjelent nyomtatásban is, melyhez Klein maga írt jegyzeteket.

F. KLEIN: A LEGÚJABB GEOMETRIAI VIZSGÁLATOK ÖSSZEHASONLÍTÓ ÁTTEKINTÉSE.

HABILITÁCIÓS ELŐADÁS ERLANGEN, 1872.

DR. M. W. HASKELL ANGOL FORDÍTÁSA ALAPJÁN¹

A szerző előzetes megjegyzései. - Az 1872 Programmom, megjelent ugyan különálló publikációként (Erlangen, A. Deichert), de csak korlátozottan került forgalomba először. Ezzel én elégedett voltam, mivel a Programban kifejtett nézeteim számára előszörre nem várhattam el több figyelmet. Azonban a matematika általános fejlődése, időközben, pontosan ezen irányokban zajlott, és különösképpen, amióta Lie elkezdte ezeket kibővített formában

¹ Published in Bull. New York Math. Soc. 2, (1892-1893), 215-249.

közzé tenni a „Theorie der Transformationsgruppen” (Liepzig, Teubner, vol. I. 1888, vol. II. 1890)c. munkájában, úgy tűnik, helyes egy szélesebb elérhetőséget biztosítani a Programomban szereplő kifejtések számára. M. G. Fano a közelmúltban az *Annali di Matematica*, ser. 2, vol. 17 számában közzé tett egy olasz fordítást. A szíves fogadása az angol fordításnak, amiért Mr. Haskell-nek igen hálás vagyok, szintén kíváncsós. A fordítás abszolút irodalmi, azon a két-három helyen, ahol pár szót változtatni kellett, az új kifejezések szögletes zárójelbe [] vannak zárva. Ugyanígy jelzem, hogy szükséges volt hozzáfűzni néhány lábjegyzetet, amelyek legtöbbje már az olasz fordításban is szerepel. – F. KLEIN.

Az elmúlt ötven év geometriai területeken való előrehaladásában a *projektív geometria*¹ fejlődése foglalta el az első helyet. Habár első látásra úgy tűnik, mint ha az úgynevezett metrikus összefüggések ebben a felépítésben nem jelennének meg, mert azok nem változatlanok a vetítések során, mi a közelmúltban mégis megtanultuk őket projektív szempontból tekinteni, ezért a projektív módszer átfogja a teljes geometriát. Azonban a metrikus tulajdonságok a továbbiakban nem a geometriai alakzatok *saját* jellemzőinek tekintendők, hanem egy minden gömbre közös, alap konfigurációhoz, a végtelennél fellépő képzetes körhöz való viszonyuknak.

Amikor lépésről-lépésre összevetjük a geometriai alakzatok ezen koncepcióját, a közönséges (elemi) geometria fogalmaival, az elvezet minket ahhoz, hogy keressünk egy általános elvet, amely szerint mindkét módszer fejlesztése lehetséges. Ez a kérdés fontosabbnak látszik, mint az elemi és projektív geometria mellett, rendszerbe foglalni egy sor más módszert, melyek bár kevésbé fejlettek, de megilleti őket ugyanaz az egyéni léthez való jog. Ilyen a vektornyalábok geometriája, a racionális transzformációk geometriája, és így tovább, amelyeket a továbbiakban fogunk említeni és leírni.

Abban a vállalkozásban, hogy a következő oldalakon felállítsunk egy ilyen elvet, aligha fogunk egy lényegében új ötletet kifejleszteni, inkább világosan megfogalmazzuk azt, ami már sok más szerzőben megfogant több-kevesebb határozottsággal. Mégis indokolhatónak tűnik e-fajta összekötő észrevételeket publikálni, haladva a független területek² összevetésében, mert a geometria, ami lényegében végül is egységes, túl sok részre bomlott egy sor gyorsan fejlődő különbözőnek tűnő elmélet hatására. Ugyanakkor befolyásolt még speciálisan az az óhaj is, hogy előadjak Lie és általam fejlesztett módszereket és nézeteket, jelen vizsgálatomban is. Ezek a tárgyakat képező objektumok természetében különböző vizsgálatok, ugyanahhoz az általános koncepcióhoz vezettek; így egyfajta

¹ Note I az appendixben. Az appendixet itt nem közöljük.-szerk.

² Note II

szükségszerűséggé vált az alapos megvitatása ennek az elemnek, és az ez alapján való jellemzése a vizsgálatok tartalmának és általános hatályának.

Bár eddig csak a geometriai vizsgálatokról beszéltünk, bele fogjuk venni a vizsgálatainkba a tetszőleges dimenziós³ sokaságokat is, melyek a tisztán matematikai vizsgálatok⁴ szempontjából nem lényeges geometriai kép absztrahálása útján fejlődtek ki a geometriából. A sokaságok vizsgálatában ugyanazok a különböző típusok lépnek fel mint a geometriában; és, mint a geometriában, a probléma az, mi a közös és mi a különböző az egymástól függetlenül végzett vizsgálatok alapján. Elvontan szólva, elegendő lenne végig az n -dimenziós sokaságokról beszélni; de egyszerűbbé és intelligensebbé válik a kifejtés a jobban ismert tér-felfogásnak a használatával. A geometriai objektumok figyelembe vétele és az általános ideák fejlődése folyamatában használva ezt mint példát, azt az ösvényt követjük, amit tudományunk választott a fejlődésében, és azt, ami általában a legjobb ennek az előadásnak a lefolytatására.

A következő oldalak tartalmának előzetes kifejtése aligha lehetséges itt, hiszen aligha lehet azokat tömörebb formában bemutatni⁵.

Az előadás végén csatolni fogok egy sor jegyzetet, amelyben vagy továbbfejlesztetek egy pontot, ahol az általános kidolgozása a szövegnek úgy tűnik, hogy ezt igényli, vagy megpróbálok a szöveg valamely meghatározó absztrakt matematikai észrevételéhez kapcsolódó szemléletet adni hivatkozással.

A térbeli transzformációk csoportja. Fundamentális csoport. Az általános probléma megfogalmazása.

A következőkben szükséges legfontosabb fogalom a térbeli transzformációk *csoportja*.

Kombinálva a tér akárhány transzformációját⁶ mindig egy egyszeri transzformációval ekvivalens transzformációt kapunk. Ha egy adott transzformáció rendszer rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely transzformáció bármely másikkal kombinálva szintén a rendszerhez tartozik, akkor a rendszert *transzformáció csoportnak* fogjuk nevezni⁷.

³ Note IV

⁴ Note III

⁵ A következő előadásnak hibája ez a tömörség, ami félelmem szerint a lényegének a megértését nehezíti. A nehézség azonban nehezen csökkenthető, hacsaknem egy teljesebb kidolgozással, amelyben a különböző, itt csak érintett tételek hosszabban ki lennének fejtve.

⁶ Minden esetben a tér alakzatainak az összességén tekintjük a hatását a transzformációnak, és ezért nevezzük *a tér transzformációinak* a vizsgálat tárgyait. Más elemeken mint a tér pontjai, is be lehet vezetni a transzformációkat, mint például a duális transzformációkat (polaritások); ebben az értelemben a szövegben nem teszünk különbséget.

⁷ [Ez a definíció nem teljes, hallgatólagosan azt is fel kell tennünk, hogy az említett

Egy példa transzformáció csoportra a mozgások összességére vonatkozik, minden mozgás tekinthető egy operációnak, mely a teljes téren hat. Ennek a csoportnak a részcsoportha, mondjuk, az egy pont körüli forgatásokból áll⁸. A másik oldalról, egy csoport, ami tartalmazza a mozgások csoportját a kollineációk csoportja. Ugyanakkor a duális transzformációk (korrelációk) összessége nem alkot csoportot; két korreláció kombinációja kollineáció. Azonban a duális transzformációkat a kollineációkhoz véve megint csoportot kapunk⁹.

Vannak olyan tér-transzformációk, amelyek a térbeli alakzatok geometriai tulajdonságait teljesen változtatlanul hagyják. A geometriai tulajdonságok, az alap idea szerint, függetlenek az alakzat térben elfoglalt helyétől, annak abszolút nagyságától, és végül a darabjai elrendezésének értelmétől¹⁰. Az alakzat tulajdonságai változtatlanok maradnak tehát minden térbeli mozgás, hasonlóság, és síktükrözés esetén ugyanúgy, mint ezen transzformációk tetszőleges kombinációja esetén. Ezen transzformációk összességét *fundamentális csoportnak*¹¹ nevezzük. Fordítva, *A geometriai tulajdonságok azzal jellemezhetők, hogy változtatlanok maradnak a fundamentális csoport elemeinek alkalmazása során*. Ha egy pillanatig a teret mozdíthatatlannak gondoljuk, azaz, mint egy merev sokaságot, akkor minden alakzatnak van egy egyéni karaktere; minden egyénileg hozzárendelhető karakter közül csak a valóban geometriai tulajdonságok őrződnek meg a fundamentális csoport elemeinek hatása alatt. Ez a fogalom, mely valamiképpen meghatározatlan fogalmazásunkban, világosabban újjá fog születni a kidolgozás során.

Szabaduljunk most meg a tér konkrét eszméjétől, ami a matematikusok számára nem lényeges, és tekintsük mindössze egy n -dimenziós sokaságnak, azaz, mondjuk három dimenziósnek, ha megőrizzük a szokásos fogalmát a pontnak mint egy térelemnek. A tér transzformációival analóg módon beszéljünk a sokaságok transzformációiról; ezek szintén csoportot alkotnak. De nincs a továbbiakban, mint, ahogy a térben volt, egy csoport, ami szignifikánsan különbözne

csoport minden operációjának az inverzét is tartalmazza; de, amikor az operációk száma végtelen, és ez nem jelent egy szükséges következményt a csoport fogalmának, ezt explicit módon csatolnunk kell a szövegben megadott csoport fogalmához.] A fogalmak, és a jelölések, a *helyettesítések elméletéből* valók, avval a különbséggel, hogy folytonos tartományok transzformációi helyett egy diszkrét mennyiség véges számú permutációinak a transzformációit tekintjük.

⁸ Camille Jordan előállította a mozgás csoport minden részcsoporthát.

⁹ Nem szükségszerű a transzformáció csoportra, hogy folytonosan öröklődjön, habár a szövegben említett csoportok valójában rendelkeznek evvel a tulajdonsággal. Például, egy szabályos testet magába vivő transzformációk, vagy ugyan végtelen, de diszkrét rendszere a szinusz görbét magába képező mozgásoknak szintén csoportot alkot

¹⁰ Az „értelme” alatt a nem tükrörszimmetrikus alakzatok darabjai elrendezését értjük. Eképpen, például jobb-sodrású és a bal-sodrású csavarvonal ellenkező „értelműek”.

¹¹ A tény, hogy ezek csoportot alkotnak a fogalmukból adódik.

a többitől; minden csoport egyformán fontos. Mint a geometria általánosítása merül fel a következő átfogó probléma:

Adott egy sokaság és ennek egy transzformáció csoportja; vizsgáljuk a sokasághoz tartozó konfigurációkat azon tulajdonságaikra tekintettel, melyek nem változnak a csoporthoz tartozó transzformációk hatása alatt.

Használva a modern terminológiát, amely rendszerint csak egy adott csoport-ra vonatkozóan használt, a probléma a következőképpen fogalmazható:

Adott egy sokaság és egy transzformáció csoportja; fejlesszük ki a csoport invariánsainak elméletét.

Ez az általános probléma, és ez magában foglalja nem csak a közönséges geometriát, de és különösen az újabb elméleteket, amelyek részletezését javasoljuk, továbbá az n -dimenziós sokaságok kezelésének különböző módszereit is. Különös hangsúlyt kell fektetni arra a tényre, hogy a transzformációk csoportjának a választása önkényes, és következésképpen minden kezelési módszer, ami teljesíti az általános feltételt ebben az értelemben egyenértékű.

Azon transzformáció-csoportok, melyek közül az egyik tartalmazza a másikat, sorozatosan adjungáltak. A különféle fajta geometriai vizsgálatok és egymáshoz való kapcsolatuk.

Ahogy a konfigurációk geometriai tulajdonságai változatlanok maradnak *valamennyi* a fundamentális csoporthoz tartozó transzformáció esetén, a kérdés jellege folytán képtelenség érdeklődni olyan tulajdonságok felől, amelyek csak a transzformációk egy részének esetében nem változnak meg. Ez a vizsgálat indokolttá válik azonban, mihelyt a tér alakzatainak a fixnek tekintett elemeihez való viszonyát vizsgáljuk. Példaként tekintsük a tér alakzatait egy adott pontra vonatkoztatva, ahogy a szférikus trigonometriában. A probléma most leírni azon tulajdonságokat, amelyek a fundamentális csoport transzformációi alatt invariánsok maradnak, nem csak a függetlenül vett alakzatokra, hanem arra a rendszerre nézve, mely a referencia ponttal együtt tekinti az alakzatokat. Felírhatjuk ezt a problémát másik alakban is: vizsgálni a tér konfigurációit olyan tulajdonságokra vonatkozóan, amelyek a fundamentális csoport azon transzformációi alatt változatlanok, amelyek addig hatnak, amikor a pont fixen marad. Más szavakkal, ez ugyanaz, mint amikor mi a fundamentális csoport szemszögéből tekintjük a ponttal kapcsolatban álló alakzatokat, vagy ilyen kapcsolat nélkül, helyettesítjük a fundamentális csoportot valamelyik részcsoportjával, amely transzformációi a kérdésben szereplő pontot változatlanul hagyják.

Ez az elv az, amit mi kiemelten alkalmazunk; ezért a következőkben általánosan megfogalmazzuk:

Adott egy sokaság és egy transzformáció csoport, amelyet alkalmazunk rá. Javasoljuk a sokasághoz tartozó alakzatok vizsgálatát egy adott alakzathoz viszonyítva. *Lehet tehát a rendszerhez adni egy adott alakzatot, és ekkor vizsgálunk*

kell a kiterjesztett rendszer tulajdonságait az adott csoport szemszögéből, vagy hagyni a rendszert kiterjesztetlenül, meghatározva azokat a transzformációkat a csoportból, melyek az adott konfigurációt változatlanul hagyják. (Ezek a transzformációk szükségszerűen maguk is csoportot alkotnak.)

Tekintsük most a fejezet elején felvetett probléma fordítottját. Ez érthető a kezdetektől fogva. Az alakzatok azon tulajdonságai iránt érdeklődünk, amelyek változatlanok egy olyan transzformáció-csoport elemeire nézve, amely a fundamentális csoportot részeként tartalmazza. Minden tulajdonság, ami ezen a módon található, egy geometriai tulajdonsága magának az alakzatnak; de a fordított állítás nem igaz. A fordított problémában alkalmaznunk kell egy most kimondott elvet, mert a fundamentális csoport a kisebb. Azaz: *Ha a fundamentális csoportot egy átfogóbb csoporttal helyettesítjük, csak egy része marad a geometriai tulajdonságoknak változatlan. A maradékok nem lépnek fel többet önmagukban, mint a tér konfigurációinak tulajdonságai, hanem mint egy partikuláris alakzathoz kapcsolt rendszer tulajdonságai.* Ezen utóbbi annyira definiált, mint a konfiguráció maga ⁷, a következő feltétellel: *A feltétel, hogy fix, meg kell hogy szorítson minket azokra a csoportbeli transzformációkra, amelyek a fundamentális csoporthoz tartoznak.*

Ebben a tételben található a különlegessége a legutóbbi geometriai módszernek, amit itt tárgyalunk, és kapcsolata az elemi módszerrel. Ami karakterizálja őket éppen ez, hogy a vizsgálatuk egy kiterjesztett transzformáció csoport alapján történik, ahelyett, hogy a fundamentális csoport alapján történne. Az egymáshoz való kapcsolatuk egy megfelelő tétel alapján definiált, amikor az egyik csoport tartalmazza a másikat. Ugyanez igaz az n -dimenziós sokaságok felépítéséhez használt számos általunk vett módszer esetén is. Most áttekintjük a különböző módszereket ebből a szempontból, és ez lehetőséget ad arra vonatkozóan, hogy kifejtsük konkrét példákon az ebben és a megelőző fejezetben általános formában idézett tételeket.

⁷ Ilyen alakzat generálható, például, alkalmazva a fundamentális csoport transzformációit olyan tetszőleges elemre, amely semmilyen fundamentális csoporthoz tartozó transzformációval sem transzformálódik magára.

Babits Mihály: Húnyt szemmel...

Húnyt szemmel bérceken futunk
s mindig csodára vágy szívünk:
a legjobb, amit nem tudunk
a legszebb, amit nem hiszünk.

Az álmok síkos gyöngyeit
szorítsd, ki únod a valót:
hímezz belőlük
fázó lelkedre gyöngyös takarót.

4. fejezet

Modellek

Az axiomatikus kérdések szorosabb vizsgálatánál elengedhetetlen olyan mesterséges geometriák definiálása, melyek az axiómákban megkövetelt tulajdonságok közül néhányat teljesít, másokat nem. Ezen struktúrákat összefoglaló néven modelleknek nevezzük. Bizonyos modellek inkább csak arra hivatottak, hogy valamely állítás tagadására adjanak kézzelfogható példát, mások felhasználási köre sokkal szélesebb, a modellezett geometria igaz állításainak szemléltetése, bizonyítása is elképzelhető a segítségükkel.

Ebben a fejezetben a klasszikus geometriák axióma rendszeréhez kapcsolható érdekes és fontos modelleket gyűjtöttünk össze. Előfordulhat, hogy ezen fejezet néhány pontjának megértéséhez a könyvünk más későbbi fejezeteinek, vagy a matematika más ágainak némi ismerete is szükséges, mindazonáltal a könyvben található modellek egy helyen való tárgyalása a könyv használatát biztosan megkönnyíti.

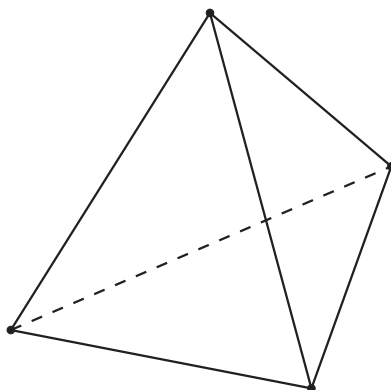
4.1. Ellenpélda modellek

... a kutatás céljaihoz kombinálni kell az intuíciót az axiómákkal.

Felix Klein

4.1.1. A kombinatorikai modell

Tetszőleges n -dimenziós tér illeszkedési struktúrája modellezhető egy n -elemű halmaz hatványhalmazán. Tehát az illeszkedési axiómák teljesüléséből nem adódik a pontok számának végtelen volta. Az egyelemű halmazok a pontok, a kételeműek az egyenesek, a háromelemű részhalmazok a síkok, stb.. Így illeszkedési axiómáinkat kielégítő modell a négyelemű halmaz részhalmazai által definiált modell.

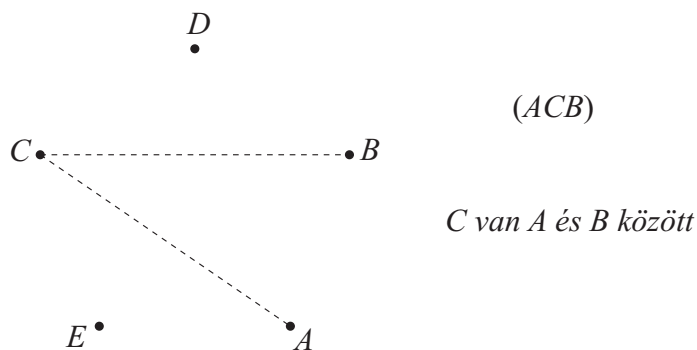


4.1. ábra. Négypontú modell

4.1.2. A rendezett egyenes ötpontú modellje

Ezen modell példázza azt az észrevételt, hogy az egyenes számára kijelölt rendezés önmagában nem jelenti, hogy végtelen sok pont van az egyenesen.

Tekintsük egy szabályos ötszög csúcsait pontoknak, az öt csúcs alkossa egy egyenes pontjait. Három pont közül az egyik a másik kettő között helyezkedik el, ha az általuk mint csúcsok által definiált egyenlőszárú háromszög szárainak ez a közös pontja. Az egyenes pontjaira vonatkoztatott rendezési axiómák a modellben teljesülnek, de az egyenesnek csak öt pontja van.



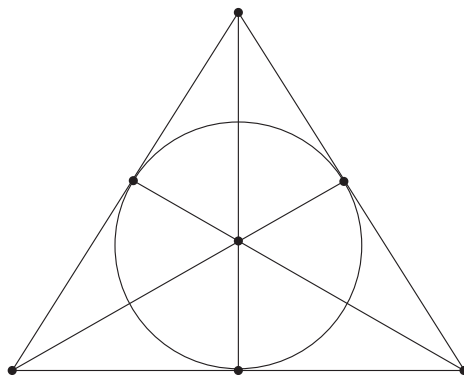
4.2. ábra. Ötpontú egyenes modell

4.1.3. A Fano-féle hétpontú sík

Különösen fontos példa a Fano sík modellje. Ebben érvényesek a síkra vonatkozó illeszkedési axiómáink, tetszőleges két egyenes metszi egymást, tehát nem teljesülhetnek a rendezési axiómák, de az egyenes és pont fogalmak tekintetében az érvényes állítások teljes szimmetriát mutatnak, az érvényes

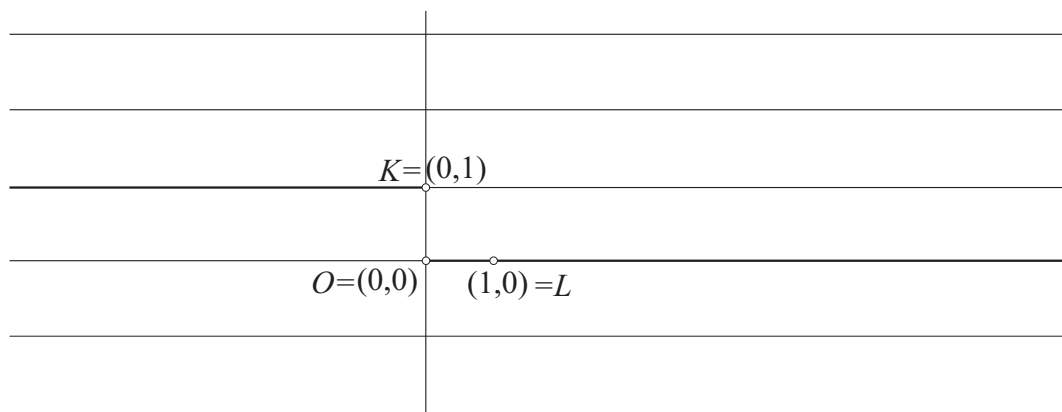
axiómarendszer önduális. Ez a legkisebb számosságú példa projektív síkgeometriára.

A pontok egy szabályos háromszög csúcspontjai, oldalának felezőpontjai illetve középpontja. Az egyenesek a szokásos értelemben kollineáris ponthármasok illetve a három oldalfelező pont által alkotott hármas, így a síkon 7 pont és 7 egyenes található.



4.3. ábra. Hétpontú síkmodell.

4.1.4. Veronese példája nem Archimédész rendezett egyenesre



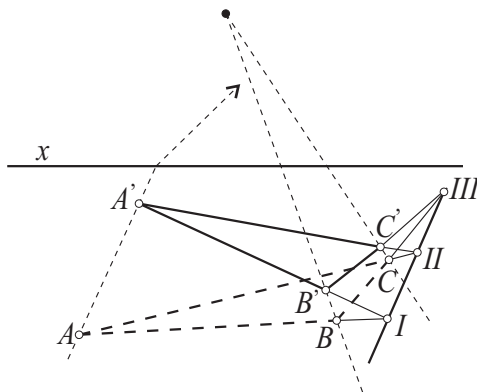
4.4. ábra. A nem-archimédész rendezett egyenes

Veronese egyenes modellje példa Archimédész axiómáját nem teljesítő egyenesre, melyen a pontok rendezetten vannak elhelyezve, így a rendezés és egybevágóság lineáris axiómái teljesülnek a Cantor axiómával együtt.

Tekintsük a kétdimenziós euklideszi síkot. Modellünk pontjai tartoznak egy derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatott egész értékű második koordinátával rendelkező pontok által meghatározott vízszintes egyenesek rendszeréhez. Vezessük be a modell pontokon azt a rendezést, mely a sík pontjainak antilexikografikus rendezéséből származik. Azaz $(x, y) < (x', y')$ ha $y < y'$ vagy ha $y = y'$ és $x < x'$. (PQR) akkor álljon fenn, ha $P < Q < R$ teljesül. Két szakasz egybevágósága legyen a következő: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, ha $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ párhuzamosak és egyenlő hosszúak. Ekkor a rendezés lineáris axiómái mellett az egybevágóság lineáris axiómái is teljesülni fognak. A Cantor axióma teljesülése nyilvánvaló, az Archimédészi axióma pedig a $\overline{OK}$, $\overline{OL}$ szakaszpárra nyilván nem teljesül, ha $O = (0,0)$, $K = (0,1)$ és $L = (1,0)$.

4.1.5. Moulton példája nem Desargues-i síkra

Desargues tétele szerint két háromszög pontra nézve perspektív ha egyenesre nézve az és fordítva. Meg tudunk adni olyan geometriát, amelyben a (projektív) síkgeometria illeszkedési axiómái érvényesek, de Desargues tétele nem. Az alábbi példa Moulton-tól származik.



4.5. ábra. Desargues tétel nem igaz Moulton síkján

Az euklideszi sík pontjai alkossák a modell pontjait. Húzzunk valahol egy vízszintes egyenest (x -tengely) és tekintsük az ezzel párhuzamos, erre merőleges egyenesekkel együtt a negatív meredekségű közöséges egyeneseket. Ezekkel együtt egyenesnek nevezzük azokat a szögvonalatokat, melyek csúcsa az adott egyenesre esik és szárait alkotó félegyenesek pozitív meredekségűek úgy, hogy a felső félsíkba eső rész iránytangense fele az alsó félsíkba eső párjának. A modellben teljesülnek a síkra vonatkozó illeszkedési axiómáink, sőt alkalmas kiegészítő definícióval a projektív sík illeszkedési axiómái is. Ugyanakkor világos, hogy nem teljesül a Desargues tétel (lásd 4.5. ábra).

4.1.6. Nem-archimédieszi kommutatív számtest

Hilbert igazolta, ha egy rendezett számtest nem kommutatív, akkor abban nem érvényes az Archimédieszi folytonossági axióma. A következő példa kommutatív rendezett számtestet ad meg, melyben nem érvényes Archimédész axiómája.

Tekintsük a valós racionális törtfüggvények kommutatív testét. Ennek egy függvénye nagy értékekre konstans előjelű. Ha egy elem nagy értékekre pozitív azt mondjuk, hogy nagyobb a konstans 0 függvényénél. Két elem különbsége ha pozitív, akkor az amiből kivontunk nagyobb annál, mint amit kivontunk. Világos, hogy testünket ezen a módon rendeztük. Ugyanakkor $k > l$ esetén minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $x^k > nx^l$, így a testben nem teljesül az archimédieszi axióma.

4.2. Poincare gömb és féltér modellje

A geometria axiómái csak definíciók álruhában.

H. Poincare

A Poincare-féle gömb modell egy euklideszi kör vagy gömb belső pontjaival modellezzik a hiperbolikus sík illetve tér pontjait. Az egyeneseket a kört vagy gömböt merőlegesen metsző egyenesek vagy körök reprezentálják, a síkot a modellgömböt merőlegesen metsző gömbök. (Illetve ezeknek a modellbe eső darabjai.) Világos, hogy a modellben a párhuzamossági axióma hiperbolikus változata érvényes. A modell legyen konformis, azaz kössük ki, hogy a modellbeli metsző egyenesek és körök pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha azon hiperbolikus egyenesek merőlegesek, amelyeket reprezentálnak. A merőlegesség rögzítése után adódik tetszőleges két görbe hajlásszögének értelmezése, a közös pontbeli érintők hajlásszögeként, ez is az euklideszi értékkel egyezik meg. A távolság mérése a köri kettősvizony értelmezése után egyszerű a két ponton átmenő egyenest reprezentáló körnek a határgömbbel való metszéspontjai segítségével. Ha A és B két pont, az egyenesük végtelen távoli pontjai U és V oly módon, hogy a reprezentáló körön a ciklikus rendezésnek megfelelően az A, B, U, V sorrendben követik pontjaink egymást, akkor legyen az $\overline{AB}$ szakasz hossza az $(ABUV)$ köri kettősvizony logaritmus.

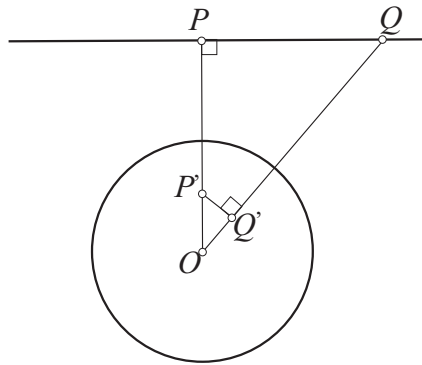
A gömbmodellhez kapcsolódó egyik legfontosabb ismeret, hogy a hiperbolikus egybevágóság csoport az euklideszi sík egy önmagában is fontos leképezése – az inverzió – segítségével könnyen leírható. Szükségünk lesz az inverzió fogalmára és a kapcsolódó alaptételre.

4.2.1. Inverzió és tükrözés

4.2.1. Definíció. Rögzítsünk egy O kezdőpontot és egy r -sugarú O középpontú gömböt a térben. Az O -tól különböző P pont inverzív képe az az OP félegyenesen egyértelműen létező P' pont, mely rendelkezik az $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ tulajdonsággal. A térbeli pontokhoz inverzív képüket rendelő leképezést, a fenti gömbhöz tartozó inverziónak nevezzük.

Az inverziót egy az O ponton áthaladó síkra megszorítva a körre vonatkozó inverzióhoz jutunk. Erre vonatkozóan igaz az alaptétel:

4.2.1. Tétel. A körre vonatkozó inverzió kör és szögtartó, azaz kört vagy egyenest, körbe vagy egyenesbe visz, és görbék hajlásszögét nem változtatja meg. A gömbre vonatkozó inverzió a fenti tulajdonságok mellett gömböt vagy síkot gömbbe vagy síkba visz.



4.6. ábra. Inverzió

Bizonyítás: Maga az inverzió alapköre pontonként fix.

Az O -n keresztülhaladó egyenes képe invariáns egyenes, azaz a körbe eső darabja a leképezésnél felcserélődik a körön kívüli részével.

Az O pontot nem tartalmazó egyenes képe O -n keresztül haladó lyukas körvonal (maga O nem áll elő képként) mivel a 4.6. ábra jelöléseit használva felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$|OP'| \cdot |OP| = |OQ'| \cdot |OQ| \iff \frac{|OP'|}{|OQ'|} = \frac{|OQ|}{|OP|},$$

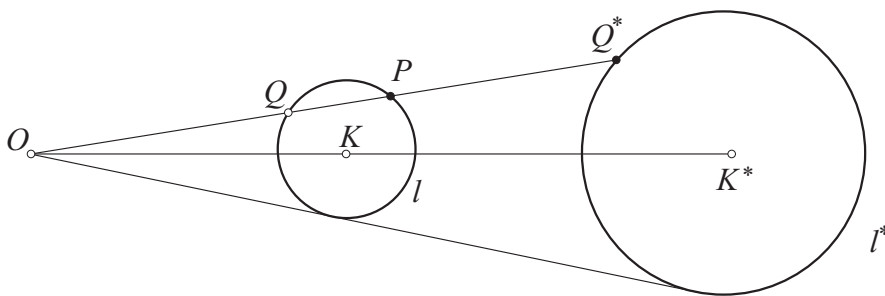
ahonnan adódik, hogy az $OP'Q'_\Delta$ és OQP_Δ háromszögek hasonlóak. Így azt kapjuk, hogy a $P'Q'O_\Delta$ szög derékszög. Így tetszőleges Q pont Q' képe az OP' -re mint átmérőre írt Thalész körön van rajta, ami állításunkat igazolja.

Ebből már az is következik, hogy O -t tartalmazó kör képe O -t nem tartalmazó egyenes.

Végül igazoljuk, hogy egy O -t nem tartalmazó l kör képe szintén kör. Ezen észrevétel igazolásához nézzük a 4.7. ábrát. Legyen P az adott l kör tetszőleges pontja, melyhez kapcsolódóan tekintsük az OP egyenesnek az l -el való másik metszéspontját Q -t is. Ekkor az $|OQ| \cdot |OP| = p$ szorzat a P ponttól független állandó. (Ez az O pont l -re vonatkozó hatványa.) Alkalmazzunk most az O középpontú $1 : p$ arányú hasonlóságot. A hasonlóságnál K képe K^* , Q képe pedig Q^* valamint l kör az l^* körbe megy át. Ekkor

$$|OQ^*| \cdot |OP| = \frac{|OQ|}{p} \cdot |OP| = 1,$$

azaz Q^* a P pont inverze az inverzió k alapkörére nézve. Ebből már adódik, hogy az inverzió az O -ból $\frac{1}{p}$ arányú hasonlósággal kapott l^* körbe viszi l -t oly módon, hogy a közös érintők által meghatározott két körívet felcseréli.



4.7. ábra. Kör inverz képe

Két görbe hajlásszöge alatt a metszéspontban meghúzott érintők hajlásszögét értjük. (Mely mindig hegyes vagy derékszög.) Tekintsük külön azt az esetet mikor a 4.8. ábrának megfelelően a két görbe e_i kör vagy egyenes illetve képeik (k_i) úgyszintén azok.

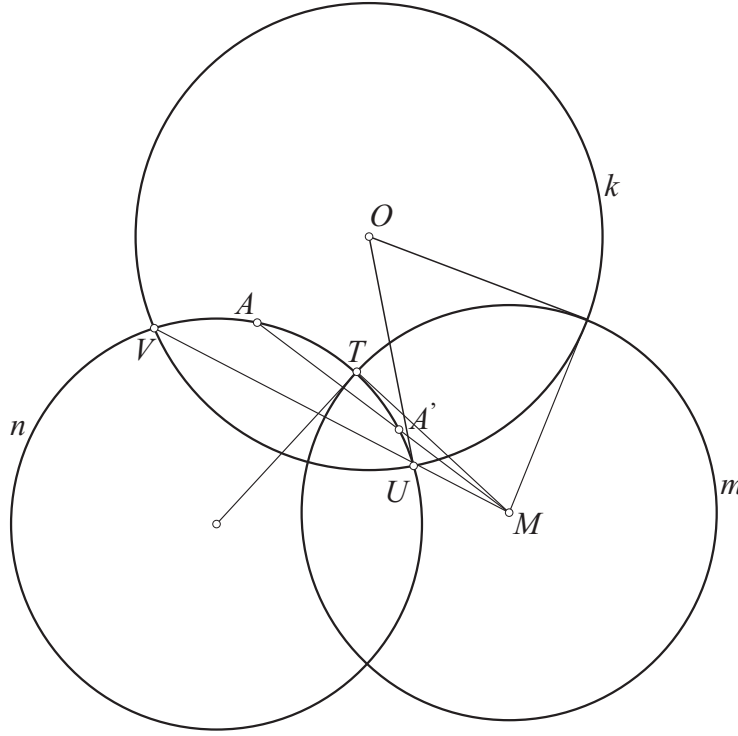
A vizsgált metszéspont M annak képe M' . (Az ábrán e_i -vel az érintőket jelöltük.) Az O pontból merőlegest bocsátva az e_i egyenesekre az f_i egyeneseket kapjuk, ezen egyenesek hajlásszöge az M -nél fellépő hegyesszöggel megegyezik a merőleges szárú szögek tétele alapján. Az f_i egyenes messe OM' szakaszfelezőmerőleges egyenesét O_i -ben. A második rész szerint az e_i érintőegyenesei képei körök melyeknek középpontjai éppen O_i , hiszen O, M' a képek közös pontjai, E_1, F_1 az első képkör pontpárja, míg E_2, F_2 a másodiké. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy O_iM' merőleges az e_i képének M' -beli t_i érintőjére. Mivel az O_1, O_2 egyenesre vonatkozó szimmetria miatt az $O_1M'O_2 \angle = O_1OO_2 \angle$, ezért újra használva a merőleges szárú hegyesszögekre vonatkozó tételt, kapjuk, hogy valóban teljesül az $(e_1, e_2) \angle = (t_1, t_2) \angle$ egyenlőség.



4.2.1. Megjegyzés. A modellgömb középpontján keresztülhaladó síkra vonatkozó euklidészi tükrözést szintén inverziónak nevezzük, bizonyításunk ebben az esetben is lekövethető, a beágyazó valós projektív térben nem is lehetne a két esetet megkülönböztetni egymástól.

Bizonyítás: A tétel bizonyításához egy pont síkra vonatkozó tükörképét kell megkeresnünk, mert modellünk abszolút teret modellez. Ehhez viszont elegendő az adott pont és modellgömb középpontján átmenő az adott síkra merőleges síkra korlátozni vizsgálatunkat. Így síkbeli ábrát rajzolhatunk (4.9. ábra), amelyen A jelöli pontunkat, m jelöli az adott sík és az ábra síkjának metszéspontját O és k a modellgömb középpontját illetve az ábra síkjával való főkör metszetét. Az A -ból m -re állított merőleges n egyenest olyan körív reprezentálja, mely merőleges m és k körívekre és átmegy A -n. Az m -re vonatkozó inverzió A -t az n körív egy A' pontjába viszi az m és n körök T metszéspontját helyben hagyja, míg az n kör k -val való U és V metszéspontjai helyet cserélnek, ezért az A, T, U, V pontnégyes az inverzióal

az A', T, V, U pontnégyesbe megy át. Az első kettősvizonyának logaritmus az A és T pontok távolsága a második az A' és T pontoké. Ha igazoljuk, hogy a két pontnégyes kettősvizonya megegyezik a tételt bizonyítottuk.



4.9. ábra. A tükrözés inverzió

Ehhez tekintsük a merőleges n egyenest reprezentáló kört, és az m egyenest reprezentáló kör M középpontját. M -ből mint külső pontból húzott egyenesek az (MUV) , $(MA'A)$ illetve (MT) egyenesek. Ezért az MUT_{Δ} , MTV_{Δ} háromszögek hasonlósága miatt fennáll:

$$\left(\frac{|\overline{TU}|}{|\overline{TV}|}\right)^2 = \frac{|\overline{MU}|}{|\overline{MV}|},$$

összefüggés, ahonnan az

$$\frac{|\overline{MU}|}{|\overline{MV}|} = \frac{|\overline{MU}|}{|\overline{MA'}|} \frac{|\overline{MA'}|}{|\overline{MV}|},$$

azonosság segítségével, felhasználva, hogy az MUA_{Δ} , $MA'V_{\Delta}$ háromszögek is hasonlóak, adódik, hogy

$$\left(\frac{|\overline{TU}|}{|\overline{TV}|}\right)^2 = \frac{|\overline{AU}|}{|\overline{AV}|} \frac{|\overline{A'U}|}{|\overline{AV}|} = \frac{|\overline{AU}|}{|\overline{AV}|} \frac{|\overline{A'U}|}{|\overline{A'V}|}.$$

Mivel a fenti pontok ugyanazon kör pontjai a szakaszokhoz tartozó kerületi szögekre a szinusz tétel szerint a fenti egyenletet átírva, kapjuk, hogy

$$\frac{\sin AVU_{\angle} \sin A'VU_{\angle}}{\sin AUV_{\angle} \sin A'UV_{\angle}} = \left(\frac{\sin TVU_{\angle}}{\sin TUV_{\angle}} \right)^2.$$

Alkalmasan átrendezve ezt, majd kerületi szögek tétele szerint a kör valamely S pontjából a vizsgált pontokhoz húzott sugarak kettősviszonyára így a következő összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned} (ATUV) &= \frac{\sin ASU_{\angle} \sin VST_{\angle}}{\sin UST_{\angle} \sin A'SV_{\angle}} = \frac{\sin AVU_{\angle} \sin VUT_{\angle}}{\sin UVT_{\angle} \sin A'UV_{\angle}} = \\ &= \frac{\sin TVU_{\angle} \sin VUA'_{\angle}}{\sin UVA'_{\angle} \sin VUT_{\angle}} = \frac{\sin TSU_{\angle} \sin VSA'_{\angle}}{\sin USA'_{\angle} \sin VST_{\angle}} = (TA'UV). \end{aligned}$$

Azaz a két szakasz hiperbolikus hossza megegyezik egymással. $\square$

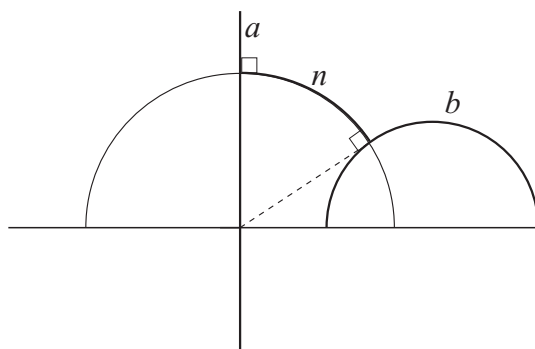
A tétel következménye, hogy a hiperbolikus tér egybevágóságai a modellt merőlegesen metsző gömbökre vonatkozó inverziók szorzataként állnak elő.

4.2.2. A féltérmodell és a normáltranszverzális

A térelemek merőleges transzverzálisainak kérdései – a gömb modellben – a beágyazó euklideszi tér inverzióval kezelhető problémáiként jelentkeznek. A kapott feladatok megoldását egy közös "nulladik" lépés elvégzésével vissza lehet vezetni egy egyszerűbb feladat megoldására. Ezen lépés egy önmagában is érdekes szituációhoz vezet, megalkotódik a hiperbolikus tér Poincare-féle másikk modellje, a féltér modell. A modell a matematika számos területén bukkan fel újra így nem érdektelen bevezetnünk. A Poincare gömbmodelljének inverzív képe egy gömbre melynek középpontja a gömbmodell egyik határpontja, egy féltérbe transzformálja a modell belsejét, a modellbeli egyeneseket, síkokat, köröket, gömböket pedig szögtartó módon képezi le a határoló síkra merőleges egyenesekre, síkokra, körökre, gömbökre. A kapott féltér szintén konformis modell. Előnye, hogy az inverzió kezdőpontjának szabad választása miatt, minden konkrét feladatban egy térelem reprezentánsát az általánosság megszorítása nélkül választhatjuk egyenesnek vagy síknak. Ezt külön indoklás nélkül (a metrika bevezetése előtt) nem tehetjük meg a gömbmodellben. A következő tétel a féltér modell alkalmazhatóságát jól mutatja.

4.2.3. Tétel. *A hiperbolikus térben ultraparallel egyenes pár, egyenes-sík pár illetve sík pár normáltranszverzálisa egyértelműen létezik.*

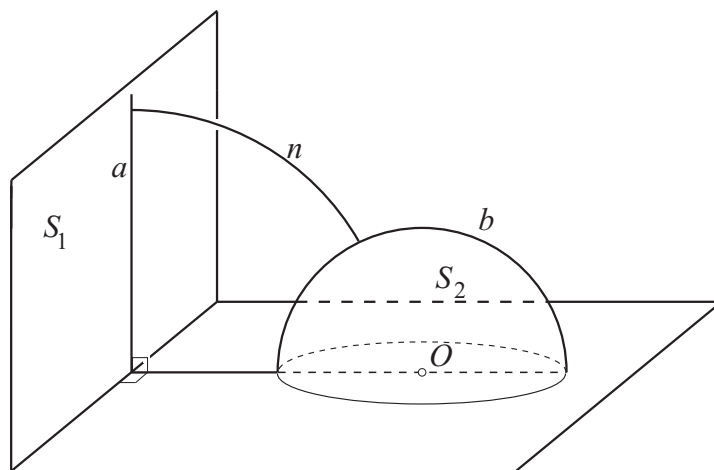
Bizonyítás: A síkbeli egyenespárra vonatkozó bizonyítás – miután az egyik egyenest egyenessel reprezentáltuk a 4.10. ábráról leolvasható.



4.10. ábra. Kitérő síkbeli egyenespár normáltranszverzálisa

Az egyenes-sík párosításnál feltesszük, hogy az egyenes egyenesként reprezentálódik. Ekkor az egyenes és a síkot reprezentáló gömb középpontja által meghatározott sík, az előző esetnek megfelelő helyzetet hoz létre. A metszet és az adott egyenes transzverzálisa, egyben az adott egyenes és az adott sík transzverzálisa is.

A két kitérő sík esetén hasonlóan járunk el, csak az egyik síkot síkkal reprezentáljuk, és ezen sík és a határsík metszésvonalára merőleges, a másik síkot reprezentáló gömb középpontján keresztülhaladó síkkal metsszük a kiindulási síkot, ahogy azt a 4.11. ábrán láthatjuk.



4.11. ábra. Kitérő síkok normáltranszverzálisa

A legérdekesebb eset két nem egysíkú egyenes normáltranszverzálisanak megadása a féltér modellben.

Az egyik egyenesről a -ról feltesszük hogy merőleges a határoló félsíkra. Ekkor b körként reprezentálódik úgy, hogy az a A illetve a b B és C végtelen

[illegible]

Tekintsük az A, B, C pontok köré írt k kört illetve azt a félgömböt mely a modell félterében van és főköre k . Legyen az $\overline{BC}$ felezőpontja F és a szakasz szakaszfelezőmerőlegese messe k -t az A pontot nem tartalmazó ívén D -ben. Az $\overline{AD}$ messe $\overline{BC}$ -t S -ben. Jelölje N a félgömb és az S -ben a határoló síkra állított egyenes metszéspontját. Az a és b egyeneseket egyaránt metsző rájuk merőleges n egyenes reprezentáló köre ekkor az A középpontú N -en áthaladó a határoló síkra merőleges kör. Valóban ez mindkét egyenest metszi és a -ra nyilvánvaló módon merőleges. Igazolnunk kell tehát, hogy b -t is merőlegesen metszi. b érintője N -ben legyen t_b , az n egyenesé t_n . t_b a b -t reprezentáló kör síkjában van így merőleges az ezen síkra merőleges FD egyenesre, továbbá a kör NF sugarára így merőleges az ND egyenesre is. Az AND_Δ háromszög az $\overline{AD}$ -ra mint átmérőre rajzolt félkörbe írt háromszög ezért N -nél derékszöge van, így ND az N pontbeli érintője az n körívnek, azaz t_n -el egyezik meg. Így a két érintővel együtt a két körív is merőleges egymásra, amivel állításunkat igazoltuk. $\square$

Tetszőleges két azonos sugarú síkbeli kör a középpontokat összekötő szakasz szakaszelező merőlegesére tükrözve egymásba megy át, így tetszőleges hiperbolikus kör inverzióval a modell kör középpontú hiperbolikus körbe vihető.

Ezek nyilván körök így az inverzió körtartása miatt a modell belsejében elhelyezkedő euklidészi körök a hiperbolikus sík körei.

A paraciklus végtelen tartójú sugársor ortogonális trajektóriája, ezért a modellkört a tartóban érintő körvonal adja meg. Hasonlóképpen a adott egyeneshez mint alapvonalhoz tartozó hiperciklusok az egyenesnek a modellkörrel való metszéspontjain keresztülhaladó körvonalak. Az inverzió kör és szögtartása miatt a félsík modell ciklusai szintén körök vagy egyenesek a végtelen távoli pontok száma szerint kör, paraciklus vagy hiperciklus. A 4.13. ábrán a két modell ciklusait láthatjuk.

4.2.4. Egybevágóságok a félsíkmodellben

Azonosítsuk most félsíkmodellünket a komplex számsík felső félsíkjával.

4.2.4. Tétel. *A hiperbolikus sík egybevágóságainak csoportja és a $PSL_2(\mathbb{R})$ mátrixcsoport izomorfak egymással.*

Bizonyítás: Defináljuk a félsíkmodell távolságát a

$$ds = \frac{1}{\operatorname{Im} z} dz$$

ívelem szerinti integrálással. Mint később látni fogjuk (ld. 6.5.2 alfejezet) ez a féltérmodellben megadott távolságfogalmunk egy lehetséges analitikus leírása. Világos, hogy a

$$z \mapsto z + b, \quad z \mapsto az \quad \text{illetve} \quad z \mapsto -\frac{1}{z}$$

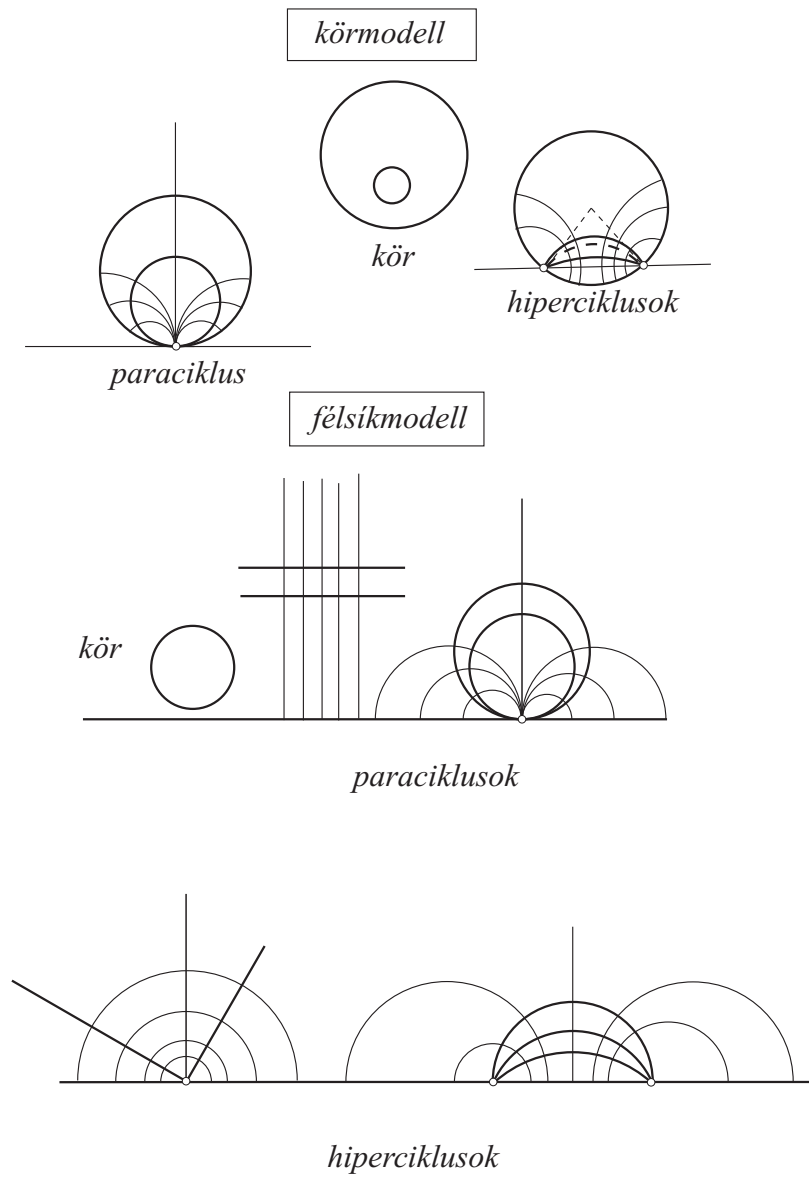
leképezések egybevágóságok és a

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad ad - bc \neq 0$$

feltételeket kielégítő Möbius transzformációk csoportját a fenti leképezések generálják. Ezen utóbbi csoport azonban izomorf a $PSL_2(\mathbb{R})$ mátrixcsoporttal, és tranzitívan hat a hiperbolikus sík ponthármasain. Mivel az egybevágóságok egyértelműen meghatározottak három nem kollineáris pontjuk képe által, az állítást igazoltuk. $\square$

4.2.5. Tétel. *A fenti modell geodetikusan a valós tengelyre merőleges körök és egyenesek.*

Bizonyítás: Mint korábban láttuk a függőleges egyenesek geodetikusak. Mivel a Möbius transzformációk tranzitívan hatnak a valós tengelyre merőleges körök és egyenesek halmazán, ezen állítás is nyilvánvaló. $\square$



4.13. ábra. Ciklusok Poincare modelljeiben

4.3. A Cayley-Klein vagy projektív modell

Feltéve, hogy a tapasztalati terünk csak közelítőleg euklidészi, milyen következtetésre juthatunk? Nem arra, hogy az euklidészi geometria állításai csak közelítőleg igazak, hanem abszolút igazak egy olyan Euklidészi térben, amelyet oly sokáig tartottunk a tapasztalataink fizikai terének.

A. Cayley

4.3.1. Térelemek kölcsönös helyzete, valós projektív tér

A projektív modell kínálja a legegyszerűbb lehetőséget egyenes-egyenes, egyenes-sík, sík-sík kölcsönös helyzeteinek egyöntetű vizsgálatára. A pont, egyenes, sík objektumok közös neve a továbbiakban térelem. A közös szemléletű definiálás lehetőségét három tér egymásba skatulyázott modellje kínálja. Igazából térelemek kölcsönös helyzetének vizsgálata során a pontot mint térelemet nem vesszük számításba.

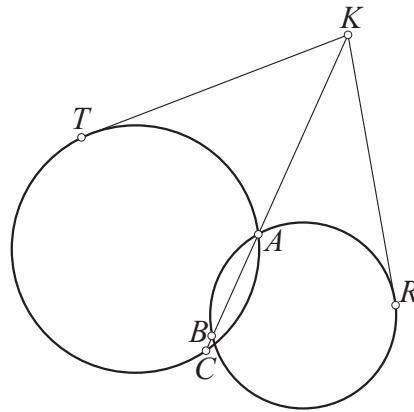
Az 1.3.1 Tétel szerint az euklideszi tér egyenesei a párhuzamosság reláció alapján ekvivalencia osztályokba sorolódnak. Ezen osztályokhoz rendelhető egy új objektum, melyet az osztály egyenesei által meghatározott végtelen távoli pontnak nevezünk. Adott síkhoz tartozó végtelen távoli pontok összessége a sík végtelen távoli egyenesé. A tér végtelen távoli pontjai a tér végtelen távoli síkját adják (jele I). Amikor ezen módon bővítjük az euklideszi teret az *valós projektív térhez* jutunk. A valós projektív teret $P\mathbb{R}^3$ -el jelöljük. Ha $P\mathbb{R}^3$ egy síkját megkülönböztetve a többitől végtelen távoli síknak nevezünk, akkor az euklideszi tér egy modelljét definiáltuk a valós projektív téren belül. A beágyazott $P\mathbb{R}^3 \setminus I$ euklideszi térnek jelöljük ki egy G nyílt gömbjét. Ez adja a hiperbolikus tér egy projektív modelljét. A G gömb határpontjait (bd G elemeit) a hiperbolikus tér *végtelen távoli*, a modell külső pontjait a hiperbolikus tér *ideális pontjainak* nevezzük. (A beágyazó euklideszi tér végtelen távoli pontjait, I elemeit, is a hiperbolikus tér ideális pontjainak hívjuk. Az euklideszi tér vonatkozásában ezen pontokra mindkét jelzőt használhatjuk.)

A valós projektív tér definíciója szerint $P\mathbb{R}^3$ térelemei metszők vagy nem metszők lehetnek, ezen utóbbi eset akkor és csak akkor fordul elő ha két projektív egyenes térbeli kölcsönös helyzetét vizsgáljuk. A beágyazott euklideszi térre ezen két szituáció oly módon öröklődik, hogy ha a projektív térelemek metszetének van I -be nem eső pontja, akkor euklideszi értelemben is metsző a két térelem, ha teljes nem üres metszetük I -hez tartozik euklideszi értelemben *párhuzamosaknak* nevezzük őket, ha a térelemek metszete üres az elnevezésük a *kitérő*. Az általános terminológiát átvihetjük a hiperbolikus térre a következő definícióval:

4.3.1. Definíció. Két térelem metsző ha van közös pontjuk G -ben, párhuzamos ha nincs közös pontjuk G -ben de van közös pontjuk bdG -ben, kitérő vagy ultraparallel egyébként.

4.3.2. Térelemek merőlegessége a projektív modellben

4.3.1. Lemma. Ha két metsző körhöz, azok közös külső pontjából húzott érintőszakaszok egyenlők, akkor a pont a két kör közös húrjának egyenesére esik.



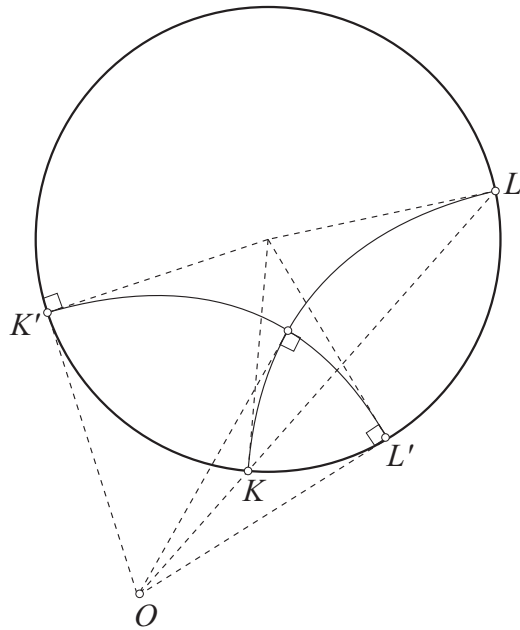
4.14. ábra. A hatványvonal.

Bizonyítás: Legyen K a külső pont. Kössük össze K -t az egyik metszésponttal A -val. A másik két metszéspont legyen B és C . A külső pontból húzott szelők tétele szerint, ha r az érintőszakaszok közös hossza, akkor $|KA||KB| = r^2 = |KA||KC|$, ahonnan $B = C$ az állításunkat igazolja. $\square$

4.3.2. Definíció. A kör egy húrpárja konjugált, ha az egyik egyenese tartalmazza a másik végpontjaiban a körhöz húzott érintők metszéspontját.

4.3.2. Lemma. A hiperbolikus sík két merőleges egyenese a síkot modellező projektív modellben konjugált húrpárt ad.

Bizonyítás: Legyen az egyik egyenesünk két vége K, L a hiperbolikus síkon rá merőleges egyenesé pedig K', L' . Tekintsük a K, L pontpárban a modell-kört merőlegesen metsző kört, és ugyanúgy a K', L' pontpárban merőlegesen metsző kört. Ezen két kör egymást pontosan akkor metszi merőlegesen, ha a hiperbolikus síkon merőlegesek egymásra egyenesek. Ugyanakkor merőlegességükből adódik, hogy a második kör középpontján O -n áthalad a metszéspontban az első körhöz húzott érintő. Előző lemmánk szerint éppen az állítás adódik. $\square$

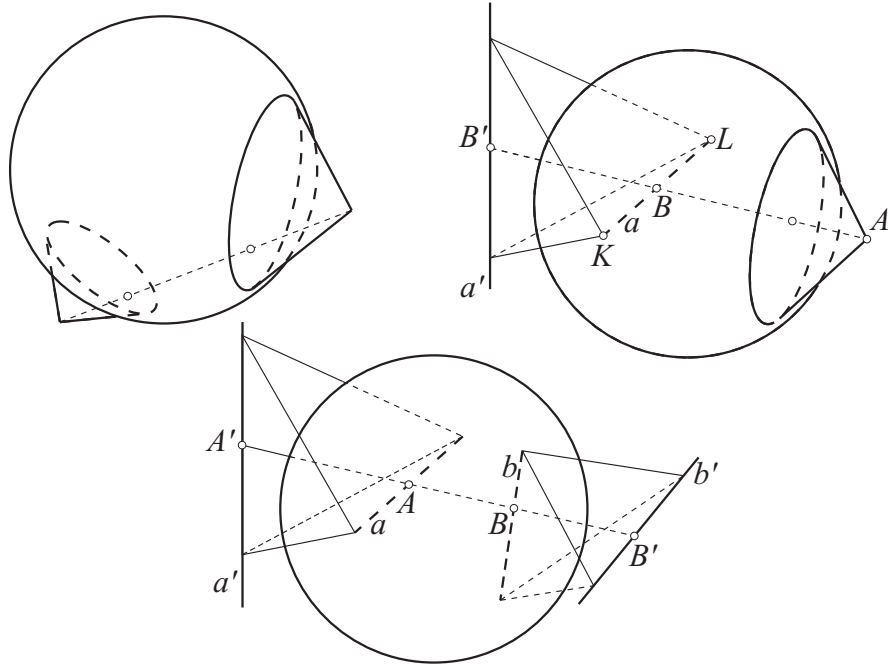


4.15. ábra. Merőlegesség a projektív modellben.

A projektív modell használatával újabb szép bizonyításokat kapunk két ultraparallel térelem közös merőlegességének létezésére.

4.3.1. Tétel. *A hiperbolikus tér ultraparallel térelem párjának egyértelműen létezik közös merőlegese, egyéb esetekben közös merőleges nincs.*

Bizonyítás: A feladat két sík esetében egyszerű a két sík pólusait összekötő húr adja a két sík egyértelműen létező közös merőlegését. Sík és egyenes esetén adott ponton (a sík pólusán) áthaladó két kitérő egyenest metsző transzverzálisit kell szerkeszteni. Ez előáll mint a pont és az egyenesek által meghatározott két sík metszésvonala. Az ultraparallelitás feltétele most is garantálja ezen egyenes létezését. Két egyenes esetén négy egyenes közös transzverzálisát kell megtalálni. Mint ismert három páronként kitérő egyenes transzverzálisai egyköpenyű hiperboloidot írnak le. Ez elfajulhat hiperbolikus paraboloiddá, ha a három adott egyenes egy síkkal párhuzamos. Feladatunk megoldása tehát hiperboloid és egyenes metszéspontjainak a megkeresését jelenti, mely elvileg két megoldást is adhat. Az euklideszi geometria ebben az esetben mindenképpen bonyolultabb megoldással szolgál, mint ha Poincare féltérmodelljét használjuk. $\square$



4.16. ábra. Közös merőleges a projektív modellben.

4.4. A körmodellek megfeleltetése

Euler drágaköve az Euler azonosság: $e^{\pi i} + 1 = 0$

R. Feynman

A komplex számsík egységesítő szerepe a modellek összekapcsolásának kérdésénél is remekül látszik.

4.4.1. Definíció. Az x, y, u és v komplex számok kettősvizonyán a

$$\frac{u - x}{y - u} : \frac{v - x}{y - v}$$

arányt értjük, ha az értelmes.

4.4.1. Tétel. A komplex kettősvizony pontosan akkor valós, ha pontjaink egy egyenesre, vagy egy körre illeszkednek.

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy pontjaink egy egyenesre esnek. Ekkor $a - c, a - d, b - c, b - d$ párhuzamos euklideszi vektorok, így hányadosuk (mint komplex szám) valós. Ha egy kör pontjairól van szó, akkor a 4.17. ábrának megfelelően feltehetjük, hogy az a, b, c, d ciklikus sorrendben helyezkednek el,

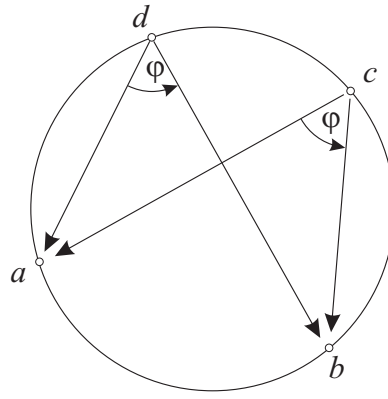
azaz $(adb)_\angle = (acb)_\angle = \phi$. Ezért egy ϕ argumentumú egységghosszú e komplex számmal a

$$\frac{(a-d)e}{b-d}, \quad \frac{(a-c)e}{b-c}$$

számok egyaránt valósak, így hányadosuk

$$k = \frac{(a-c)e}{b-c} : \frac{(a-d)e}{b-d} = \frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$$

szintén valós.



4.17. ábra. Komplex kettősviszony

Fordítva, válasszuk meg a pontok sorrendjét úgy, hogy a kettősviszony ne csak valós de pozitív is legyen. (Ez lehetséges, mert különböző pontok esetén k nem nulla és egy, ezért $k = (a, b, c, d) \leq 0$ esetén $(b, d, a, c) = 1 - k \geq 0$). Tehát a

$$\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = k \geq 0 \iff \frac{a-c}{b-c} = \frac{a-d}{b-d} \cdot k$$

összefüggés alapján az egyenlőség két oldalán levő komplex szám azonos irányszögű, azaz

$$\arg \frac{a-c}{b-c} = \arg \frac{a-d}{b-d}$$

ahonnan

$$\arg(a-c) - \arg(b-c) = \arg(a-d) - \arg(b-d)$$

ezért $(acb)_\angle = (adb)_\angle = \phi$. Ha c és d az (ab) egyenesen van, tételünk állítása igaz. Tegyük fel, hogy ez nem teljesül és az (ab) egyenes elválasztja a c és d pontokat. Jelöljük e -vel a ϕ irányszögű komplex egységet. Ekkor

$$b-c = (a-c)\lambda e \text{ és } b-d = (a-d)\mu e,$$

ahol $\lambda\mu \leq 0$. Ez azt jelenti, hogy

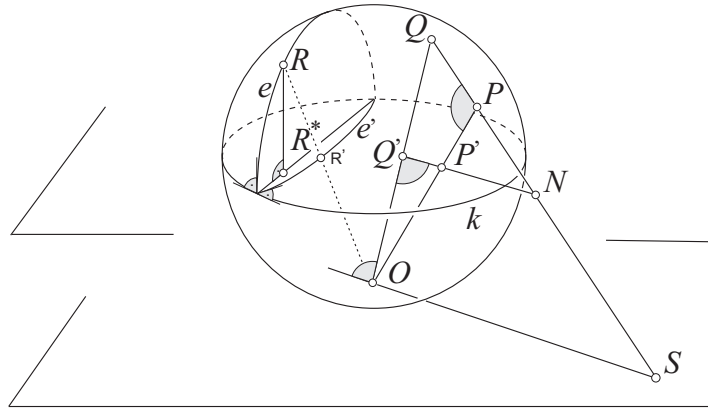
$$k = \frac{a-c}{a-d} : \frac{(b-c)}{b-d} = \frac{a-c}{a-d} : \frac{(a-c)\lambda}{(a-d)\mu} = \frac{\mu}{\lambda} \leq 0,$$

ami ellentmond k -ra vonatkozó feltevésünknek, így (ab) nem választhatja el a c és d pontokat. Azaz c illetve d az (ab) szakaszra írt $(acb)\angle$ szögű látószögműven helyezkednek el, azaz valóban egy körön vannak. $\square$

A G egységgömb középpontján áthaladó sík pontjait tekintsük a komplex számsík számainak, a síkra merőleges gömbi átmérő egyik végpontjából vetítsük centrálisan a sík pontjait az inverzió gömbjére. (A továbbiakban a szemléletesség kedvéért ezt a síkot vízszintesnek képzeljük, míg a vetítés centrumát a függőleges átmérő felső végpontjának.) A komplex számsík "végtelenének" feleljen meg maga a centrum, így a kompaktifikált komplex számsíkot bijektíven leképeztük a G gömb felszínére. A G gömböt a továbbiakban *Riemann-féle számgömbnek* nevezzük. A leképezés a *sztereografikus projekció*. Világos, hogy az általunk definiált leképezés ekvivalens a sztereografikus projekció másik szokott megfogalmazásával, mely szerint a sík a gömböt érinti és a vetítés az érintési ponttal átellenes gömbi pontból történik. Az első definíció annyiban kényelmesebb, hogy a síkba eső főkör invariáns marad.

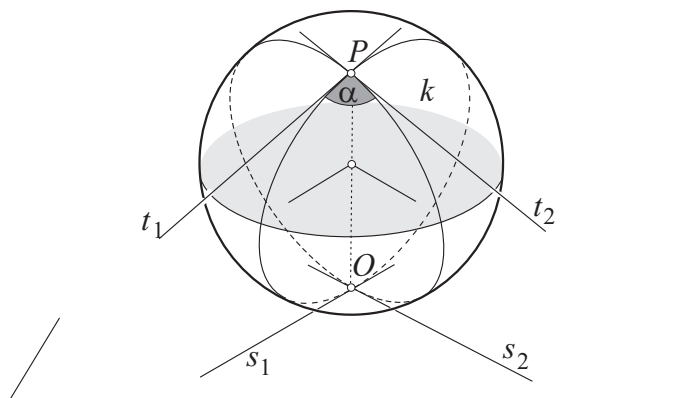
4.4.2. Tétel. *A sztereografikus projekció körtartó, konformis leképezés.*

Bizonyítás: A körtartáshoz kapcsolódó meggondolásainkat az 4.18. ábra segítségével végezzük.



4.18. ábra. Körtartás

Legyen P és Q a gömbfelület két pontja, vetületük P' illetve Q' . Első észrevételünk az, hogy a $PQP'Q'$ négyszög húrnégyszög. Ha PQ párhuzamos $P'Q'$ -vel, akkor ez világos. Jelöljük most PQ és $P'Q'$ metszéspontját N -el.



4.19. ábra. Szögtartás

Ha S továbbá a PQ egyenes és az O -beli érintősík metszéspontja, akkor az OS egyenes nem más mint az OQP háromszög köré írt kör érintő egyenese O -ban. Ezért ezen kör OQ húrjához tartozó kerületi szögek a $QPO_{\angle}$ szög és a $QOS_{\angle}$ kiegészítő szöge. (Az ábrán egy ívvel jelölt szögek.) OS és $Q'N$ párhuzamossága miatt azonban ez utóbbi szög éppen $OQ'P'_{\angle}$, ami állításunkat igazolja. Így $|NP| \cdot |NQ| = |NP'| \cdot |NQ'|$. Ha most P egy gömbi kör pontja Q pedig a fix N pontból a gömbi körhöz húzott szelő másik metszéspontja, az $|NP| \cdot |NQ|$ szorzat állandó érték. Az előbbi egyenlőség szerint a P illetve Q pontok képeire szintén igaz, hogy az $|NP'| \cdot |NQ'|$ szorzat konstans. A gömbi kör vetülete az O csúcsú kúp olyan síkmetszete, mely a kúp valamennyi alkotóját metszi, tehát ellipszis. Ezen ellipszis egy a tengelyeitől különböző egyenes (az ábrán képsíkunk és a kör síkjának metszévonal) összes N pontjára nézve rendelkezik a fenti tulajdonsággal, nevezetesen, hogy az $|NP'| \cdot |NQ'|$ szorzat konstans, azaz az ellipszis kör. (Affinitással könnyen ellenőrizhető, hogy külső pontból egy ellipszishoz húzott érintőszakaszok akkor és csak akkor lehetnek egyenlő hosszúak, ha a pont valamelyik tengelyre esik, így ilyen tulajdonsággal egy a tengelyektől különböző egyenesnek legfeljebb két pontja rendelkezhet.) Eképpen első állításunkat beláttuk.

A szögtartás bizonyításához tekintsük az 4.19. ábrát. Az ábrán a következő egyszerű tényt rögzítettük: Ha egy gömb két köre két pontban metszi egymást, akkor a metszéspontoknál kapott megfelelő hajlásszögek megegyeznek. (A metszéspontokat összekötő gömbi húr szakaszfelező merőleges síkja az együttes alakzat szimmetriasíkja.) Ha most a P pontbeli görbék t_i érintői és az O pont által meghatározott síkok a gömb O -beli érintősíkjával való metszévonalai s_i , akkor eszerint fennáll a $(t_1, t_2)_{\angle} = (s_1, s_2)_{\angle}$ egyenlőség. A képsík viszont a mondott érintősíkkal párhuzamos, a vetületi görbék t'_i érintői pedig a t_i érintők O -ból való vetületei, azaz t'_i párhuzamos s_i -vel. (Adott

síkot párhuzamos síkpár, párhuzamos egyenespárban metsz.) Így a vetületi görbék hajlásszöge is ezen közös szög. $\square$

4.4.3. Tétel. *A komplex nyílt egységkör lap sztereografikus projektív képét merőlegesen vetítsük vissza az egységkörre. Ekkor az egységkörre vonatkozó Poincare-féle körmodell és ugyanezen kör Cayley-Klein (vagy projektív) modelljének a sík végtelen távoli pontjait fixen tartó bijekcióját kapjuk.*

Bizonyítás: Tekintsük újra a 4.18. ábrát. Itt a k -val jelölt főkör kiindulásképpen legyen ellátva a Poincare körmodell struktúrájával. Az O -ból végzett sztereografikus projekció ezen modellt felvetíti a gömbre, oly módon, hogy a modell egyenesek k síkján kívül fekvő k -ra merőleges körívekbe mennek át. Ez azt jelenti, hogy a kapott gömbi körívek síkjai k síkjára merőlegesek. Vetítsük most a gömbfelszínt k síkjára merőlegesen vissza a kiindulási k körbe. A kapott modellben a Poincare modell egyeneseseinek most euklideszi egyenes szakaszok (húrok) felelnek meg, melyek a Poincare féle egyenes "végpontjait" kötik össze a modellben. $\square$

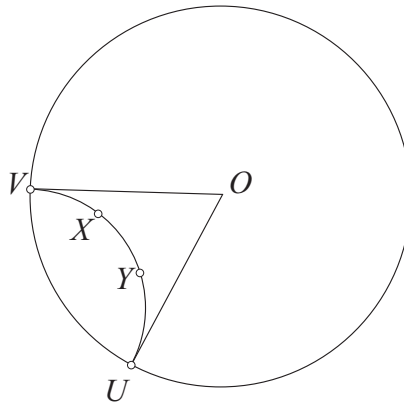
Mostmár könnyen definiálható lesz a gömbmodellek távolság függvénye.

4.4.2. Definíció. *Értelmezzük a Poincare-féle körmodellben két pont távolságát a*

$$\rho(X, Y) = \ln(X, Y, U, V)$$

formulával, ahol az X, Y pontok által meghatározott egyenes két vége az U, V pontpár oly módon, hogy az egyenest reprezentáló körön a pontok ciklikus sorrendje (X, Y, U, V) .

A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez az értelmezés vezet a természetes térfogatfogalomhoz.



4.20. ábra. Távolság

A megadott szám nem negatív, mivel a 4.20. ábra jelöléseit figyelembe véve, az (X, Y, U, V) kettősvizony értéke

$$\frac{X - U}{X - V} : \frac{Y - U}{Y - V} = \left| \frac{X - U}{X - V} : \frac{Y - U}{Y - V} \right| = \frac{|X - U|}{|X - V|} : \frac{|Y - U|}{|Y - V|}$$

ami a húrnégyszögekre vonatkozó Ptolemaiosz tétel értelmében (az átlók szorzata megegyezik a szemközti oldalak szorzatának összegével) egynél nem kisebb, így a logaritmus értéke valóban nem negatív. Könnyen ellenőrizhető, hogy az "azonos hossz" követelménnyel definiált egybevágóság kielégíti a szakaszokra vonatkozó egybevágósági axiómákat, továbbá definiálhatók egybevágó szögtartományok és ezek mértéke az euklidészi mértékükkel azonos, így a Poincare gömbmodell tényleg a hiperbolikus tér egy konformis modellje.

A két modell közötti geometriai megfeleltetés alapján a projektív modell távolsága és szögértéke is analóg módon kettősvizsonnyal adható meg.

4.5. A hiperboloid modell

... amiben az elmélet hatásos, az az, hogy a metrikus tulajdonságai egy alakzatnak nem minden mástól független tulajdonságok, hanem ezeket egy másik alakzattal kapcsolatosan tekintettük, nevezetesen az Abszolútnak nevezett kúpszelettel.

A. Cayley

Tekintsük a $\mathbf{V}^3$ valós számtest feletti vektorteret az

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\mathbf{e}_i\}$$

ortonormált bázis megadásával. Adjunk meg egy szimmetrikus bilineáris függvényt az alábbi definícióval:

$$\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = -1, \quad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0 \text{ ha } i \neq j,$$

azaz

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle x^i \mathbf{e}_i, y^j \mathbf{e}_j \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 - x^3 y^3, \quad (\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j).$$

Az így definiált vektorteret $\mathbb{R}$ feletti 1 indexű *pszeudo-euklideszi vektortérnek* is nevezzük. Itt a vektorokat (hagyományosan) ortogonálisnak nevezzük, ha skaláris szorzatuk nulla. A $\langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle = -1$ esetén az $\mathbf{e}_0$ vektort képzetes egységvektornak nevezzük. Ebben a térben az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ skalárszorzatra háromféle lehetőség adódik:

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$, ekkor $\mathbf{x}$ vektor hossza valós, az ilyen vektorokat *térszerűeknek* nevezzük.
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, ekkor $\mathbf{x}$ vektor hossza nulla, az ilyen vektorokat *fényszerűeknek* (izotróp) nevezzük.
3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$, ekkor $\mathbf{x}$ vektor hossza tiszta képzetes, az ilyen vektorokat *időszerűeknek* nevezzük.

Az A_3 affin teret 1 indexű 3-dimenziós pszeudo-euklideszi térnek (Minkowski térnek) nevezzük, ha eltolási tere egy 1 indexű pszeudo-euklideszi 3-vektortér. (A 4 dimenziós Minkowski tér fontos szerepet kap a speciális relativitáselméletben.)

A gömbfelület, az euklideszi esethez hasonlóan, az adott O ponttól azonos r távolságra elhelyezkedő pontok halmazát jelöli. Az r szám a gömb sugara. Ha O egyben a koordinátarendszer kezdőpontja is, akkor az r sugarú gömb egyenlete:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = r^2.$$

A gömbnek három típusa van:

1. A valós sugarú gömb, ahol $r > 0$ valós szám, ilyenkor az egyenlete: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = r^2$. Az egyenlet az euklideszi térben egy egyköpenyű hiperboloidot ad meg.
2. A képzetes sugarú gömb, ahol $r = k \cdot i$, $k > 0$ valós szám, a gömb egyenlete $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -k^2$. Az egyenlet az euklideszi térben egy kétköpenyű hiperboloidot jellemez.
3. A gömb sugara zérus, akkor $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, ami az euklideszi térben egy kúp egyenlete

Világosan látszik, hogy a kúpot a hiperboloidok aszimptotái alkotják. Mindezeket a 4.21. ábrán szemléltettük.

Tekintsük a $\mathbf{V}^3$ valós számtest feletti pszeudo-euklideszi vektorteret az

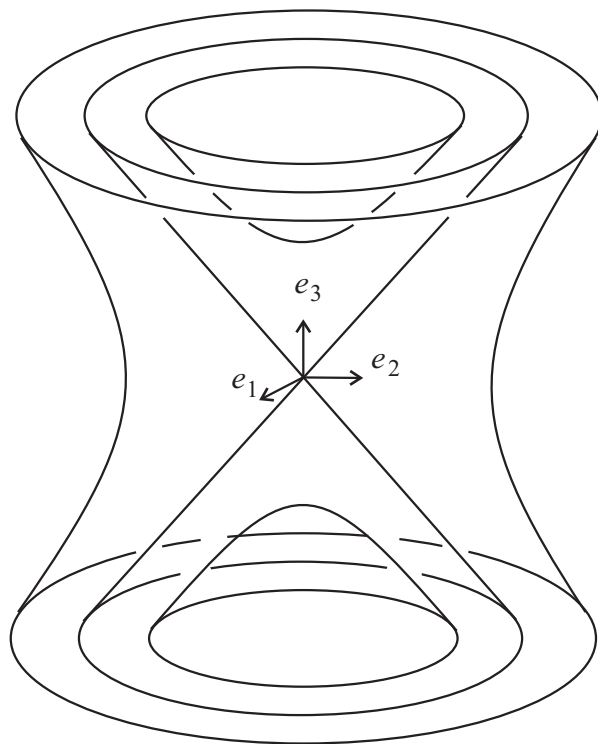
$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\mathbf{e}_i\}$$

ortonormált bázis és a

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle x^i \mathbf{e}_i, y^j \mathbf{e}_j \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 - x^3 y^3, \quad (\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j).$$

bilinéaris forma megadásával. Továbbá teljesüljön az alábbi reláció:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathbf{y} = c \cdot \mathbf{x},$$



4.21. ábra. Hiperboloid modell

aminek megadása indukálja a $\mathcal{P}^2(\mathbf{V}^3, \mathcal{V}_3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ kétdimenziós projektív metrikus teret.

A hiperbolikus síkot modellezhetjük a $\mathbf{V}^3$ vektortér

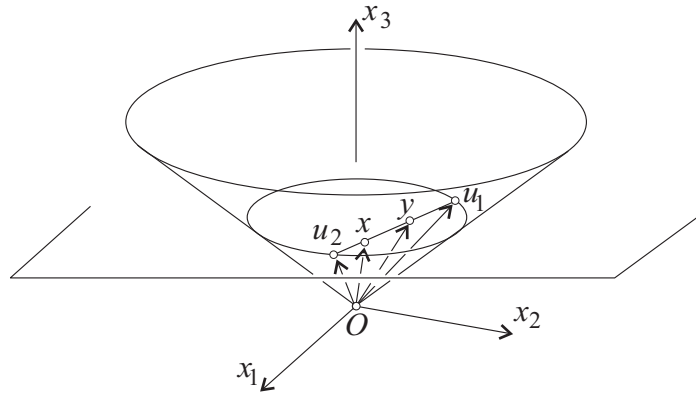
$$\mathcal{C}^+ = \{\mathbf{x} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle < 0, x^0 > 0\}$$

kúp-komponensében.

A $\mathcal{P}^2(\mathbf{V}^3, \mathcal{V}_3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ projektív metrikus síkban tekintsük a $\mathcal{G}(X) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ másodrendű görbét, ahol az X pont kitűző vektora $\mathbf{x}$. Ezenkívül a $\mathbf{V}^3$ vektortérben csak olyan transzformációkat engedünk meg, amelyek megőrzik a skalárszorzatot, azaz ortogonálisak. A $\mathcal{P}^2$ síkon csak azokat a transzformációkat kell vizsgálnunk, amelyek $\mathcal{G}(X) = 0$ másodrendű görbe S_G stabilizátorához tartoznak. Ebben az esetben a $\mathcal{G}(X) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ másodrendű görbét a hiperbolikus sík abszolút alakzatának nevezzük. A hiperbolikus sík pontjait a $\mathcal{C}^+$ -ba mutató egydimenziós alterek jelölik ki.

$$\mathcal{H}^2 := \{(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{C}^+\} \subset \mathcal{P}^2.$$

Értelmeztük a távolság illetve a szög fogalmát a projektív modellben. Ez a



4.22. ábra. Távolság a hiperboloid modellben

kettősviszony homogén koordinátarendszerben való kiszámításával kombinálva ezen modell hiperbolikus távolság, illetve szög fogalmához vezet. Valóban Az $x_0 = 1$ normálás esetén a $(\mathbf{x}), (\mathbf{y}) \in \mathcal{H}^2$ pontjainak a távolsága:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{k}{2} \ln(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$$

ahol $\mathbf{u}_1 = \alpha_1 \mathbf{x} + \beta_1 \mathbf{y}$ illetve $\mathbf{u}_2 = \alpha_2 \mathbf{x} + \beta_2 \mathbf{y}$ előállítások alapján

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_2}{\alpha_2},$$

ahol a $0 = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle$ feltételekből következik, hogy

$$\alpha_1^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\alpha_1 \beta_1 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \beta_1^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

és

$$\alpha_2^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\alpha_2 \beta_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \beta_2^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

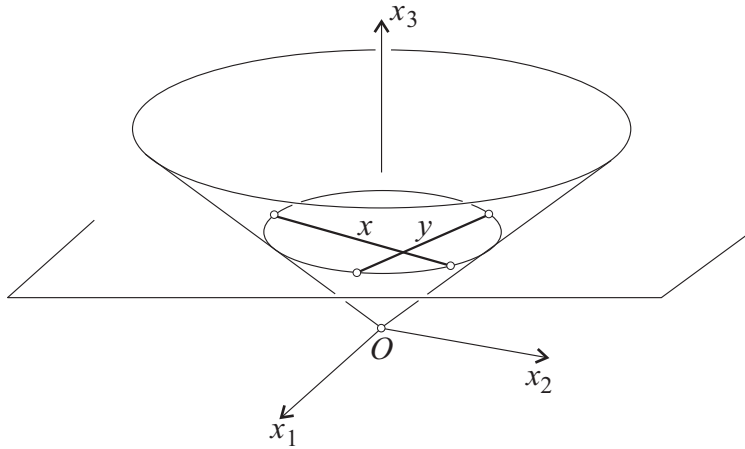
Így

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2 \frac{\beta_i}{\alpha_i} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \left(\frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

is teljesül $i = 1, 2$ esetén. Mostmár

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{k}{2} \ln(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{k}{2} \ln \frac{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}}{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}},$$

ahol a $k \in \mathbb{R}^+$ a hiperbolikus síkra jellemző metrikus konstans. Jól látható, hogy a fényszerű vektorosztályok által kijelölt két pont sorrendje úgy lett



4.23. ábra. Egyenesek szöge

megválasztva, hogy a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ távolság nemnegatív értékű legyen. A pontok távolságát szemlélteti a 4.22. ábra.

Ezt a képletet átírhatjuk az alábbi formulákra:

$$\cosh \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{k} = \frac{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}},$$

$$\sinh \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{k} = \frac{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}}.$$

A modellünkben az egyenesek elhelyezkedését mutatja a 4.23. ábra.

Az $(\mathfrak{x})$, $(\mathfrak{y})$ $\mathcal{H}^2$ belüli valódi egyenesek szöge:

$$w(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := \frac{1}{2i} \ln(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2i} \ln \frac{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle + \sqrt{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle^2 - \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle}}{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle - \sqrt{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle^2 - \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle}}.$$

Ezt a képletet átírhatjuk az alábbi formulára:

$$\cos w(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \frac{-\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle}}.$$

A hiperbolikus sík pontjait tehát a $\mathcal{C}^+$ kúp-komponensbe mutató vektorok osztályai jelölik ki. A szokásos hiperboloid modellhez úgy jutunk, ha a projektív koordinátákat az $1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ normálásnak vetjük alá. A Cayley-Klein modellhez jutunk, ha normálásunk az $x_3 = 1$ feltételnek tesz eleget.

4.6. Az euklidészi sík modelljei

A kétségek akképpen tűnnek el miképp a kétdimenziós geometriák egyre jobban kapcsolódnak egymáshoz.

H. Poincaré

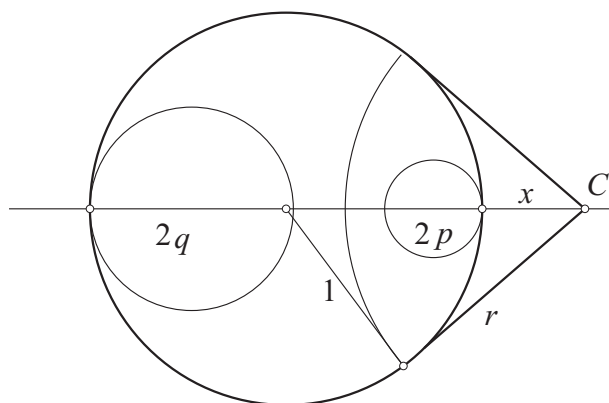
4.6.1. A paraszféra

A paraszféra geometriájának euklidészi volta a féltér modellben a legszembevetőbb. Ennek oka, hogy a féltér modell egyik párhuzamos sugársora euklidészi értelemben párhuzamos egyenessereg. A modell szögtartó volta miatt a hozzátartozó paraszférák a beágyazó euklidészi tér síkjaival reprezentálódnak, a megfelelő paraciklus ívek pedig közös szakaszok. Ezért a paraciklus ívekből alkotott háromszögek szögösszege 2π , azaz, ha a síkra vonatkozó többi axióma teljesül az euklidészi geometriát modelleztük a hiperbolikus térben. Ezek teljesülése viszont triviális, éppen azért, mert az euklidészi síkon a mondott axiómák érvényesek. Hátra marad annak tisztázása, hogy nem csak egy "rendkívüli paraszféra" használható mint az euklidészi sík modellje a hiperbolikus térben, hanem bármelyik. Ez viszont rögtön következik abból, hogy tetszőleges két paraszféra síkra vonatkozó tükrözések szorzatával egymásba vihető. Ennek bizonyításához tekintsük a gömb modell két paraszféráját. Ezek a modellgömböt belülről érintő gömbök. Ha egyenlő a sugaruk a középpontok szakaszfelező merőleges síkjára vonatkozó tükrözés a hiperbolikus térnek is tükrözése, elegendő tehát igazolni, hogy egy modellgömböt belülről érintő a modellhez tartozó gömb alkalmas inverzióval egy a modellgömb sugaránál kisebb előre adott sugárral rendelkező belülről érintő gömbbe vihető. A bizonyításhoz vegyünk fel a modellgömböt egységsugarúnak, legyen az adott érintő gömb sugara p és tekintsük az érintési ponton keresztülhaladó közös átmérő egyenesét. Olyan inverziókat tekintünk, ahol a középpont erre az egyenesre esik, és az alapgömb merőleges a modellgömbre. Világos, hogy számításaink minden fontos eleme megjelenik ezen egyenest tartalmazó tetszőleges síkmetszet ábráján.

Az inverzió centruma legyen C ennek távolsága a két gömb közös pontjától x . Az inverzió gömbje merőleges a modell gömbjére, ezért x értéke (az ábrán való elhelyezés esetén) pozitív, vagy -2 -nél kisebb lehet, továbbá fennáll az inverzió r sugarára az

$$x^2 + 2x = r^2$$

összefüggés. Az invertált gömb az átmérő másik végpontjában belülről fogja érinteni a modellgömböt, így ha q -val jelöljük ennek sugarát, az alábbi



4.24. ábra. Egybevágó paraszférák.

egyenlethez jutunk:

$$(x + 2p)(x + (2 - 2q)) = x^2 + 2x,$$

ahonnan q értékére a

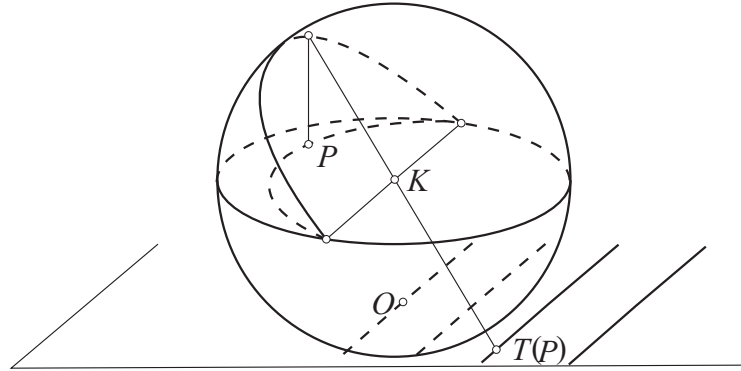
$$q = \frac{p(x + 2)}{x + 2p}$$

kifejezés adódik. Ha x pozitív ez a függvény felvesz minden értéket 1 és p között, ha -2 -nél kisebb 0 és p között. Azaz a p sugarú gömbbel reprezentálódó paraszféra inverzióval belevihető egy adott sugarú gömbbel reprezentálódóba. Ezzel állításunkat igazoltuk.

4.6.2. A hiperciklus modell

A paraszféra modell hátránya, hogy a hiperbolikus téren belül modellezi az euklidészi síkot. A következő (Győrfi Zoltán-tól származó) modell a hiperbolikus sík alaphalmazán ad euklidészi geometriát. A modell pontjai legyenek a hiperbolikus sík pontjai, egyenesei pedig egy rögzített K ponton keresztülhaladó hiperbolikus egyenesek és a hozzájuk mint alapegyenesekhez tartozó hiperciklusok. Valamely euklidészi Π sík O pontjában a síkot érintő G gömb középpontja legyen K . K -n keresztül tekintsük a Π síkkal párhuzamos főkör metszetet, mint a kiindulási hiperbolikus sík egy projektív modelljét. Ebben a *hiperciklus modellben* a K -n keresztül haladó egyenesek nyílt szakaszokkal reprezentálódnak a hozzájuk tartozó hiperciklus párok a nyílt szakaszok mint nagytengelyek által meghatározott, a modellkört érintő ellipszisek. A hiperciklusainkra alkalmazzuk a következő leképezést: először vetítsük a megfelelő fél ellipszist a modellsíkra merőlegesen fel a gömb felső felére (így egy főkör

feléhez jutunk) majd az K pontból a kapott félkört vetítsük a kiindulási síkra. Világos, hogy a transzformáció kiindulási hiperciklusainkat kölcsönösen egyértelmű módon képezi az euklideszi sík egyenesesire.



4.25. ábra. Hiperciklus modell.

Az illeszkedési, rendezési, folytonossági axiómák nyilvánvalóan teljesülnek. Az egybevágósági axiómák igazolása helyett meghatározzuk a modell metrika függvényét. Jelölje ezen leképezést $T : H^2 \rightarrow E^2$. A modell $\overline{AB}$ szakaszát reprezentáló ellipszis ívekhez rendeljünk számokat a következő módon: $|\overline{AB}| := |T(A)T(B)|$. Világos, hogy ezen definícióval metrikát definiáltunk, amelyre vonatkoztatott szakasz fogalom (egy C pont az $\overline{AB}$ pontja, ha $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| + |\overline{CB}|$ áll fenn), megegyezik a rendezési axiómák alapján definiált szakasz fogalmával. Két szakasz egybevágó, ha végpontjaik távolsága (a szakasz hossza) megegyezik, két szögtartomány egybevágó, ha csúcsukból azonos hosszúságú szakaszokat mérve a kapott végpontok távolsága megegyezik. A távolság definíciónk garantálja, hogy teljesülnek az egybevágósági axiómák, azaz geometriánk abszolút geometria. Világos, hogy a párhuzamossági axióma teljesül a modellben, így valóban az euklideszi sík modelljét állítottuk elő a hiperbolikus sík keretein belül.

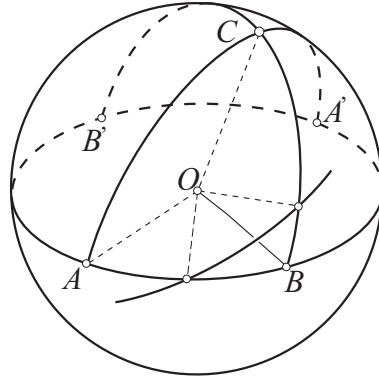
4.7. Az elliptikus illetve szférikus modellek

Eképpen a kétdimenziós Riemann (elliptikus) geometria és a Lobacsevszkij (hiperbolikus) geometria az euklideszi geometrián csatlakozik egymáshoz

H. Poincare

4.7.1. Definíció. *Az illeszkedési, egybevágósági, folytonossági és a ciklikus rendezési axiómák csoportjainak eleget tevő síkot elliptikus síknak nevezzük.*

A sík pontjait gömbi átellenes pontpárokkal adjuk meg. A sík egyenesei átellenes pontpárokkal összeragasztott főkörök. Mivel a főköröket a modellgömb origóján áthaladó síkok metszik ki, melyek egyértelműen meghatározottak két nem átellenes gömbi pont által, az illeszkedési axiómák triviálisan teljesülnek. Modellünkben az egyenes ciklikus rendezésére vonatkozó axiómák állnak fenn. Az első kritikus pont a Pasch axióma teljesülésének kérdése.



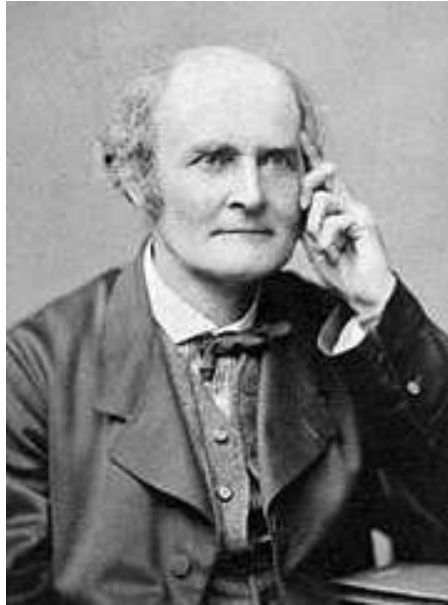
4.26. ábra. Pasch axióma a gömbön

Az elliptikus modellben teljesül az általános Pasch axióma, továbbá érvényesek az egybevágósági axiómák is. Kiindulásképpen vegyük észre, hogy modellünkben a teljes egyenes gömbi hossza π radián, így a szakasz hosszak kisebbek π -nél. Ez azt jelenti, hogy modellfélgömbünk elhelyezhető úgy, hogy az AB szakasz a határoló főkörre essék és a BC szakasz az ábrán jelölt darabja legyen a BC egyenesnek. Ekkor a 4.26. ábrán jelölt AC szakasz a COA euklideszi szögtartomány metszete a modellgömbbel, mint ahogy AOB metszi ki AB -t és BOC BC -t. Világos, hogy a szögpontok két sík metszésvonala által kimetszett gömbi pontok, így feltételünk azt jelenti, hogy ilyen metszésvonalat nem tartalmazó, pl. az AB oldalt metsző, origón keresztülhaladó sík OA -n OB -n vagy OC -n nem megy keresztül. Azaz, ha AB ívet metszi akkor vagy BC vagy AC ívet szintén metszi, ami állításunkat igazolja.

Az egybevágósági axiómák teljesülésének igazolása helyett megint távolság és szögmérésre alkalmas függvényeket vezetünk be. A pontok távolságát az összekötő főkörívek hosszával mérjük, egyenesek hajlásszögét az őket meghatározó síkok hajlásszögével. Ezek után hivatkozhatunk a körvonal és a háromdimenziós euklideszi tér jólismert tulajdonságaira, melyekből az egybevágósági axiómák már következnek.

Abból a tényből, hogy két origón keresztülmenő sík gömbi átmérőben metszi egymást, azonnal látható, hogy az elliptikus modellben az elliptikus sík párhuzamossági axiómája teljesül, azaz bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja van.

Szférikus modellnek nevezzük azt a modellt, melyben a gömb átellenes pontjait nem azonosítjuk. A szférikus modellnek megfelelő geometria a szférikus geometria. Könyvünkben több fejezetben is foglalkozunk ezen geometriával (lásd pld. az 5.5. alfejezetet).



4.27. ábra. Arthur Cayley

4.8. Cayley

Annyi sok fontos definíció mellett Arthur Cayley vezeti be a projektív modell távolságfogalmát is. Ezen cikkének tömör előadására vállalkozunk ebben a szakaszban. Ez az a távolság fogalom, melyet Poincare is át tud venni, ahogy ezt már korábban láttuk. A szakaszok eredeti beosztását megőrizzük, a sorszámozás azért kezdődik 209-nél, mert Cayley egy nagyobb szabású munkájának¹ képezi a részét az idézett tanulmány.

A. CAYLEY: A TÁVOLSÁG ELMÉLETÉRŐL.

209. Az egydimenziós esettel kezdünk. Jelöljünk ki az egyenesen egy pontpárt, nevezzük ezt Abszolút-nak. Tetszőleges pontpárt tekinthetünk az Abszolútba írt pontpárnak. Egy ilyet megadva pont-pár körről, vagy körről beszélünk. A kör centruma és tengelye, azon involúció két fixpontja, melyben az adott pontpár és az Abszolút két pontja összetartozó pontpárok. A két fixpont egyaránt tekinthető centrumnak, de a választásnak következetesnek kell lennie. Megjegyezzük, hogy a centrum és egy pont ismeretében a másik pont egyértelműen adódik, hiszen a

¹ "A sixth memoir upon quantics." (Collected papers II.)

tengely a centrum harmonikus társa az Abszolútra nézve, a másik pont, pedig az egyik harmonikus társa a centrumra és a tengelyre nézve.

210. A kör két pontja definíció szerint egyenlő távol van a kör centrumától. Kiindulva két pontból egyiket középpontnak a másikat egy kör pontjának tekintve megszerkeszthetünk egy mindkét irányban végtelen pontsorozatot, melyben a szomszédos pontok távolsága megegyezik. A kiindulási pontpár távolságát végtelen kicsire választva mérhetjük az egyenes tetszőleges két pontjának a távolságát mint a köztük levő szakaszok számát. Világos, hogy tetszőleges három pont kielégíti a

$$\text{Dist}(P, P') + \text{Dist}(P', P'') = \text{Dist}(P, P'')$$

szokott additivitási feltételt.

211. Ahhoz, hogy megmutassuk miként vezet el a fenti definíció a távolság analitikus definíciójához, tegyük fel, hogy az Abszolút pontjainak (projektív) koordinátáit az

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

egyenlet adja meg. Ekkor az (x', y') középpontú kör egyenlete:

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2) \cos^2 \theta - (axx' + b(xy' + x'y) + cyy')^2 = 0,$$

következésképpen, ha (x, y) és (x'', y'') két pontja a körnek, fennáll az

$$\begin{aligned} & \frac{(axx' + 2b(x'y + xy') + cyy')}{\sqrt{(ax^2 + 2bxy + cy^2)}\sqrt{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)}} = \\ & = \frac{(ax'x'' + b(x'y'' + x''y') + cy'y'')}{\sqrt{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)}\sqrt{(ax''^2 + 2bx''y'' + cy''^2)}} \end{aligned}$$

egyenlet, amely azt fejezi ki, hogy (x, y) illetve (x'', y'') egyenlő távolságra van (x', y') -től. Azaz két pont távolsága additív függvénye a

$$\frac{(axx' + b(x'y + xy') + cyy')}{\sqrt{(ax^2 + 2bxy + cy^2)}\sqrt{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)}}$$

kifejezésnek. Ez vezet ahhoz a következtetéshez, hogy két pont távolsága tekinthető annak az ívnek, amely koszinusza a fenti kifejezés azaz a távolság:

$$\begin{aligned} & \arccos \frac{(axx' + b(x'y + xy') + cyy')}{\sqrt{(ax^2 + 2bxy + cy^2)}\sqrt{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)}} = \\ & = \arcsin \frac{\sqrt{(ac - b^2)}(x'y - xy')}{\sqrt{(ax^2 + bxy + cy^2)}\sqrt{(ax'^2 + bx'y' + cy'^2)}}. \end{aligned}$$

Azaz a köregyenletek:

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2) \cos^2 \theta - (axx' + b(xy' + x'y) + cyy')^2 = 0,$$

$$(ax^2 + 2bxy + cy^2)(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2) \sin^2 \theta - \sqrt{(ac - b^2)}(x'y - xy')^2 = 0,$$

alakúak, ahol a pont középponttól való távolsága Θ , ha tetszik ez a kör sugara.

212. Ha $\Theta = 0$ a középpont és a kör pontja egybeesik (második egyenlet), ha $\Theta = \frac{\pi}{2}$, a középpont és a pont harmonikusan választódnak szét az Abszolút pontjai által. Az Abszolút által harmonikusan szétválasztott pontok távolsága egy körnegyed, ezért az ilyen pontokat körnegyed távolságra lévő pontoknak nevezhetjük. A körnegyed a távolság egysége.

213. Amikor az Abszolút egy összeeső (p, q) pontpár, a pontok távolságát a

$$\frac{xy' - x'y}{(qx - py)(qx' - py')},$$

vagy a vele ekvivalens

$$\frac{\beta x - \alpha y}{qx - py} - \frac{\beta x' - \alpha y'}{qx' - py'}$$

összefüggés írja le. (A $q\alpha - p\beta$ szorzó bevezetése után.) Szükséges megjegyezni, hogy most a távolság egysége tetszőlegesen választható.

214. Kétdimenzióra áttérve tekintsünk egy tetszőleges kúpszeletet, ez legyen az Abszolút. Tetszőleges az Abszolútot két pontban metsző egyenes meghatároz egy egydimenziós Abszolúttal rendelkező pontsort (ezen az Abszolút a két metszéspont), és hasonlóan tetszőleges az Abszolúthoz húzott két érintő meghatároz egy egydimenziós Abszolúttal rendelkező sugársort (ezen az Abszolút a két kiindulási egyenes). Ahhoz, hogy az egydimenziós pontsorok távolságait függetlenítsük a pontsor helyzetétől ugyanazt a távolságot kell definiálni. Ahhoz, hogy ennek az igénynek eleget tegyünk nem csak a pontsorok pontjainak és a sugársorok egyeneseinek távolságait egyeztetjük, de pontsor pontjának és sugársor egyenesének távolságát is az előzőekkel összhangban adjuk meg. Legyen az Abszolútra vonatkozó pólusa egy egyenesnek, egyszerűen a szokott pólus és a polárisa egy pontnak a szokott poláris. Igazolni fogjuk azt a tételt, hogy a távolsága két pontnak vagy egyenesnek megegyezik polárisaik vagy pólusaik távolságával, azaz hogy a távolsága két pólusnak, megegyezik a hozzájuk tartozó polárisok távolságának. Eképpen definiálhatjuk egy pont és egy egyenes távolságát komplementereként a pont és az egyenes pólusa távolságának, vagy fordítva a pont polárisa és az egyenes távolságaként. Így a távolsága egy pólusnak a polárisától a zéró komplementere, azaz körnegyed.

215. Az Abszolútba írt kúpszelet legyen körnek nevezve, a beírás centruma és tengelye legyen a kör centruma és tengelye. A kör összes pontja egyenlő távol van a centrumtól összes érintője egyenlő távol van a tengelyétől és ez a távolság a komplementere az előző távolságnak.

216. A kör fenti tulajdonsága alapján a koordinátákkal való számolás a következő formulákhoz vezet:

$$\arccos \frac{(axx' + b(x'y + xy') + cyy' + fzz' + g(x'z + xz') + h(y'z + yz'))}{\alpha\alpha'} =$$

$$= \arcsin \frac{\sqrt{\bar{a}(yz' - y'z)^2 + \bar{b}(yz' - y'z)(x'z - xz') + \bar{c}(x'z - xz')^2 + \dots}}{\alpha\alpha'}$$

ahol

$$\alpha = \sqrt{(ax^2 + 2bxy + cy^2 + fz^2 + 2gxz + 2hyz)}$$

és

$$\alpha' = \sqrt{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + fz'^2 + 2gx'z' + 2hy'z')}.$$

és az Abszolút vonalegyenletét

$$\bar{a}x^2 + 2\bar{b}xy + \bar{c}y^2 + \bar{f}z^2 + 2\bar{g}xz + 2\bar{h}yz = 0$$

adja meg. Rögtön adódik, hogy teljesül a távolságfüggvény additív tulajdonsága.

217. Hasonlóan kiszámolhatjuk két egyenes távolságát és a fenti formulákkal analóg formulákat kapunk. Formálisan felcserélve az

$$a, b, \dots, x, y, \dots$$

jeleket a

$$\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots$$

jelekre a két formula pár egymásba transzformálható.

218. Az (x, y, z) pont és (ξ', η', ζ') egyenes távolsága:

$$\arcsin \left\{ \sqrt{K}(\xi'x + \eta'y + \zeta'z) \sqrt{(ax^2 + 2bxy + cy^2 + fz^2 + 2gxz + 2hyz)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sqrt{\bar{a}\xi'^2 + 2\bar{b}\xi'\eta' + \bar{c}\eta'^2 + \bar{f}\zeta'^2 + 2\bar{g}\xi'\zeta' + 2\bar{h}\eta'\zeta'} \right\}.$$

219. A fenti eredmények működnek azon elfajuló esetben is, amikor egy egyenes érinti az Abszolútot, vagy egy pont az Abszolútra illeszkedik.

220. Tegyük most fel, hogy az Abszolút egy elfajuló kúpszelet, egy pontpár. Abszolút egyenesnek hívjuk a rajtuk áthaladó egyenest. Ebben az esetben az általános gondolatmenet és eredmények érvényben maradnak, csak nem tudjuk összeegyeztetni a pontok és egyenesek távolságát, mert nem szerepel a környék mint univerzális egység. Ugyanakkor össze tudjuk egyeztetni két egyenes távolságát egy az Euklidész, I Prop. II-höz hasonló konstrukcióval. Egy pont és egy egyenes távolsága ugyancsak összeegyeztethető két pont távolságával, fel kell csak tennünk mint definíciót, hogy a pont egyenestől mért távolsága megegyezik a pont és azon másik pont távolságával, mely a metszéspontja az egyenesnek és a ponton áthaladó egyenesre merőleges egyenesnek.

221. Analitikusan az előző speciális esetben a (p, q, r) , (p_0, q_0, r_0) pontokat tartalmazó Abszolút egyenese a

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ p_0 & q_0 & r_0 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlettel adható meg.

222. Két pont távolsága ekkor:

$$\sqrt{\frac{2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ p & q & r \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ p_0 & q_0 & r_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ p_0 & q_0 & r_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ p & q & r \\ p_0 & q_0 & r_0 \end{vmatrix}}}.$$

Két egyenes távolsága az alábbi kifejezés arcus cosinusa:

$$\frac{(p\xi + q\eta + r\zeta)(p_0\xi' + q_0\eta' + r_0\zeta') + (p\xi' + q\eta' + r\zeta')(p_0\xi + q_0\eta + r_0\zeta)}{\sqrt{2(p\xi + q\eta + r\zeta)(p_0\xi + q_0\eta + r_0\zeta)2(p\xi' + q\eta' + r\zeta')(p_0\xi' + q_0\eta' + r_0\zeta')}}.$$

Végül egy pont és egy egyenes távolsága:

$$\frac{(\xi'x + \eta'y + \zeta'z)}{\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ p_0 & q_0 & r_0 \end{vmatrix} \sqrt{2(p\xi' + q\eta' + r\zeta')(p_0\xi' + q_0\eta' + r_0\zeta')}}.$$

223. Helyettesítsünk a fenti formulába $(p, q, r) = (1, i, 0)$, $(p_0, q_0, r_0) = (1, -i, 0)$ értékeket. Ekkor a vonalegyenlete az Abszolútnak $\xi^2 + \eta^2 = 0$, azaz az Abszolút azon két pontot tartalmazza, amelyben az $x^2 + y^2 = 0$ egyenespár (ami definícióink szerint egy elfajuló kör) metszi a $z = 0$ egyenest. Ha a z koordinátát egységnek választjuk az Abszolút pontjaira fenn kell állnia: $x : y : 1 = 1 : i : 0$ illetve $x : y : 1 = 1 : -i : 0$ egyenlőségeknek, amiből adódik, hogy x, y végtelen, így az Abszolút pontjai a végtelen távoli egyenes metszete a fenti egyenespár által meghatározott körrel.

224. Ebben az esetben a pontok távolságára:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

adódik, az egyenesek távolságára pedig

$$\arccos \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}} =$$

$$\arcsin \frac{\xi\eta' + \xi'\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}} = \arctg \frac{\xi}{\eta} - \arctg \frac{\xi'}{\eta'}$$

kifejezéseket kapjuk. Pont egyenes távolságára

$$\frac{\xi'x + \eta'y + \xi'}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}$$

az eredmény, ahogy az az euklidészi síkgeometriából derékszögű koordináták esetén tudjuk.

225. Az általános formulák lényeges változáson nem esnek át, de lényegesen egyszerűsödnek, ha az Abszolútot $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ alakban adjuk meg. Ekkor a pontok távolsága

$$\arccos \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

egyeneseké:

$$\arccos \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}},$$

és pont-egyenes távolsága:

$$\arccos \frac{x\xi' + y\eta' + z\zeta'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}}.$$

226. Ha szokásos derékszögű koordinátákra nézve (x, y, z) kielégíti az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletet akkor az $x\xi + y\eta + z\zeta = 0$ egyenlet egy főkört ad meg a vizsgált gömb felszínén. Szintén feltehetjük, hogy teljesül a $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ összefüggés. A fenti formulák ekkor egy szférikus geometria összefüggései, amely ezek szerint úgy adódott, hogy az Abszolút egy szférikus kúp azaz nem egy pont-pár. Ez a tény a valódi alapja az eltérésnek a síkgeometria és a szférikus geometria között és a szférikus geometria teljes dualitásának.

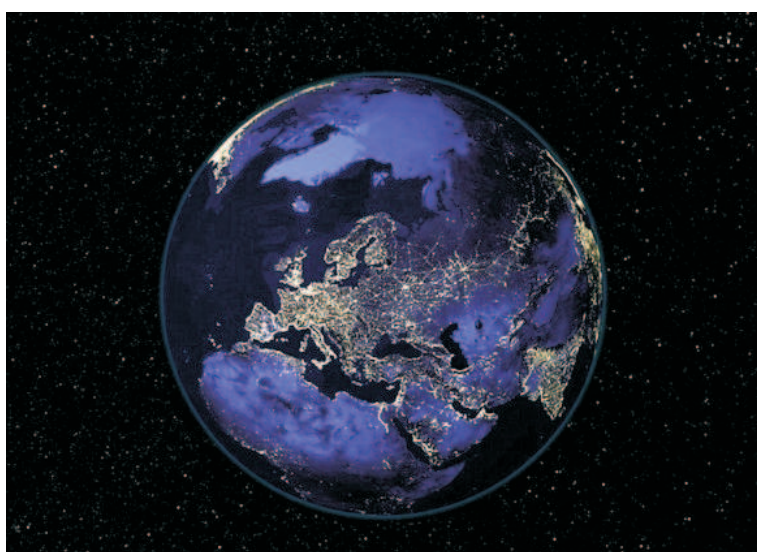
227. Az előzőekben a geometriai elméletet végigkísértem analitikus számításokkal, egyrészt az illusztráció céljából, és azért is mert fontos ismerni az analitikus kifejezéseit a távolságoknak a koordináták függvényében; de úgy gondolom, hogy a geometriai elmélet tökéletesen teljes magában: az általános eredmény a következő: feltéve, hogy Abszolútnak jelölünk ki egy kúpszeletet a síkon (a 2 dimenziós geometriai térben) megadhatjuk ezt a kúpszeletet ábrázoló geometriai szerkesztéssel, felosztva minden egyenest vagy pontsort továbbá minden pontot vagy sugársort egy végtelen sorára egyenlőnek tekintett infinitezimális elemeknek; a száma ezen elemeknek egy pont tartományban vagy egy sugársor két egyenes között méri a távolságát két pontnak vagy két egyenesnek; és tekintve a körnegyed mint távolságot amely létezik ugyanúgy pontokra mint egyenesekre, össze tudjuk hasonlítani két pont és két egyenes távolságát; és a pont és egyenes távolsága egyaránt reprezentálható két pont vagy két egyenes távolságával.

228. A szokásos szférikus geometriában az általános elmélet működik változtatás nélkül; az Abszolút egy aktuális kúpszelet, a metszete a gömbnek egy elfajuló projektív gömbbel.

229. A szokásos síkgeometriában az Abszolút két ponttá degenerálódik, a végtelen távoli egyenesnek egy elfajuló körrel, való metszetére. Az általános elmélet módosul, pontokra vonatkozóan nem lehet körnegyed értelmezni, így két pont távolságát nem lehet egyeztetni két egyenes távolságával; a pont egyenes távolság csak két pont távolságaként reprezentálódik.

230. Konklúzióként megjegyzem, hogy az én nézőpontom szerint, a jelen memoárban a legszisztematikusabb kurzus a mennyiségek elméletének geometriai része, a távolság és metrikus geometria fogalma együtt megszüntethető; amiben az elmélet hatásos, az az, hogy a metrikus tulajdonságai egy alakzatnak nem minden mástól független tulajdonságok, hanem ezeket egy másik alakzattal kapcsolatosan tekintettük, nevezetesen az Abszolútnak nevezett kúp-

szelettel. A kiindulási alakzatot viszonyítottuk egy kúpszelethez; például, együtt tekintettük a tulajdonságait két vagy több kúpszeletnek, mindezt az elméleti ábrázoló geometria [érts: projektív geometria] keretein belül: ezt kivezetve a metrikus geometriába fixálva egy kúpszeletet mint egy standard hivatkozási pontot, amit Abszolútnak nevezünk. A metrikus geometria így az ábrázoló geometria részévé vált, és az ábrázoló geometria a teljes geometria, fordítva: ha ezt elismerjük, egy bevezető munkában nem szükséges vizsgálni a metrikus geometria speciális területeit; azonban nem lehet további kifejtés nélkül elhagyni az olyan fogalmakat, mint a távolság vagy metrikus geometria, szükséges hivatkozni a megfelelő időben arra, hogy ezen fogalmak szerepelnek az ábrázoló geometriában.



Az emberi kultúra része a tudomány,
a tudomány része a matematika,
a matematika része a geometria,
a geometria viszont áthatja az emberi kultúrát.

Középszó

Aki idáig elolvasta a könyvet sejti, hogy mit fog itt találni. Vannak azonban, akik számára fontosak az előszó, utószó, bevezetés, epilógus, fejezetek személyes tartalma, hiszen ezek olvasása után dönt arról, hogy elolvassa-e a könyvet vagy nem. Én is szeretnék megfelelni ebből a szempontból, legalább azoknak, akik a könyv tartalomjegyzékébe is belenéznek és így megtalálták ezt a különös című fejezetet.

Hát legyen:

Ez a könyv egy olyan pillanatkép a geometriáról, aminél az objektív a szerző. A kép tehát torzul, tükrözi a szerző valamennyi kimondott illetve kimondatlan problémáját, egészről és részről, tudományos kutatásról, a szép fogalmáról, a gyökerek fontosságáról és meghatározó voltáról, a kommunikáció nyelvének választásáról és az emberi kultúráról.

Könyvünknek mint irodalmi alkotásnak a nyelve az anyanyelv, a tanító jelleggel írott gondolatok a jelenkori modern tudományos nyelvezetet és fogalomrendszert használják, és a kortalan, fontos gondolatok a megálmodójuk tolla alapján – kötetlen magyar fordításban – szólalnak meg.

A szép fogalma nem köthető az emberi kultúra semelyik körülhatárolt területéhez, de magához az emberi kultúrához sem. A szép dolgok egymást erősítik, ez indokolja versek megjelenését egy olyan könyvben, mely a geometria szépségeiről szól. Ezen gondolat persze nem új, Weierstrass szerint:

Egy matematikus, akiben nem lakozik egyúttal valami a költőből,
sohasem válik tökéletes matematikussá.

Arany János: Intés

Jó költőktől azt tanultam
S adom intésül neked:
Sose fáradj, sok cifrával
Elborítani éneked!

Szólj erővel, és nevezd meg
Ön nevén a gyermeket;
Szólj gyöngéden, hol az illik, -
S ne keríts nagy feneket.

Olykor egy-két szó is jobban
Helyre üti a szeget,
Mint az olyan, ki beléhord
Földet, poklot és eget,
S ordít, amíg elreked.

5. fejezet

Analitikus geometria

5.1. Vektorok a 3-dimenziós euklideszi térben

A geometria bármely problémája redukálható olyan részekre, amelyek megoldásához elegendő bizonyos szakaszok hosszának ismerete.

R. Descartes: Geometria

Ebben a fejezetben a klasszikus analitikus geometria alapvető eszközeit a vektorokat tárgyaljuk. Felépítésünk az egybevágóságok szintetikus felépítésén alapul, így a harmadik fejezet eredményeit használjuk. Ahogy azt az egybevágóságok osztályozásánál láttuk (a 3.3.2. Lemma utáni megjegyzésben), az eltolások az egybevágóság csoport kommutatív részcsoportját képezik.

5.1.1. Definíció. Egy egybevágóság reprezentáns pontpárja, egy pont és képeinek rendezett párja. Vektornak nevezzük az eltolások reprezentáns pontpárjait.

A vektorok halmazán ekvivalencia reláció az azonos eltolás reprezentálása tulajdonság. A vektorokat a szokott módon jelöljük és nem különböztetjük meg a vektort ekvivalencia osztályától. Az eltolások csoportjának multiplikatív műveletét a vektorokon additív írásmódban összeadásnak nevezzük. Használjuk az így adódó összeadás szokásos geometriai jelöléseit, az összefűzés szabályát, a paralelogramma szabályt, a különbség vektor fogalmát. Mindezek figyelembe vételével számunkra a vektorok egy additív írásmódú kommutatív csoportot jelentenek. A továbbiakban a vektorok halmazát el látjuk egy valós számmal való szorzás fogalommal, miáltal a vektoraink valós vektorteret definiálnak.

5.1.2. Definíció. A $t > 0$ szám és az $\overrightarrow{PP'}$ vektor szorzata legyen az a $\overrightarrow{PP''}$ vektor, melyre

$$|\overrightarrow{PP''}| = t|\overrightarrow{PP'}| \text{ és a } (P'PP'')$$

rendezés nem teljesül.

$A t = 0$ szám és a $\overrightarrow{PP'}$ vektor szorzata a $\overrightarrow{PP} := \mathbf{0}$ vektor.

$A t < 0$ szám és az $\overrightarrow{PP'}$ vektor szorzata legyen az a $\overrightarrow{PP''}$ vektor, melyre

$$|\overrightarrow{PP''}| = -t|\overrightarrow{PP'}| \text{ és a } (P'PP'')$$

rendezés teljesül.

5.1.1. Lemma. *A vektorok a fenti definíciókkal valós vektorteret alkotnak, axiómáink szerint ennek dimenziója 3.*

Bizonyítás: A vektorok alatt most ekvivalencia osztályukat gondolva alkalmazhatjuk az eltolások tulajdonságait, kapjuk, hogy ezen ekvivalencia osztályok valós vektorteret alkotnak. Tetszőleges osztályt egy elemével helyettesítve konkrét reprezentáns rendszerünk egy az előzővel izomorf vektortér struktúrával rendelkezik. Rögzítve egy pontot a térben és ezt valamennyi vektorunk kezdőpontjának nevezve egy jól áttekinthető modellhez jutunk. A lineáris függetlenség konkrét geometriai tartalommal bír, két vektor összefüggő, ha az őket meghatározó három pont kollineáris, három vektor összefügg, ha a megfelelő négy pont konplanáris. Állításunk, most az illeszkedési I.4. és I.5. axiómák következményei. $\square$

Ahhoz, hogy a térünkben létező merőlegesség a kapcsolódó vektortérben is érzékelhető legyen, a vektortér struktúráját euklideszi tér struktúrává kell alakítani. Ennek módja a skaláris szorzat függvény definiálása.

5.1.3. Definíció. *A vektor hossza a meghatározó síkpárok távolságának kétszerese, azaz tetszőleges az eltolást reprezentáló pontpár távolsága. Két vektor hajlásszöge a közös kezdőpontból indított reprezentánisait tartalmazó ugyanezen kezdőpontból indított félegyeneseik által bezárt szögek közül a kisebbik.*

A vektor hossza mindig nem negatív, (jele szintén $|\cdot|$), csak a nullvektor hossza nulla. A vektorok hajlásszöge π -nél nem nagyobb szög.

5.1.4. Definíció. *Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata az*

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle := |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

szám.

A skaláris szorzat alaptulajdonságai az alábbi geometriai észrevételekből adódnak:

1. A skaláris szorzat előjele a vektorok hajlásszögétől függ; pozitív ha hegyesszöget zárnak be vektoraink, nulla ha merőlegesek, és negatív ha tompa a szögük.
2. Egységvektorral való skaláris szorzat geometriai jelentése az egységvektor egyenesére vonatkozó merőleges vetület előjeles hossza. Ez pozitív ha az egységvektorral bezárt szög hegyesszög, negatív, ha tompa.

5.1.1. Tétel. *A vektorok skaláris szorzata $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle : E^3 \times E^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ pozitív definit, szimmetrikus bilineáris függvény.*

Bizonyítás: Az első két állítás a definíció közvetlen következménye. A szimmetria miatt elég az egyik argumentumban való linearitást igazolni. A szorzás definíciója miatt a homogenitás nyilvánvaló, mert negatív számmal szorzás esetén hegyesszögből tompaszög, tompaszögből hegyesszög keletkezik. Az additivitás a második geometriai észrevételből adódik, mert feltehető a homogenitás miatt, hogy a második argumentum vektora egységvektor és a merőleges vetület előjeles hossza éppen a skaláris szorzattal egyezik meg. $\square$

Fontos szerepet játszik az alábbi észrevétel:

5.1.2. Lemma. *Az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{v}$ vektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőkre bontása az alábbi formulával végezhető el:*

$$\mathbf{a}_p = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \quad \mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_p.$$

Bizonyítás: Legyen először $\mathbf{v}$ egységvektor. Ekkor

$$\mathbf{a}_p = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$$

nyilván teljesül. Ha most $\mathbf{v}$ nem egység vagy zérus hosszú vektor, alkalmazzuk formulánkat a $\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ egységvektorra, majd használjuk a homogenitást. $\square$

A skaláris szorzattal rendelkező euklideszi vektortérben tárgyalhatóak az egybevágóságok és az egydimenziós mérték fogalma. Ahhoz, hogy a térfogatot, térelemek távolságát hajlásszögét, ügyesebben számolhassuk, egy újabb szorzás a vektoriális szorzat bevezetésére van szükség.

5.1.5. Definíció. *Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokból álló rendszer jobbrendszer, ha $\mathbf{c}$ -vel szemben az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által bezárt síkra nézve $\mathbf{a}$ -t a $\mathbf{b}$ -be óramutató járásával ellentétes π -nél nem nagyobb forgás viszi.*

5.1.6. Definíció. *Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -vel jelölt vektor, melynek hossza*

$$|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

merőleges az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorokra és azokkal az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ sorrendben jobbrendszert alkot.

Egységvektorral való vektoriális szorzat geometriai úton a következőképpen kapható meg:

Az egységvektor egyenesére merőleges síkra vonatkozó merőleges vetületét alkalmas irányban $\frac{\pi}{2}$ szöggel elforgatjuk. Ezen geometriai jelentés alkalmas a vektoriális szorzat disztributivitásának igazolására. Pontosabban:

5.1.2. Tétel. *A vektorok vektoriális szorzata $\mathbf{a} \times \mathbf{b} : E^3 \times E^3 \longrightarrow E^3$, antiszimmetrikus, bilineáris leképezés.*

Bizonyítás: Az antiszimmetria és homogenitás a definíció egyszerű következményei. Az additivitás az egységvektorral való balról szorzás eredményvektorának következő geometria előállításán múlik:

$\mathbf{e} \times \mathbf{v}$ megkapható, ha a $\mathbf{v}$ $\mathbf{e}$ -vel párhuzamos és $\mathbf{e}$ -re merőleges komponensekre való bontásánál definiált merőleges $\mathbf{v}_m$ komponenst a $\mathbf{v}$ -re merőleges síkban úgy forgatjuk el 90° -al, hogy $\mathbf{e}, \mathbf{v}$ és a kapott vektor jobbrendszer alkosson. Az egységvektorral való szorzás az összeadásra nézve disztributív lesz a paralelogramma szabály alapján, mert az elforgatás előtti állapotban a kérdéses merőleges komponensek, a szükséges vektorok egyenlőségét reprezentálják. A homogenitás és az antiszimmetria felhasználásával a bilinearitás most már adódik. $\square$

5.1.7. Definíció. *Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok vegyesszorzata az*

$$\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$

szorzat.

5.1.3. Lemma. *A vegyesszorzat a vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.*

Bizonyítás: Jelölje $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0$ az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú egységvektort. Az

$$\langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0, \mathbf{c} \rangle$$

szorzat geometriai jelentése a vizsgált paralelepipedon előjeles magassága; pozitív, ha $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ jobbrendszer; negatív, ha $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ balrendszer. Az $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ nem negatív szám geometriai tartalma az $\mathbf{a}$ illetve $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe. A homogenitás alapján az állítás adódik. $\square$

5.1.3. Tétel (felcserélési tétel). *A vektorok vegyes szorzata ciklikusan permutálható,*

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

Bizonyítás: A geometriai tartalomról szóló lemma egyszerű következménye. $\square$

5.1.4. Tétel (kicserélési tétel).

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a}.$$

Bizonyítás: A vektoriális szorzat definíciója alapján, a baloldal lineáris kombinációja az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektoroknak. Azaz

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}.$$

Szorozzuk skalárisan az egyenlőséget a $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ vektorral. Ekkor

$$\alpha \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \rangle = \langle (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \rangle$$

egyenlőséghez jutunk. Azonban a $\mathbf{c}^0$ egységvektorral

$$\mathbf{c}^0 \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}^0) = \mathbf{b}_m$$

az egységvektorral való balról szorzás geometriai előállítására alapján, így a párhuzamos és merőleges összetevőkre való bontás formulája szerint

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = |\mathbf{c}|^2 \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{c}$$

teljesül. Behelyettesítve formulánkba majd a skaláris szorzat disztributivitását alkalmazva, kapjuk, hogy

$$\alpha \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} = -\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}.$$

Hasonlóan számolhatjuk ki a β együtthatót, amire

$$\beta = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$$

adódik. □

5.1.1. Következmény. *Teljesülnek a következő nevezetes összefüggések:*

Lagrange azonosság: $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle,$

Jacobi azonosság: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0.$

Valóban az

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle$$

kifejezést írjuk át a felcserélési tétel segítségével, majd alkalmazzuk a kicserélési tételt, ekkor az

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{d} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{d} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$$

összefüggéshez jutunk. Az $\mathbf{a} = \mathbf{c}$, $\mathbf{b} = \mathbf{d}$ helyettesítés a Lagrange azonosság-hoz vezet.

Az asszociatív szabály a vektoriális szorzatra nem teljesülhet. Nézzük meg a két oldal eltérését, majd alkalmazzuk a kicserélési tételt:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} - \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b},$$

ahonnan a Jacobi egyenlőség adódik.

A vektoriális szorzat nem asszociatív művelet, de teljesíti a Jacobi azonosságot, így euklideszi vektorterünk ezzel a szorzás művelettel egy (nem asszociatív) algebrát alkot.

A továbbiakban az euklideszi vektortér egy jobbsodrású ortonormált bázisát a hagyománynak megfelelően $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ -val jelölve vektorainkat koordinátákkal láthatjuk el a szokott módon, majd a térben egy O ponthoz mint kezdőponthoz rögzítve az origót pontjainknak szintén koordinátákat tulajdoníthatunk, ezek az O pontból a pontba mutató helyvektorok koordináta hármasai. Az oszlopvektoros írásmódhoz ragaszkodva teljesülnek az alábbiak:

5.1.5. Tétel.

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum x_i y_i = \mathbf{x}^T \mathbf{y},$$

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} := (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{i} - (x_1 y_3 - x_3 y_1) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{k},$$

$$\mathbf{xyz} = \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \det [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}].$$

Bizonyítás: A koordináta rendszer egységvektorainak páronkénti skaláris és vektoriális szorzatai a definícióból közvetlenül meghatározhatók. Ezután használva a függvények bilinearitását az első két egyenlőség rögtön adódik. A harmadik az első kettő egyszerű összeolvasásával kapható meg. $\square$

Felírhatjuk térelemeink különféle egyenletrendszereit. Egyenes vektoregyenletét paraméteres alakban az

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$$

egyenlettel adhatjuk meg, ahol $\mathbf{v}$ az irányvektor, t valós paraméter. Ebből azonnal kapjuk a paraméteres egyenletrendszert majd az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \\ z &= z_0 + tv_3 \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R},$$

nem nulla v_1 , v_2 illetve v_3 esetén

$$(t) = \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

A sík megfelelő egyenletei:

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0,$$

ahol $\mathbf{n}$ a síkra merőleges vektor, $\mathbf{x}_0$ a sík egy pontjának helyvektora, illetve

$$0 = Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = Ax + By + Cz + D$$

ahol $\mathbf{n}$ koordinátái A, B, C az $\mathbf{x}_0$ koordinátái x_0, y_0, z_0 .

5.2. Egyenestartó leképezések E^3 -ben

... a logika sok szabálya helyett beértem a négy következővel...
 ... Az utolsó pedig az, hogy mindenütt teljes felsorolásokra és általános
 áttekintésekre törekedjem, s így biztos legyek abban,
 hogy semmit ki nem hagytam.

R. Descartes: Értekezés az ész helyes vezetésének módszeréről

Ebben a fejezetben a lineáris algebra eszközeivel írjuk le a tér legfontosabb geometriai transzformációit. Az euklidészi tér egy önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését egyenestartó leképezésnek nevezzük, ha egyenes képe egyenes, illeszkedéstartó leképezésnek ha az illeszkedéseket őrzi.

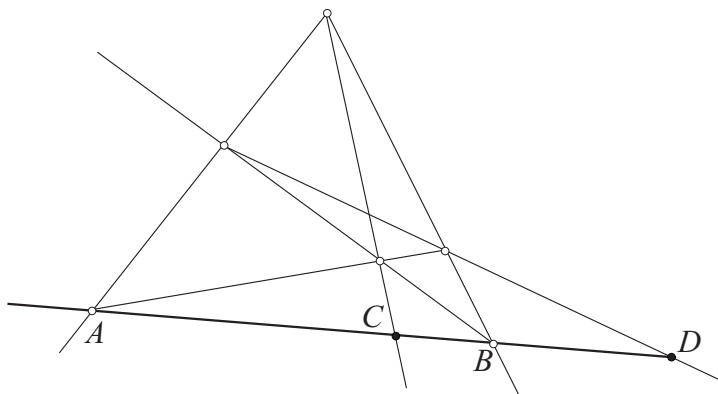
5.2.1. Tétel. *Az E^3 -ban az O fixpontú illeszkedés és egyenestartó, folytonos leképezések éppen az analitikusan reguláris lineáris transzformációkkal leírható leképezések.*

Bizonyítás: Mivel lineáris transzformáció folytonos, a lineáris kombinációt őrzi és az origót az origóba viszi az egyik irány nyilvánvaló.

Fordítva tegyük fel először, hogy f illeszkedés és egyenestartó, továbbá folytonos leképezés az O fixponttal. Ilyenkor egyenes képe egyenes, sík képe sík, és párhuzamos térelemek velük azonos dimenziós párhuzamosokba képződnek. Igazoljuk, hogy a leképezés osztóviszonytartó, azaz három kollineáris pont által meghatározott szakaszok hosszának arányát őrzi.

Ennek első lépéseként igazoljuk, hogy felezőpont képe a képszakasz felezőpontja.

Legyen A, C, B egy e egyenes három pontja, melyet a leképezés az e' egyenes A', C', B' pontjaiba visz. Az e egyenesen keresztülfektetett tetszőleges síkban illesszünk az ábrának megfelelő módon az A, B, C pontokra egy



5.1. ábra. Teljes négyszög illesztése

teljes négyszöget. Ha C felezőpont, akkor D végtelen távoli pont és a rajta áthaladó átlós egyenes e -vel párhuzamos, amint az elemi geometriai megfontolásokból azonnal adódik. A leképezés a síkot a négyszöggel együtt egy e' -n átfektetett síkba viszi, ahol a négy megfelelő pont A', C', B' és D' . A párhuzamosságtartás miatt D' végtelen távoli pont így C' felezőpont, ahogy állítottuk.

Rögtön adódik, hogy két fixpont összekötő egyenesén elhelyezkedő felezőpontként előállítható pontok szintén fixpontok, ugyanúgy mint azok, melyek egyik végpontjai egy olyan szakasznak, amely másik végpontja és felezőpontja fixpont. Azaz az összekötő egyenes egy mindenütt sűrű H részhalmazának (a diadikus racionális számoknak megfeleltethető ponthalmaz) elemei fixpontok. A folytonosság miatt az egyenes valamennyi pontja fix. Most már szokásos gondolatmenet mutatja, hogy ha van három nem kollineáris fixpont, akkor a rajtuk átfektetett sík minden pontja fix és négy nem egysíkú fixpont léte meghatározza a tér identikus leképezését.

Második lépésünk az osztóviszony tartás és azon tény együttes igazolása, hogy a leképezést egyértelműen meghatározza az általános helyzetű O, A, B, C pontnégyes és annak képe O, A', B', C' .

Ehhez először az $s' = (OA'B')$ síkot O körül forgassuk az $s = (OAB)$ síkba. Ez a forgatás a síkokra állított merőlegesek síkjára merőleges O -n áthaladó tengely körüli forgatást jelent, azaz egybevágósággal reprezentálódik (azaz maga is osztóviszonytartó leképezés). Ezután az s -re merőleges O -n áthaladó tengely körüli forgassuk az OA' egyenes OA'' képét az OA egyenessel fedő helyzetbe. Az O középpontú centrális nyújtással a kapott A''' pontot A -be vihetjük. Ezután következik a B''' pont B pontba transzformálása egy olyan leképezéssel, melynél az (OAB) síkra merőleges (OA) -n áthaladó α sík pontjai helyben maradnak a többi pont képét pedig az alábbi módon

határozzuk meg:

A P pontból a $(B'''B)$ egyenessel párhuzamos t egyenest húzunk, megkeressük a $(B'''P)$ egyenesnek az α síkkal való metszéspontját D -t, ezt összekötjük B -vel és az összekötő egyenesnek t -vel való metszéspontját rendeljük P -hez mint képet.

Világos, hogy a $(B'''B)$ egyenes és a B''' -n keresztül α -val párhuzamosan fektetett sík pontjai kivételével minden P ponthoz rendeltünk egy egyértelműen meghatározott képet. Ezen térelemek pontjainak képét alkalmas összetartozó segédpontpár felhasználásával definiálhatjuk, mely definíció (a párhuzamos szelők tétele alapján) független lesz a segédpontpár választásától. Ez a leképezés – amit ferde affinitásnak is nevezhetünk – illeszkedés, egyenes és osztóviszonytartó.

Az utolsó lépésben egy újabb ferde affinitással a C'''' pontot képezzük C -be, azaz négy megfelelő leképezés kompozíciójával melyet g -nek nevezünk O, A', B', C' pontokat rendre O, A, B, C pontokba vittük. A $g \circ f$ leképezésnek O, A, B, C fixpontjai így a leképezés identitás, és így g inverze a kiindulási f leképezés szintén osztóviszonytartó.

Az osztóviszonytartás egyszerű következménye, hogy f reguláris, lineáris transzformáció, ahogy azt állítottuk. $\square$

5.2.1. Megjegyzés. *Jegyezzük meg, hogy a folytonosság feltételét a tétel kimondásából elhagyhatjuk ha tudjuk, hogy egy adott egyenesen mindenütt sűrűn elhelyezkedő fixpontrendszer léte elegendő ahhoz, hogy a kollineáció az egyenes minden pontját fixen hagyja. A végtelen távoli pontjával bővített (projektív) egyenesen ez a harmonikus involúció és a projektív rendezés tulajdonságaival igazolható, amit az 5.2.3 Tételben láthatunk majd, azaz a későbbiekben ennek a tételnek erősebb alakját is használhatjuk.*

A szinguláris lineáris transzformációk a tér párhuzamos vetítései és az egyenestartó, illeszkedéstartó leképezésekkel kompozícióként adódó leképezéseket írnak le. Ahogy azt látni fogjuk, a párhuzamos vetítésekhez tartozó lineáris leképezések könnyen megadhatók azaz a vetítések leírhatók lineáris transzformációként, fordítva pedig minden szinguláris transzformáció (a sajátérték problémája megoldása után) felírható egy vetítés és egy reguláris transzformáció szorzataként.

5.2.1. O fixpontú tükrözések, merőleges vetítések, forgatások.

A következőkben konkrétan leírjuk a leggyakrabban használt leképezésekhez rendelt lineáris transzformációk mátrixait.

***O*-n áthaladó síkra vonatkozó tükrözés**

Írjuk fel a leképezés vektoregyenletét. Az $\mathbf{x}$ helyvektor végpontjához rendelt képpont helyvektora $\mathbf{x}'$. A leképezés ekkor az alábbi formula alapján számolható:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2\langle \mathbf{n} | \mathbf{x} \rangle \mathbf{n},$$

ahol $\mathbf{n} = (A, B, C)^T$ a sík egység normálvektora. Könnyen ellenőrizhető, hogy a lineáris transzformáció mátrixa ekkor:

$$T_s = \begin{pmatrix} 1 - 2A^2 & -2AB & -2AC \\ -2BA & 1 - 2B^2 & -2BC \\ -2CA & -2CB & 1 - 2C^2 \end{pmatrix}.$$

***O*-n áthaladó síkra vonatkozó vetítés**

A fenti számolást mindössze abban kell megváltoztatni, hogy a párhuzamos összetevőt kell levonni, nem annak kétszeresét. Ezért a kérdéses mátrix:

$$V_s = \begin{pmatrix} 1 - A^2 & -AB & -AC \\ -BA & 1 - B^2 & -BC \\ -CA & -CB & 1 - C^2 \end{pmatrix}.$$

***O*-n áthaladó egyenesre vonatkozó tükrözés**

Az $\mathbf{n}$ irányvektorú egyenesre vonatkozó tükrözés nem más mint az ugyan-ezen normálvektorú síkra vonatkozó tükrözés szorzata az origóra vonatkozó tükrözéssel. Ezért a mátrixa:

$$T_e = \begin{pmatrix} -1 + 2A^2 & 2AB & 2AC \\ 2BA & -1 + 2B^2 & 2BC \\ 2CA & 2CB & -1 + 2C^2 \end{pmatrix}.$$

***O*-n áthaladó egyenesre vonatkozó vetítés**

Ezen transzformáció összege az $\mathbf{n}$ normálvektorú síkra vonatkozó vetítéssel az identitást adja. Így mátrixa:

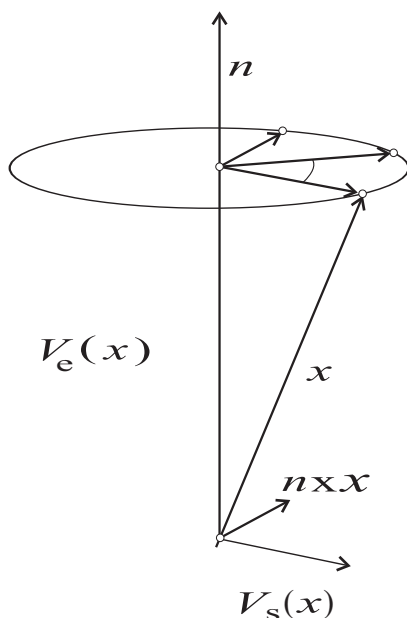
$$V_e = \begin{pmatrix} A^2 & AB & AC \\ BA & B^2 & BC \\ CA & CB & C^2 \end{pmatrix}.$$

Észrevehető, hogy a kapott mátrix a normálvektornak és transzponáltjának diadikus szorzata.

Vektoriális szorzás balról egy fix vektorral

Legyen most az adott vektor a fenti $\mathbf{n} = (A, B, C)^T$ vektor, ezúttal nem feltétlenül egységvektor. A vektoriális szorzat koordinátáinak kiszámítása alapján a lineáris transzformáció mátrixa:

$$V_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \\ -B & A & 0 \end{pmatrix}.$$

 O -n áthaladó egyenes körüli forgatás

5.2. ábra. Forgatás egyenes körül

Legyen az egyenes egység irányvektora $\mathbf{n} = (A, B, C)^T$. Az egyenes körüli φ szögű forgatással kapott $\mathbf{x}'$ pont helyvektora a vektoriális szorzat geometriai tartalma alapján a következőképpen állítható elő:

Az $\mathbf{x}$ helyvektor $\mathbf{n}$ normálvektorú síkra vonatkozó merőleges vetülete és az $\mathbf{n} \times \mathbf{x}$ vektorok síkjában φ szöggel elforgatjuk a merőleges vetületet, majd a kapott vektorhoz az $\mathbf{n}$ egyenesére vonatkozó vetületet hozzáadjuk (lásd az 5.2.ábrát). Azaz

$$\mathbf{x}' = V_e(\mathbf{x}) + \cos \varphi V_s(\mathbf{x}) + \sin \varphi V_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}),$$

így a mátrix a következő alakban állítható elő:

$$F_\varphi = \begin{pmatrix} A^2 & AB & AC \\ BA & B^2 & BC \\ CA & CB & C^2 \end{pmatrix} + \cos \varphi \begin{pmatrix} 1 - A^2 & -AB & -AC \\ -BA & 1 - B^2 & -BC \\ -CA & -CB & 1 - C^2 \end{pmatrix} + \\ + \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \\ -B & A & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2.2. Pontok homogén koordinátái

5.2.1. Definíció. A $P = (x, y, z)^T \in E^3$ pont homogén koordinátái alatt a négy méretű oszlopvektorok azon halmazát értjük, melynek elemei csak nem nulla számszorosan térnek el az $(x, y, z, 1)^T$ vektortól.

Az összes ilyen négyes halmazát a pont ekvivalencia osztályának is hívjuk. Ez az ekvivalencia fogalom nyilván ekvivalencia reláció is egyben. A továbbiakban azon ekvivalencia osztályokhoz, mely reprezentánsaiban az utolsó koordináta nulla, a tér egy irányát vagy végtelen távoli pontját rendeljük és nem különböztetjük meg a közönséges és végtelen távoli pontokat egymástól.

5.2.2. Definíció. Ekvivalens két lineáris transzformáció, ha egy ortonormált homogén bázisra vonatkozóan felírt mátrixaik egymás nem nulla számszorosai.

A lineáris transzformációk ekvivalenciája is ekvivalencia reláció.

5.2.2. Tétel. Minden homogén koordinátarendszerben felírt

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{u}^T & 1 \end{pmatrix}$$

alakú lineáris transzformáció egyenestartó leképezést reprezentál, mely kettősvizonytartó, és pontosan akkor osztóviszonytartó, ha $\mathbf{u}$ a zérus vektor.

Bizonyítás: Az egyenestartás egyszerűen következik abból, hogy lineáris transzformáció az együtthatókat megőrzi és homogén koordinátákkal adott három pont pontosan akkor illeszkedik egy egyenesre ha lineárisan összefüggőek. A kettősvizonytartás igazolásához tekintsük egy egyenes négy pontját az

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \frac{1}{1+\alpha}(\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}), \frac{1}{1+\beta}(\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})$$

alakban, ahol $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ utolsó koordinátája, így a másik két pont utolsó koordinátája is 1. A kettősvizonyuk ekkor figyelembe véve, hogy a kettősvizony két osztóviszony hányadosa:

$$\frac{\frac{\alpha}{1+\alpha}|\mathbf{a} + \mathbf{b}|}{\frac{1}{1+\alpha}|\mathbf{a} + \mathbf{b}|} : \frac{\frac{\beta}{1+\beta}|\mathbf{a} + \mathbf{b}|}{\frac{1}{1+\beta}|\mathbf{a} + \mathbf{b}|} = \frac{\alpha}{\beta},$$

ahol felülvonás jelöli az első három koordináta által meghatározott 3 méretű vektort. Alkalmazva transzformációnkat a pontnégyesre az első három vektor képeinek utolsó koordinátái rendre

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1, \mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1, \mathbf{u}^T \cdot \frac{1}{1+\alpha}(\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}) + 1 = \\ & = \frac{1}{1+\alpha}(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1) + \frac{\alpha}{1+\alpha}(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1). \end{aligned}$$

Az osztóviszony kiszámításához ezekkel a számokkal normálnunk kell a vektorokat mielőtt a páronkénti különbségek hosszát kiszámítjuk. Kapjuk, hogy az osztóviszony

$$\begin{aligned} & \frac{\left| \frac{1}{\frac{1}{1+\alpha}(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1) + \frac{\alpha}{1+\alpha}(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1)} \left(\frac{1}{1+\alpha}(\bar{\mathbf{a}} + \alpha\bar{\mathbf{b}}) \right) - \frac{1}{\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1} \bar{\mathbf{a}} \right|}{\left| \frac{1}{\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1} \bar{\mathbf{b}} - \frac{1}{\frac{1}{1+\alpha}(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1) + \frac{\alpha}{1+\alpha}(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1)} \left(\frac{1}{1+\alpha}(\bar{\mathbf{a}} + \alpha\bar{\mathbf{b}}) \right) \right|}} = \\ & = \alpha \frac{\left| \frac{-(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1)}{((\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1) + \alpha(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1))(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1)} \bar{\mathbf{a}} + \frac{1}{((\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1) + \alpha(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1))} \bar{\mathbf{b}} \right|}{\left| \frac{-1}{((\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1) + \alpha(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1))} \bar{\mathbf{a}} + \frac{(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1)}{((\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1) + \alpha(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1))(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1)} \bar{\mathbf{b}} \right|}} = \\ & = \alpha \frac{(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1)}{(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1)}. \end{aligned}$$

Hasonlóképpen a másik osztóviszony:

$$\beta \frac{(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1)}{(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1)},$$

a kettősvizony pedig megint $\alpha : \beta$. Az osztóviszonytartás csak úgy teljesülhet, ha minden $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ esetén

$$1 = \frac{(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{b}} + 1)}{(\mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{a}} + 1)},$$

teljesül, ami viszont csak $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ esetén lehetséges, ahogy azt állítottuk. $\square$

Az osztóviszonytartás geometriai jelentése, hogy végtelen távoli pontok egymásba transzformálódnak, azaz az osztóviszonytartó leképezések párhuzamosságtartóak is. A végtelen távoli kollineáris pontok halmazait végtelen távoli egyeneseknek nevezzük, az összes végtelen távoli pont együtt alkotja a végtelen távoli síkot. Ezek után a végtelen és közöséges egyeneseket (és síkokat) sem különböztetjük meg egymástól.

5.2.3. Definíció. *Kollineációnak nevezzük a tér olyan transzformációját, mely a pontok és egyenesek halmazán bijekció és az illeszkedést őrzi.*

A 5.2.1 Tételben láttuk, hogy a közöséges tér reguláris lineáris transzformáció éppen a közöséges tér folytonos O -t fixen hagyó kollineációit adják, azaz a kibővített tér azon kollineációit mely fixpontja O és invariáns egyenese a végtelen távoli egyenes. Homogén koordinátákban ezeknek a transzformációknak a reguláris A mátrixhoz tartozó

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

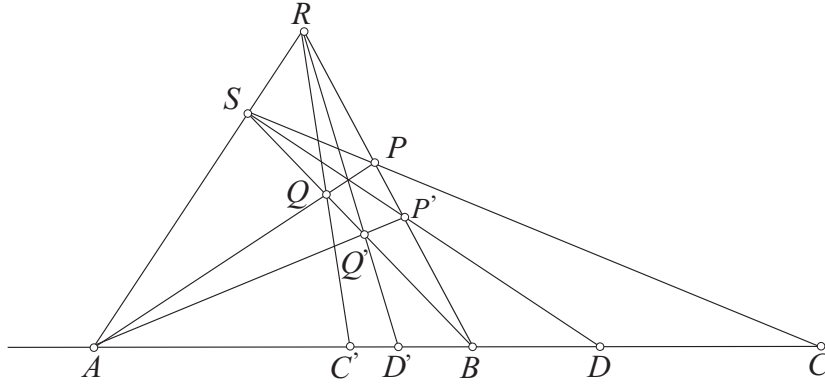
mátrixok ekvivalencia osztályai tartoznak. Mintahogy arra az 5.2.1 Megjegyzésben utaltunk, a folytonosság feltétele elhagyható, ami az 5.2.3. Tétel következménye. A tétel kimondása előtt definiáljuk a harmonikus elválasztás és pontrendszer fogalmát:

5.2.4. Definíció. *Az egyenes egy pontpárja harmonikusan választ el egy másik pontpárt, ha a négy pont kettőviszonya -1 . Három pont által generált harmonikus pontrendszert a korábbi pontokra vonatkozó valamennyi harmonikus társnak a pontrendszerhez csatolása útján rekurzív módon definiáljuk.*

5.2.3. Tétel (Staudt-Darboux). *Az egyenesnek minden önmagára való, három különböző fixponttal rendelkező, a harmonikus elválasztást őrző egyértelmű leképezése, az azonosság.*

Bizonyítás:

Legyen A, B, C az egyenes három különböző fixpontja a T kollineációra vonatkozóan. Mivel ez a harmonikus elválasztásokat őrzi, a ponthármunk által generált harmonikus pontrendszer minden pontja szintén fixpont. Legyen most Q egy olyan pont, mely a leképezésnél a tőle különböző Q' pontba megy át. Tekintettel a harmonikus pontrendszer mindenütt sűrű voltára, vannak olyan A_1, B_1, C_1 pontok a harmonikus rendszerből, melyekre az $A_1QB_1Q'C_1$ ciklikus rendezés áll fenn. Az A_1Q és B_1C_1 pontpárok nem választják el egymást, tehát van olyan XY pontpár, amely mindkét előzőt harmonikusan választja el. Ez következik abból, hogy a kijelölt B_1C_1 szakaszt



5.3. ábra. Harmonikus involúció

nem tartalmazó A_1Q szakaszon értelmezett azon leképezés, amely minden ponthoz annak harmonikus társát rendeli, a végpontokat pedig fixen hagyja, az A_1Q szakaszt a B_1C_1 -et tartalmazó szakaszba viszi, ezen képszakaszt pedig a B_1C_1 -re vonatkozó analóg leképezés (mely a két B_1, C_1 végpontokkal rendelkező szakaszt cseréli fel) a kiindulási A_1Q szakasz részébe viszi. Ezen két ú.n. *harmonikus involúció* szorzata tehát az A_1Q szakaszt részsakaszába képezi, tehát a szorzat leképezésnek van fixpontja. A fixpont természetesen egy alkalmas harmonikusan elválasztó pontpárt határoz meg. Ha most $X'Y'$ ezen pontpár képe, akkor ez közös harmonikus párja az A_1Q' és B_1C_1 pontpároknak, ami lehetetlen, mert ezek elválasztják egymást. (Ha XY közös harmonikus párja AB és CD pontpároknak akkor a ciklikus rendezés alapösszefüggéseiből és a harmonikus involúció kettősviszony (ezáltal ciklikus rendezés) tartásából adódik, hogy AB és CD nem választja el egymást. Valóban ha C és D az AB egyenes két A, B -től különböző pontja, és C' illetve D' ezek A, B párja vonatkozó harmonikus társai, akkor például az (A, C, D, B) ciklikus rendezésből adódik (A, C', D', B) . Mivel fennállnak az (A, C, B, C') , (A, D, B, D') elrendezések is, ezért

$$(A, C, D, B), (A, C, B, C') \implies (C, D, B, C') \implies (B, D, C, C')$$

rendezés. Hasonlóképpen

$$(A, C', D', B), (A, D', B, D) \implies (C', D', B, D) \implies (B, D, C', D')$$

így igaz

$$(B, D, C, C'), (B, D, C', D') \implies (D, C, C', D') \implies (C, C', D', D)$$

rendezés. Azaz CC' és DD' nem választják el egymást, ahogyan azt állítottuk. A kettősviszonytartás pedig egyszerű következménye annak a ténynek,

hogy egy harmonikus involúció mindig előállítható három centrális vetítés szorzataként, a 5.3. ábrán az AB egyenes pontsorát először S -ből vetítettük RB -re, majd A -ból SB -re, végül R -ből vissza AB -re.) $\square$

A tétel következménye, hogy az 5.2.1. Tétel bizonyításában szereplő azon állítás, hogy ha az egyenesen van két közösleges fixpont (akkor persze a végtelen távoli pontja egy harmadik fixpont), akkor valamennyi pontja fix; valóban igaz. Ezért a

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

alakú leképezések ekvivalencia osztályai éppen a végtelen távoli síkot fixen hagyó, közösleges fixponttal is rendelkező kollineációknak felelnek meg reguláris A mátrix esetén. Mivel a közösleges fixponttal nem rendelkező, a végtelen távoli síkot invariánsan hagyó kollineációk közösleges koordinátákban az inhomogén lineáris transzformációknak felelnek meg (reguláris A -val), az ideális síkot invariánsan tartó kollineációk homogén koordinátákban felírt mátrix reprezentációja:

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

ahol A reguláris. Mostmár kimondhatjuk az 5.2.2 Tétel megfordítását:

5.2.4. Tétel. *Minden kollineáció - homogén koordinátákra vonatkozóan - reguláris lineáris transzformációk egy*

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{u}^T & 1 \end{pmatrix}$$

ekvivalencia osztályával azonosítható.

Bizonyítás: Azon kollineáció mely a

$$\begin{pmatrix} E & \mathbf{t} \\ \mathbf{u}^T & 1 \end{pmatrix}$$

ekvivalencia osztályához tartozik az $(x, y, z, 1)^T$ közösleges pontot az

$$(x + t_1, y + t_2, z + t_3, u_1x + u_2y + u_3z + 1)^T$$

pontba viszi, míg a végtelen távoli $(x, y, z, 0)^T$ pontot az

$$(x, y, z, u_1x + u_2y + u_3z)^T$$

pontba. Így a

$$0 = u_1x + u_2y + u_3z + 1$$

egyenletű közös síkot a végtelen távoli síkkal felcseréli. Ha egy kollineációnál a végtelen távoli sík nem invariáns, és képe egy közös sík koordinátákkal $u_1x + u_2y + u_3z + 1 = 0$ alakban megadható sík, a kollineáció kompozíciója pld. az

$$\begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{u}^T & 1 \end{pmatrix}$$

leképezéshez tartozó kollineációval már egy, a végtelen távoli síkot invariánsan hagyó kollineáció, ami a korábbiak szerint az

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

lineáris transzformáció ekvivalencia osztályának felel meg. Világos, hogy az

$$\begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{u}^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ -\mathbf{u}^T A & -\mathbf{u}^T \mathbf{t} + 1 \end{pmatrix}$$

leképezés ekkor a kiindulási kollineáció mátrixát adja.

Ha a végtelen távoli sík képe az $u_1x + u_2y + u_3z = 0$ sík, akkor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ és a reguláris

$$\begin{pmatrix} E & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix által reprezentált kollineáció a végtelen távoli síkot az

$$u_1x + u_2y + u_3z = 0$$

síkkal felcseréli és kollineációnk megint

$$\begin{pmatrix} E & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

alakban felírható lineáris transzformáció ekvivalencia osztályához tartozik. Ezt szerettük volna bizonyítani. $\square$

A tétel szerint osztályozhatjuk a kollineációkat az alábbi módon:

- **Projektivitás:** Általános kollineáció homogén koordinátarendszerben analitikusan az

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{u}^T & 1 \end{pmatrix}$$

lineáris transzformációval írható le, ahol A reguláris.

- **Affinitás:** A végtelen távoli síkot invariánsan tartó projektivitás, ennek homogén analitikus alakja:

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Hasonlóság:** Olyan affinitás mely a szakaszok hosszának arányát őrzi. Ezeket olyan lineáris transzformációk adják, ahol A oszlopvektorai páronként merőlegesek, hosszuk négyzete pedig a hasonlóság arányának négyzete, azaz a szakasz és képe által meghatározott hosszak aránya.
- **Egybevágóság:** Olyan hasonlóság, ahol a fenti arány 1, azaz a kollineáció távolságtartó. Az A mátrix ekkor ortogonális.

Felmerül a kérdés, hogy a szinguláris mátrixokhoz tartozó lineáris leképezéseknek milyen geometriai leképezések felelnek meg. Az világos, hogy térelem képe térelem a dimenziók viszont csökkenhetnek, azaz sík képe lehet sík, egyenes vagy pont, egyenes képe, egyenes vagy pont. Az ilyen leképezéseket projekcióknak vagy vetítéseknek nevezzük. Aszerint, hogy a végtelen távoli sík invariáns vagy nem a vetítést párhuzamosnak, vagy centrálisnak nevezzük. A teljes tér képe legfeljebb kétdimenziós azaz sík vagy egyenes. A vizsgálatainkból kizárjuk a zérus mátrix ekvivalencia osztályát, ahogy a pontok homogén koordinátái sem lehetnek mind nullák.

5.3. Az n -dimenziós euklideszi tér

... a logika sok szabálya helyett beértem a négy következővel...

Az első az volt, hogy soha semmit sem fogadjak el igaznak, amit nem evidens módon ismertem meg annak; azaz hogy gondosan kerüljek minden elhamarkodást és elfogultságot és semmivel többet ne foglaltak bele az ítéleteimbe, mint ami oly világosan és elkülönítetten áll elmém előtt, hogy nincs okom kétségbe vonni.

R. Descartes: Értekezés az ész helyes vezetésének módszeréről

Az n -dimenziós tér fogalma tiszta absztrakció, a gyakorlatban nem tudjuk ellenőrizni a megkívánt tulajdonságok fennállását, ezért gondosan kell ügyelnünk arra, hogy speciális eseteiként ellenőrizhető struktúrákat kapjunk. Természetes kiindulási mód, a matematika egy másik (kidolgozott) ágának fogalmai alapján elindulni. Jelen fejezetben mi is ezt az utat választjuk, felhasználunk alapvető lineáris algebrai ismereteket.

5.3.1. Definíció. A $\langle V, \langle \cdot | \cdot \rangle \rangle$ jelöljön egy n -dimenziós euklideszi vektorteret. Ha az E^n halmaz pontjaiból alkotott rendezett párokat meg tudjuk feleltetni a vektortér vektorainak, úgy, hogy a következő tulajdonságok teljesüljenek:

1. Tetszőleges $\overrightarrow{PQ}$ párhoz legyen $\mathbf{v} \in V$, hogy $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$.
2. Minden $P \in E^n$ ponthoz és $\mathbf{v}$ vektorhoz legyen egyértelműen $Q \in E^n$, amire $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$.
3. Minden $P \in E^n$ pontra $\overrightarrow{PP} = 0$ teljesüljön.
4. Ha $P, Q, R \in E^n$ akkor $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = 0$ teljesüljön.

akkor E^n halmazt n -dimenziós euklideszi (analitikus) térnek nevezzük.

Az n -dimenziós euklideszi tér analitikus geometriáját az affín alterek definíciójára építjük. Ehhez a továbbiakban rögzítünk egy pontot, amit a tér origójának nevezünk, és egy ortonormált bázist, ami koordinátarendszerünket definiálja.

5.3.2. Definíció. Ha $V_k < V$ k -dimenziós altér V -ben, akkor az $X = \mathbf{x}_0 + V_k$ halmazt E^n k -dimenziós affín alterének nevezzük. Az 1-dimenziós affín altér az egyenes az $(n - 1)$ -dimenziós a hipersík.

Az egyenes paraméteres vektoregyenlete, ahogy azt a háromdimenziós térben láttuk az

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{v},$$

alakot ölti, ahol $\mathbf{x}^0$ egy pontjának helyvektora, $\mathbf{v}$ az irányvektora. A paraméteres vektoregyenlet koordinátánkénti kiírása adja megint a paraméteres egyenletrendszerét,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + tv_1 \\ &\vdots \\ x_n &= x_n^0 + tv_n \end{aligned}$$

ebből a paraméter kiküszöbölésével kapjuk az egyenes egyenletrendszerét, ami $v_1 = \dots = v_k \neq 0, v_{k+1} = \dots = v_n = 0$ esetén az

$$\frac{x_1 - x_1^0}{v_1} = \dots = \frac{x_k - x_k^0}{v_k}, \quad x_{k+1} = x_{k+1}^0, \dots, x_n = x_n^0$$

alakot ölti.

Egy *hipersík* definíció szerint azon pontokat tartalmazza, amelyek helyvektorai:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

alakban írhatók fel valamely valós α_i számokkal. Azaz az

$$\{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}\}$$

vektorrendszer összefüggő, így $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ koordinátamátrixának $(n-1)$ -méretű aldeterminánsaiból, mint koordináta n -esből álló $\mathbf{n}$ vektorral adódik a *hipersík vektoregyenlete*:

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 | \mathbf{n} \rangle = 0.$$

Ezen egyenlet a $\langle \mathbf{r} | \mathbf{n} \rangle = c$ alakban is felírható, ahol c valós szám. Világos, hogy a tér pontjai minden $\mathbf{n}$ vektorra és valós c számra a következő három halmaz közül pontosan egyhez tartoznak:

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{n} \rangle < c, \quad \langle \mathbf{r} | \mathbf{n} \rangle = c, \quad \langle \mathbf{r} | \mathbf{n} \rangle > c$$

ez indokolja a következő elnevezést:

5.3.3. Definíció. A $\langle \mathbf{r} | \mathbf{n} \rangle = c$ *hipersík által definiált nyílt feltéreknek nevezzük a*

$$H_c(\mathbf{n})^+ := \{P | \overrightarrow{OP} = \mathbf{r}, \langle \mathbf{r} | \mathbf{n} \rangle > c\}, \quad H_c(\mathbf{n})^- := \{P | \overrightarrow{OP} = \mathbf{r}, \langle \mathbf{r} | \mathbf{n} \rangle < c\}$$

halmazokat. Zárt feltér vagy röviden feltér a nyílt feltér és a határoló hipersíkjának uniója.

Alapvető jelentőségű fogalom a konvexitás, melynek analitikus kezelése nagyon hasznos lehet.

5.3.4. Definíció. A $H \subset E^n$ halmaz konvex, ha tetszőleges két pontjával együtt azok összekötő szakaszának pontjait is tartalmazza.

A háromdimenziós térben felépítettük a kollineációk leírására legalkalmasabb eszközrendszert, a homogén koordinátázást. Ezt most kiépíthetjük az n -dimenziós térben is. A tételek a háromdimenziós esetnek megfelelően kimondhatók, a bizonyítások ugyanazok, így az olvasóra bízunk őket.

5.3.5. Definíció. A $P = (x_1, \dots, x_n)^T \in E^n$ pont homogén koordinátái alatt az $n+1$ méretű oszlopvektorok azon halmazát értjük, melynek elemei csak nem nulla számszorosan térnek el az $(x_1, \dots, x_n, 1)^T$ vektortól.

A továbbiakban azon ekvivalencia osztályokhoz, mely reprezentánsaiban az utolsó koordináta nulla a tér egy irányát vagy végtelen távoli pontját rendeljük. A továbbiakban nem különböztetjük meg a közönséges és végtelen távoli pontokat.

5.3.6. Definíció. *Két lineáris transzformáció ekvivalens, ha a fixált ortonormált homogén bázisra vonatkozóan felírt mátrixaik egymás nem nulla számszorosai.*

5.3.1. Tétel. *Minden homogén koordinátarendszerben felírt*

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{u}^T & 1 \end{pmatrix}$$

alakú lineáris transzformáció egyenestartó leképezést reprezentál, mely ket-tősvizonytartó, és pontosan akkor osztóviszonytartó, ha $\mathbf{u}$ a zérus vektor.

5.3.7. Definíció. Kollineációnak nevezzük a tér olyan transzformációját, mely a pontok és egyenesek halmazán bijekció és az illeszkedést őrzi.

5.3.2. Tétel. *Minden kollineáció - homogén koordinátákra vonatkozóan - reguláris lineáris transzformációk egy ekvivalencia osztályával azonosítható.*

A tétel szerint szintén osztályozhatjuk a kollineációkat az alábbi módon:

- **Projektivitás:** Általános kollineáció, homogén koordinátarendszerben az

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{u}^T & 1 \end{pmatrix}$$

lineáris transzformációval írható le, ahol A reguláris.

- **Affinitás:** A végtelen távoli síkot invariánsan tartó projektivitás, ennek homogén analitikus alakja:

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

- **Hasonlóság:** Olyan affinitás mely a szakaszok hosszának arányát őrzi. Ezeket olyan lineáris transzformációk adják, ahol A oszlopvektorai páronként merőlegesek, hosszuk négyzete pedig a hasonlóság arányának négyzete.
- **Egybevágóság:** Olyan hasonlóság, ahol a hasonlósági arány 1, azaz a kollineáció távolságtartó. Az A mátrix ekkor ortogonális.

Eljutottunk az n -dimenziós valós projektív tér fogalmáig:

5.3.8. Definíció. *Az n -dimenziós valós projektív tér az ideális pontjaival bővített n -dimenziós euklideszi tér.*

5.3.1. Másodrendű felületek osztályozása.

Vizsgáljuk az

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$$

egyenletet kielégítő helyvektorok végpontjai által meghatározott ponthalmazokat, amelyeket az n -dimenziós euklidészi tér másodrendű felületeinek nevezünk. Itt $A \in R^{n \times n}$, $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in R^n$, $c \in R$.

Az inhomogén koordinátázásról áttérünk homogén koordinátázásra. Egyenletünk ekkor a homogén koordinátájú új $\mathbf{X}$ vektorral a következő alakot ölti:

$$\mathbf{X}^T \cdot \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & c \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Változtassuk meg koordinátarendszerünket úgy, hogy $\mathbf{t}$ vektor mutasson a régiből az új kezdőpontba és B legyen a báziscsere ortogonális mátrixa. Ekkor egyenletünk új alakja:

$$\mathbf{X}^T \cdot \begin{pmatrix} B^T A B & B^T A \mathbf{t} + B^T \mathbf{b} \\ (\mathbf{t}^T A + \mathbf{b}^T) B & \mathbf{t}^T A \mathbf{t} + \mathbf{b}^T \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{b} + c \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Célunk most B és $\mathbf{t}$ olyan választása, hogy a fenti egyenlet minél áttekinthetőbb alakot öltjön. Feltehető, hogy A szimmetrikus így B választható úgy, hogy $B^T A B$ diagonális legyen főátlójában a sajátértékeivel (Ezeket λ_i -vel jelöljük.) A következő eseteket különböztetjük meg:

1. Ha valamennyi sajátérték nullától különbözik, A invertálható így a $\mathbf{t} = -A^{-1}\mathbf{b}$ választással egyenletünk alakja:

$$\mathbf{X}^T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & \lambda_n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = 0.$$

2. Általános esetben legyen az A ortonormált sajátvektorrendszere $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n\}$. Ekkor $B = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n]$ ugyanakkor a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{t}$ vektorok $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n\}$ bázisra vonatkozó $\mathbf{t} = t_1 \mathbf{s}_1 + \dots + t_n \mathbf{s}_n$, $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{s}_1 + \dots + b_n \mathbf{s}_n$ előállításában szereplő t_i és b_i koordinátákkal

$$A \mathbf{t} = \sum_{i=1}^n t_i \lambda_i \mathbf{s}_i$$

illetve innen a $(B^T = B^{-1}$ figyelembe vételével)

$$(B^T A \mathbf{t} + B^T \mathbf{b})_i = t_i \lambda_i + b_i$$

előállításához jutunk. Azaz ha λ_i nem nulla akkor legyen $t_i = -\frac{b_i}{\lambda_i}$ ha pedig nulla, akkor az i -edik sor utolsó oszlopában t_i -től függetlenül b_i áll. (Minden sorban legfeljebb egy nem nulla szám szerepel.) A t_i számok egyértelműen meghatározottak ha λ_i nem nulla, egyébként a végső formula felírásában szerepük nincs, így további kritériumoknak megfelelő választásuk is lehetséges.

A fenti észrevételek alapján a másodrendű görbék ($n = 2$) illetve másodrendű felületek ($n = 3$) ismert típusai könnyen meghatározhatóak.

Másodrendű görbék

Legyen most $n = 2$. Ekkor a következő esetek jöhetnek szóba:

1. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ és $-\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c >, =, < 0$. Ekkor az egyenletet kielégítő vektorok végpontjainak mértani helye rendre az üreshalmaz, a koordináta-rendszer kezdőpontja, illetve ellipszis (a sajátértékek egyenlősége esetén kör).
2. A $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ esetben, a $\lambda_1 x^2 + 2b_2 y + (-\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c) = 0$ egyenlet adódik, melyet $b_2 \neq 0$ esetén az $y' = y + \frac{-\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c}{2b_2}$ helyettesítés a $\lambda_1 x^2 + 2b_2 y' = 0$ alakba viszi. Ebben az esetben a végeredmény parabola. Ha $b_2 = 0$, szóba jön az üreshalmaz, a kétszeres egyenes, és a párhuzamos egyenespár.
3. Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, akkor a teljes sík, vagy az üreshalmaz a lehetséges megoldások.
4. Végül, ha $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ és $-\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c >, =, < 0$; akkor metsző egyenespár vagy hiperbola a lehetséges mértani hely.

A $D = -\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c$ jelölés mellett eredményeinket az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze:

		$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\emptyset$	$x = y = 0$	ellipszis
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 = 0$	parabola	parabola, $x^2 = 0$	parabola, $\lambda_1 x^2 = -D$
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 < 0$	hiperbola	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$	hiperbola
$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = 0$	$\emptyset$	$x, y \in \mathbb{R}$	$\emptyset$

Másodrendű felületek

Az $n = 3$ esetben szóba jövő esetek rendre:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ és $-\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c >, =, < 0$
2. $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$ és $-\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c >, =, < 0$
3. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ és $-\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c >, =, < 0$
4. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ és $-\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c >, =, < 0$
5. $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ és $-\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c >, =, < 0$.

Az első esetben üres alakzatot, egy pontot vagy ellipszoidot kapunk, beleértve a gömb esetét is.

A második pontban megint megkapjuk az üres alakzatot továbbá az elliptikus hengert és az elliptikus paraboloidot. Ehhez vegyük észre, hogy a

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z + (-\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c) = 0$$

egyenlet nem zérus b_3 esetén lineáris helyettesítéssel a

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z' = 0$$

alakot öltheti.

A harmadik pontban szintén generálódik az üres alakzat, a fennmaradó három eset a kettős és párhuzamos síkpáré, valamint a parabolikus hengeré. Itt megint $b_2, b_3 \neq 0$ esetén, a

$$y = 2b_3y' + 2b_3z' - \frac{D}{4b_2}, \quad z = 2b_2y' - 2b_2z' - \frac{D}{4b_3}$$

lineáris helyettesítéssel juthatunk a

$$\lambda_1 x^2 + 2b_2y + 2b_3z + (-\mathbf{b}^T A^{-1} \mathbf{b} + c) = 0$$

egyenletből a

$$\lambda_1 x^2 + 2b_2b_3y' = 0$$

egyenlethez, mely parabolikus hengert ad. Ha a két paraméter egyike zérus, szintén parabolikus henger a végeredmény, ha mindkettő, a kettős vagy párhuzamos síkpárok adódnak.

A negyedik pontban az üres alakzat mellett a teljes tér előállítását is megkapjuk.

Az ötödik pontban az egyköpenyű és kétköpenyű hiperboloidok mellett a valós körkúp is adódik.

Az esetek között található üres alakzat, aszerint, hogy milyen egyenletnek nincs valós gyöke, a következő esetekbe sorolható: képzetes ellipszoid (nincs valós ideális pontja sem), képzetes elliptikus henger (egy valós ideális pontja van), képzetes metsző síkpár (egy valós egyenese van), képzetes párhuzamos síkpár (egy valós ideális egyenese van). Eredményeinket az alábbi táblázat foglalja össze:

			$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 > 0$	képzetes ellipszoid	pont	ellipszoid
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 = 0$	képzetes elliptikus henger, elliptikus paraboloid	képzetes metsző síkpár, elliptikus paraboloid	elliptikus henger elliptikus paraboloid
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_3 = 0$	képzetes párhuzamos síkpár, parabolikus henger	kettős sík, parabolikus henger	párhuzamos síkpár, parabolikus henger
$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_3 = 0$	$\emptyset$	$x, y, z \in \mathbb{R}$	$\emptyset$
$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 > 0$	$\lambda_3 < 0$	kétköpenyű hiperboloid	körkúp	egyköpenyű hiperboloid

5.4. Az n -dimenziós hiperbolikus tér

... a logika sok szabálya helyett beértem a négy következővel...
A második az volt, hogy a vizsgálódásaimban előforduló minden problémát annyi részre osszam, ahányra csak lehet és ahányra a legjobb megoldás szempontjából szükség van.

R. Descartes: Értekezés az ész helyes vezetésének módszeréről

Az n -dimenziós hiperbolikus teret az n -dimenziós projektív modell segítségével vezetjük be. Tekintsük az n -dimenziós euklideszi tér egységömbjét

mint az n -dimenziós hiperbolikus tér Cayley-Klein féle projektív modelljét. Az euklideszi térnek a szokott módon való beágyazása az n -dimenziós projektív térbe, lehetőséget teremt a homogén koordináták alkalmazására most is. Számításaink alapját két észrevétel adja:

- egyrészt a hiperbolikus tér pontjainak távolsága az origótól elemi számításaink alapján ismert, az euklideszi távolság tangens hiperbolikuszával arányos,
- másrészt a hiperbolikus egybevágóságok analitikus alakja felírható.

5.4.1. Távolság

Kiindulva a Cayley által bevezetett kúpszeletre vonatkozó relatív távolság fogalmából a modellek fejezet hiperboloid modell alfejezetében leírt 2-dimenziós eljárás az n -dimenziós esetre változás nélkül adaptálható. Kényelmi szempontokat figyelembe véve a nulladik koordináta szerepét az $(n+1)$ -edik koordinátára osztjuk és a beágyazó projektív tér távolságképletét kiindulási formulánknak tekintjük. Kapjuk, hogy a távolságot a

$$\cosh \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{k} = \frac{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}},$$

formula írja le, amelyben a szereplő bilineáris függvény indefinit belső szorzatot jelent – az $(n+1)$ -edik koordináták szorzata levonódik az első n koordináta szorzatának összegéből – A k paramétert pedig 1-nek választjuk. A Cayley-Klein modell pontjai az $x_{n+1} = 1$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 < 1$ feltételekkel vannak normálva, így az általános formulából a

$$\cosh d(P, Q) = \frac{1 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle}{\sqrt{1 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \sqrt{1 - \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle}}$$

összefüggés adódik.

A hiperboloid modell pontjaira a $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ normálási feltétel teljesül, ezért a képlet a

$$\cosh d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

összefüggéssé egyszerűsödik.

5.4.2. Egybevágóságok

Láttuk, hogy az n -dimenziós euklideszi tér egybevágóságai homogén derékszögű koordináták alkalmazása mellett a következő alakú lineáris transzformációk ekvivalencia osztályaival írhatók le:

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

ahol A ortogonális transzformáció. A továbbiakban rögzítsük a fixált ortonormált bázisra vonatkozó $x_{n+1} = 1$ síkot a beágyazó euklideszi hipersíknak. Hiperbolikus terünket pedig reprezentálja ennek egységgömbje. Ekkor a tér pontjainak homogén koordinátáit a

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq x_{n+1}^2$$

egyenlőtlenség szabályozza. Az ideális pontok éppen az egyenlőség által kijelölt homogén koordinátájú pontok, ezek a gömb határának pontjai. Legyen a továbbiakban $\hat{A}$ az $(n+1)$ -dimenziós tér egy lineáris transzformációja. Matriksának elemeit $a_{i,j}$ -vel jelöljük, $\hat{A}$ ekvivalencia osztályának az az eleme, melyre $a_{n+1,n+1} \in \{0,1\}$ legyen $\tilde{A}$ -val jelölve, azaz $a_{n+1,n+1} \neq 0$ esetén

$$\tilde{A} := \left(\frac{1}{a_{n+1,n+1}} [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+1}] \right) = \begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{u}^T & 1 \end{pmatrix},$$

egyébként $\hat{A} = \tilde{A}$. A következő két tétel a hiperbolikus egybevágóságokat jellemzi, igazoljuk, hogy a projektív módon modellezett hiperbolikus tér izometriái, lineáris transzformációkkal indukálhatók.

5.4.1. Tétel. *A következő állítások ekvivalensek:*

1. Az $\hat{A}$ lineáris leképezés a modellt invariánsan hagyja;
2. Az

$$\mathbb{A} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & \frac{1}{i}a_{1,n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & \frac{1}{i}a_{n,n+1} \\ ia_{n+1,1} & \dots & ia_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

mátrix λ -ortogonális, azaz valamely $\lambda > 0$ számmal $\lambda E^{n+1} = \mathbb{A}^T \mathbb{A}$;

3. A

$$J = \begin{pmatrix} E^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & -1 \end{pmatrix}$$

definícióval kapott mátrix a $\hat{A}$ mátrixsal kielégíti a $\lambda J = \hat{A}^T J \hat{A}$ egyenlőséget;

4. Az $\hat{A}$ lineáris transzformáció a modell egybevágóságát indukálja.

Bizonyítás: Az állításokat a tételben kimondott sorrendnek megfelelően igazoljuk egymásból.

(1 $\Rightarrow$ 2) Először megmutatjuk, hogy a modellszférát invariánsan tartó lineáris transzformációk kielégítik a tételbeli ortogonalitási feltételt. Jelölje a tér egy ortonormált bázisát $\{\mathbf{e}_i | i = 1, \dots, (n+1)\}$. A $\pm \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{n+1}$ vektorokat az $\hat{A}$ lineáris transzformáció az $x_{n+1} = 1$ síkra mutató $\sqrt{2}$ hosszú vektorba viszi, ahonnan az $\hat{A}$ együtthatóira a

$$\sum_{j=1}^n (\pm a_{j,i} + a_{j,n+1})^2 = (\pm a_{n+1,i} + a_{n+1,n+1})^2$$

egyenlőséghez jutunk. Jelöljük $\mathbf{a}_i$ -vel az n -méretű A mátrix i -edik oszlopvektorát, ekkor a fenti egyenletet az

$$(\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_i \rangle - a_{n+1,i}^2) + (\langle \mathbf{a}_{n+1} | \mathbf{a}_{n+1} \rangle - a_{n+1,n+1}^2) \pm 2(\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_{n+1} \rangle - a_{n+1,i} a_{n+1,n+1}) = 0$$

alakba írhatjuk. Ez csak úgy állhat fenn, ha

$$2(\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_{n+1} \rangle - a_{n+1,i} a_{n+1,n+1}) = 0,$$

és ezért minden i -re teljesül a

$$(\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_i \rangle - a_{n+1,i}^2) + (\langle \mathbf{a}_{n+1} | \mathbf{a}_{n+1} \rangle - a_{n+1,n+1}^2) = 0$$

egyenlet. Ezért szintén fennáll

$$\lambda := \left(\left\langle \frac{1}{i} \mathbf{a}_{n+1} \middle| \frac{1}{i} \mathbf{a}_{n+1} \right\rangle + a_{n+1,n+1}^2 \right) = (\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_i \rangle + i a_{i,n+1})^2$$

egyenlőség, az A oszlopvektorai egyenlő hosszúak. (Mivel a modell gömb $(\mathbf{0}, 1)^T$ középpontja is a gömb belső pontja marad ezért a transzformáció utolsó oszlopának elemeire fennáll még az:

$$\lambda = \left(\left\langle \frac{1}{i} \mathbf{a}_{n+1} \middle| \frac{1}{i} \mathbf{a}_{n+1} \right\rangle + a_{n+1,n+1}^2 \right) > 0$$

összefüggés is, ami alapján a fenti vektorok "hossza" a geometriai hossz.)

Az ortogonalitás bizonyításához tekinthetjük a

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) + \mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e} + \mathbf{e}_{n+1}$$

alakú vektorok képeit. Ezek szintén a modellgömb felszínére mutatnak ezért a következő egyenlőségekhez vezetnek:

$$0 = \left(\langle A\mathbf{e}|A\mathbf{e} \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{n+1,i} + a_{n+1,j})^2 \right) + (\langle \mathbf{a}_{n+1}|\mathbf{a}_{n+1} \rangle - (a_{n+1,n+1})^2) \pm \\ \pm 2 \left(\langle \mathbf{e}|\mathbf{a}_{n+1} \rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{n+1,i} + a_{n+1,j})a_{n+1,n+1} \right).$$

A harmadik tag tehát nulla így teljesül a

$$\frac{1}{2} (\langle \mathbf{a}_i|\mathbf{a}_i \rangle + \langle \mathbf{a}_j|\mathbf{a}_j \rangle + 2 \langle \mathbf{a}_i|\mathbf{a}_j \rangle - a_{n+1,i}^2 - a_{n+1,j}^2 - 2a_{n+1,i}a_{n+1,j}) = \\ = -\langle \mathbf{a}_{n+1}|\mathbf{a}_{n+1} \rangle + a_{n+1,n+1}^2$$

egyenlőség. Mivel a baloldal a korábbi egyenlőségeket figyelembe véve éppen

$$\frac{1}{2} (2 (-\langle \mathbf{a}_{n+1}|\mathbf{a}_{n+1} \rangle + a_{n+1,n+1}^2) + 2 (\langle \mathbf{a}_i|\mathbf{a}_j \rangle - a_{n+1,i}a_{n+1,j})) ,$$

ezért minden i, j párra teljesül, hogy

$$0 = \langle \mathbf{a}_i|\mathbf{a}_j \rangle - a_{n+1,i}a_{n+1,j} = \langle \mathbf{a}_i|\mathbf{a}_j \rangle + (ia_{n+1,i})(ia_{n+1,j}).$$

(**2** $\Rightarrow$ **3**) A bizonyítás második lépéseként belátjuk, hogy az ortogonalitási feltételből következik a mondott második mátrix egyenlet.

Valóban

$$\lambda E = \begin{pmatrix} A^T & i\mathbf{u} \\ \frac{1}{i}\mathbf{t}^T & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{1}{i}\mathbf{t} \\ i\mathbf{u}^T & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T - \mathbf{u}\mathbf{u}^T & \frac{1}{i}A^T\mathbf{t} + ic\mathbf{u} \\ \frac{1}{i}\mathbf{t}^TA + ic\mathbf{u}^T & -\mathbf{t}^T\mathbf{t} + c^2 \end{pmatrix}$$

egyenlőség alapján

$$\frac{1}{i}(A^T\mathbf{t} - c\mathbf{u}) = \frac{1}{i}A^T\mathbf{t} + ic\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

illetve

$$\lambda = -\mathbf{t}^T\mathbf{t} + c^2$$

áll fenn, így

$$J = J\frac{1}{\lambda}\lambda E = \begin{pmatrix} AA^T - \mathbf{u}\mathbf{u}^T & \frac{1}{i}A^T\mathbf{t} + ic\mathbf{u} \\ -(\frac{1}{i}\mathbf{t}^TA + ic\mathbf{u}^T) & \mathbf{t}^T\mathbf{t} - c^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} AA^T - \mathbf{u}\mathbf{u}^T & A^T \mathbf{t} - c\mathbf{u} \\ \mathbf{t}^T A - c\mathbf{u}^T & \mathbf{t}^T \mathbf{t} - c^2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\lambda} \widehat{A}^T J \widehat{A},
\end{aligned}$$

ahogy állítottuk.

(3 $\Rightarrow$ 4) A harmadik következtetés igazolásához fel kell idézni a projektív modellbeli távolság fogalmát. Mivel a modell P, Q pontpárjának hiperbolikus távolságát a $\widetilde{\mathbf{p}}^T = (\mathbf{p}, 1)^T$, $\widetilde{\mathbf{q}}^T = (\mathbf{q}, 1)^T$ helyvektoraik segítségével a

$$\cosh d(P, Q) = \frac{1 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle}{\sqrt{1 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \sqrt{1 - \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle}}$$

fejezi ki, a közönséges $(n+1)$ -dimenziós skaláris szorzattal ezt az egyszerűbb

$$\cosh d(P, Q) = \frac{-\langle J(\widetilde{\mathbf{p}}), (\widetilde{\mathbf{q}}) \rangle}{\sqrt{\langle J(\widetilde{\mathbf{p}}), \widetilde{\mathbf{p}} \rangle} \sqrt{\langle J(\widetilde{\mathbf{q}}), \widetilde{\mathbf{q}} \rangle}}$$

alakban írhatjuk. Így

$$\begin{aligned}
\cosh d(A(P), A(Q)) &= \frac{-\langle J(A(\widetilde{\mathbf{p}})), A(\widetilde{\mathbf{q}}) \rangle}{\sqrt{\langle J(A(\widetilde{\mathbf{p}})), A(\widetilde{\mathbf{p}}) \rangle} \sqrt{\langle J(A(\widetilde{\mathbf{q}})), A(\widetilde{\mathbf{q}}) \rangle}} = \\
&= \frac{-\langle A^T J A(\widetilde{\mathbf{p}}), (\widetilde{\mathbf{q}}) \rangle}{\sqrt{\langle A^T J A(\widetilde{\mathbf{p}}), \widetilde{\mathbf{p}} \rangle} \sqrt{\langle A^T J A(\widetilde{\mathbf{q}}), \widetilde{\mathbf{q}} \rangle}} = \\
&= \frac{-\langle \lambda J(\widetilde{\mathbf{p}}), (\widetilde{\mathbf{q}}) \rangle}{\sqrt{\langle \lambda J(\widetilde{\mathbf{p}}), \widetilde{\mathbf{p}} \rangle} \sqrt{\langle \lambda J(\widetilde{\mathbf{q}}), \widetilde{\mathbf{q}} \rangle}} = \cosh d(P, Q)
\end{aligned}$$

mutatja a távolságtartást.

(4 $\Rightarrow$ 1) Végül ha $\widehat{A}$ a modell egybevágóságát indukálja, akkor világos módon a modellgömböt invariánsan is tartja, azaz az utolsó állításból következik az első. $\square$

5.4.2. Tétel (A lineáris reprezentálhatóságról). *A modell tetszőleges Φ egybevágósága lineáris transzformációval indukálható.*

Bizonyítás: Először vegyük észre, hogy a hiperbolikus tér egybevágóságainak csoportja generálható egy ponton áthaladó hipersíkra való tükrözések és ezen a ponton áthaladó egyenesek menti eltolásokkal. Valóban tetszőleges hiperbolikus egybevágóság előáll véges sok (legfeljebb $n+1$) hipersíkra való

tükrözés szorzataként, tetszőleges síkra vonatkozó tükrözés, pedig egy origón áthaladó síkra vonatkozó tükrözés konjugáltja egy origón áthaladó egyenes mentén végzett eltolással¹. Ez utóbbi leképezés analitikus alakja viszont egy origót fixen hagyó egybevágóság szorzata egy valamelyik koordinátatengelyt invariánsan tartó eltolással, ezért az egybevágóság csoport a koordináta tengelyek menti eltolások és az origót fixen hagyó hipersík tükrözések által generált csoport.

A továbbiakban lineáris transzformációval reprezentáljuk ezen generátor elemeket. Tekintsünk először egy

$$\begin{pmatrix} D & \mathbf{t} \\ \mathbf{u}^T & c \end{pmatrix},$$

alakú a modell egybevágóságát indukáló, reguláris mátrixot, ahol D diagonális. Igazoljuk, hogy ez, valamelyik koordináta tengely irányában végrehajtott párhuzamos áthelyezést valósít meg.

A D mátrix főátlójában levő elemek legyenek rendre $d_1, d_2, \dots, d_n$, $\mathbf{t}$ koordinátái t_i , $\mathbf{u}$ koordinátái u_i . Feltételünk szerint minden $1 \leq i \leq n$ -re teljesül

$$d_i^2 - u_i^2 = - \sum_{i=1}^n t_i^2 + c^2,$$

és minden $1 \leq i \neq j \leq n$ párra fennáll

$$-u_i u_j = 0.$$

A második egyenlőség miatt az u_i -k között legfeljebb egy nem nulla szerepel, legyen ez u_1 . Ha $2 \leq i \leq n$ teljesül, akkor az $(n+1)$ -edik oszlopvektorra vonatkozó merőlegesség alapján

$$d_i t_i = 0.$$

Azonban a teljes mátrix nem tartalmazhat zérus oszlopot, így ezen indexekre $t_i = 0$ áll fenn, ezért a következő egyenletekre jutunk:

$$d_1^2 - u_1^2 = d_2^2 = \dots = d_n^2 = -t_1^2 + c^2.$$

Feltéve, hogy ezen közös érték 1, válasszuk a koordinátatengelyek irányát úgy, hogy $d_2 = \dots = d_n = 1$ teljesüljön. Az első és az $(n+1)$ -edik oszlopok merőlegessége most a $\frac{1}{i}d_1 t_1 + i u_1 c = 0$ egyenlőséget adja, ahonnan

$$t_1^2 = \frac{u_1^2 c^2}{d_1^2}$$

¹ A hipersíkra merőleges egyenes mint alapegyenes meghatároz egy eltolást, mely az egyenesnek a hipersíkkal való metszéspontját az origóba viszi. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezen eltolással konjugálva az egyenesre merőleges az O -n áthaladó hipersíkra vonatkozó tükrözést, éppen az adott síktükrözést kapjuk.

adódik. Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$d_1^2 - u_1^2 = \frac{(d_1^2 - u_1^2)c^2}{d_1^2},$$

azaz a $d_1^2 = c^2$ egyenlőséghez jutunk. A $d_1 = c$ egyenlőség a $t_1 = u_1$ egyenlőséget implikálja, melyet összevetve a $c^2 - t_1^2 = 1$ egyenlőséggel láthatjuk, hogy valamely d valós számmal

$$d_1 = c = \cosh d \text{ és } t_1 = u_1 = \sinh d.$$

Ha feltesszük, hogy $d_1 = -c$, akkor $t_1 = -u_1$ és az $(n+1)$ -edik tengely irányát megváltoztatva szintén az

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} \cosh d & 0 & \dots & 0 & \sinh d \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \sinh d & 0 & \dots & 0 & \cosh d \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

alakot kapjuk. Igazoljuk, hogy ezen leképezés a modellgömbnek megfelelő hiperbolikus térben az x_1 tengely mentén d távolsággal való eltolást generálja. Ehhez legyen P tetszőleges modellbeli pont a $(\mathbf{p}, 1)^T$ helyvektorral. Leképezésünk a $\mathbf{p} = (\tanh r)\mathbf{e}_1 + \mathbf{p}_m$ vektort vigye $(\mathbf{p}', 1)^T$ -ba. Eredményünk a

$$\begin{pmatrix} (\cosh d)(\tanh r) + \sinh d \\ \mathbf{p}_m \\ (\sinh d)(\tanh r) + \cosh d \end{pmatrix}$$

vektor, ahonnan

$$x_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{p}'_m = \mathbf{p}' = \begin{pmatrix} \frac{(\cosh d)(\tanh r) + \sinh d}{(\sinh d)(\tanh r) + \cosh d} \\ \frac{\mathbf{p}_m}{(\sinh d)(\tanh r) + \cosh d} \end{pmatrix}.$$

Azaz a képvektor x_1 tengelyre vonatkozó merőleges vetülete

$$x_1 \mathbf{e}_1 = \tanh(r + d) \mathbf{e}_1,$$

és a $\mathbf{p}'_m$ komponens a $\mathbf{p}_m$ komponens alkalmas nyújtásával adódik. Figyelembe véve a modell illeszkedési struktúráját ebből rögtön adódik, hogy az x_1 tengely és a PP' egyenes egysíkuak. Ha igazoljuk, hogy a P és P' pontok x_1 tengelytől mért hiperbolikus távolságai megegyeznek, bizonyítottuk, hogy a lineáris leképezés által indukált transzformáció a hiperbolikus tér x_1 -tengely

irányú d távolsággal történő eltolása. Mivel a modell P, Q pontpárjának hiperbolikus távolságát a $(\mathbf{p}, 1)^T, (\mathbf{q}, 1)^T$ helyvektoraik segítségével a

$$\cosh d(P, Q) = \frac{1 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle}{\sqrt{1 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \sqrt{1 - \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle}}$$

fejezi ki a P és merőleges vetületének $(\tanh r)\mathbf{e}_1$ -nek távolsága így:

$$\frac{1 - \tanh^2 r}{\sqrt{1 - \tanh^2 r} \sqrt{1 - (\langle \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_m \rangle + \tanh^2 r)}} = \sqrt{\frac{1 - \tanh^2 r}{1 - (\langle \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_m \rangle + \tanh^2 r)}}.$$

Hasonlóképpen a P' és az ő merőleges vetületének $(\tanh(r + d))\mathbf{e}_1$ -nek a távolsága:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 - \tanh^2(r + d)}{1 - \langle \mathbf{p}', \mathbf{p}' \rangle}} &= \sqrt{\frac{1 - \tanh^2(r + d)}{1 - \left(\frac{\langle \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_m \rangle}{((\sinh d)(\tanh r) + \cosh d)^2} + \tanh^2(r + d) \right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\frac{1}{\cosh^2(r + d)}}{\frac{1}{\cosh^2(r + d)} - \frac{\cosh^2 r \langle \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_m \rangle}{\cosh^2(r + d)}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\cosh^2(r)}}{\frac{1}{\cosh^2(r)} - \langle \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_m \rangle}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 - \tanh^2 r}{1 - (\langle \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_m \rangle + \tanh^2 r)}}, \end{aligned}$$

így a két távolság valóban megegyezik.

Másodszor vegyük észre, hogy a korábbiak szerint az

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & c \end{pmatrix},$$

transzformáció, ahol A λ -ortogonális a $\lambda = c^2$ számmal, az origót fixen tartó hiperbolikus egybevágóságot indukál. Így ha A az n -dimenziós euklidészi tér hipersíkra vonatkozó tükrözését adja, a fenti mátrix a hiperbolikus tér O -t fixen tartó hipersík tükrözését indukálja. Ezzel ezen állításunkat is igazoltuk. $\square$

A fenti bizonyításban meghatároztuk az x_i tengely menti d távolságú eltolást reprezentáló lineáris leképezés mátrixát. A hiperbolikus sík egybevágóságai közül érdekes lehet a párhuzamos áthelyezés analitikus leírása is. Ezen 3-méretű mátrix a következő módon kapható meg. Az x_1 tengelyű O -n áthaladó paraciklus menti valamely ϕ párhuzamos áthelyezést definiáljuk az

x_1 tengelyre vonatkozó és a $(-1,0,1)$ ponton áthaladó az x_1 tengellyel α szöget bezáró e egyenesre vonatkozó tükrözések szorzataként. Ha az e egyenes távolsága az O ponttól a hiperbolikus síkon d , akkor fennáll a

$$\sin \alpha = \tanh d$$

összefüggés. Ebből rögtön adódik, hogy

$$\cos \alpha = \frac{1}{\cosh d} \text{ és } \tan \alpha = \sinh d$$

összefüggések is fennállnak. Húzzunk most az e egyenessel O -n keresztül a modellben párhuzamos e' egyenest. Ennek egység normálvektora a

$$(-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)^T$$

vektor, ezért az erre vonatkozó tükrözés mátrixa az

$$\begin{pmatrix} 1 - 2 \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha & 1 - 2 \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \sinh^2 d}{\cosh^2 d} & \frac{2 \tanh d}{\cosh d} & 0 \\ \frac{2 \tanh d}{\cosh d} & \frac{\sinh^2 d - 1}{\cosh^2 d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix. Mivel az e' majd az e egyenesekre vonatkozó tükrözések szorzata nem más mint a rájuk merőleges O -n áthaladó egyenes menti $2d$ távolságú eltolás, ezért az e egyenesre vonatkozó tükrözés mátrixa egyenlő az e -re vonatkozó tükrözés az e' -re vonatkozó tükrözés és ezen eltolás szorzatával. Így kapjuk, hogy a keresett mátrix nem más mint az alábbi mátrixok szorzata

$$\begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(2d) & 0 & \sinh(2d) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(2d) & 0 & \cosh(2d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \alpha & +\cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

illetve

$$\begin{pmatrix} \frac{1 - \sinh^2 d}{\cosh^2 d} & \frac{2 \tanh d}{\cosh d} & 0 \\ \frac{2 \tanh d}{\cosh d} & \frac{\sinh^2 d - 1}{\cosh^2 d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az x_1 tengelyre vonatkozó tükrözés mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ezért az x_1 majd az e egyenesekre vonatkozó tükrözések szorzatát az alábbi szorzat adja:

$$\begin{pmatrix} \cosh(2d) \tanh^2 d + \frac{1}{\cosh^2 d} & \frac{\tanh d}{\cosh d} (1 - \cosh(2d)) & -\sinh(2d) \tanh d \\ \frac{\tanh d}{\cosh d} (1 - \cosh(2d)) & \frac{\cosh(2d)}{\cosh^2 d} + \tanh^2 d & \frac{\sinh(2d)}{\cosh d} \\ -\sinh(2d) \tanh d & \frac{\sinh(2d)}{\cosh d} & \cosh(2d) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1-\sinh^2 d}{\cosh^2 d} & -\frac{2 \tanh d}{\cosh d} & 0 \\ \frac{2 \tanh d}{\cosh d} & -\frac{\sinh^2 d-1}{\cosh^2 d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A vizsgált párhuzamos áthelyezés az O pontot a megfelelő paracikluson úgy mozgatja el, hogy $2d$ hosszúságú szakasz köti össze őt a képével. Ezen paracikluson a pontok tehát $2 \sinh d$ hosszú ívvel helyeződnek át (lásd 6.5.3.). Vezessük be az $s = 2 \sinh d$ jelölést. Ekkor

$$\cosh(2d) = \cosh^2 d + \sinh^2 d = 1 + 2 \sinh^2 d = 1 + \frac{s^2}{2}, \quad \cosh d = \sqrt{1 + \frac{s^2}{4}}$$

Ezért

$$\tanh d = \frac{s}{\sqrt{4 + s^2}},$$

és a mátrix szorzat a következő alakot ölti:

$$\begin{pmatrix} \frac{s^4+2s^2+8}{2(4+s^2)} & -\frac{s^3}{4+s^2} & -\frac{s^2}{2} \\ -\frac{s^3}{4+s^2} & \frac{4+3s^2}{4+s^2} & s \\ -\frac{s^2}{2} & s & 1 + \frac{s^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4-s^2}{4+s^2} & -\frac{4s}{4+s^2} & 0 \\ \frac{4s}{4+s^2} & -\frac{-4+s^2}{4+s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-s^2+2}{2} & -s & \frac{-s^2}{2} \\ s & 1 & s \\ \frac{s^2}{2} & s & \frac{2+s^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Például $s = 2$ helyettesítéssel, ebből transzformáció mátrixnak az

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix adódik. Az általunk vizsgált egyenespár (x_1, y) olyan párhuzamos áthelyezést valósít meg, melynél az O -t a képével összekötő szakasz a rajtuk áthaladó tengelyekkel x_1 -el illetve y -al $\frac{\pi}{2} - \alpha$ szöget zárnak be. Tetszőleges párhuzamos áthelyezés tetszőleges meghatározó egyenespárjára vonatkozóan ilyen korrespondáló pontpár egyértelműen létezik. Azaz az α szög rögzítése adott párhuzamos áthelyezés esetén kijelöl egy paraciklust, amelyen a megfelelő pontpárok paracikluson mért távolsága $s = 2 \sinh d = 2 \tan \alpha$. Ezért az α szög is használható geometriai jelentéssel bíró paraméterként, ezzel felírva a párhuzamos áthelyezést az

$$\begin{pmatrix} 1 - 2 \tan^2 \alpha & -2 \tan \alpha & -2 \tan^2 \alpha \\ 2 \tan \alpha & 1 & 2 \tan \alpha \\ 2 \tan^2 \alpha & 2 \tan \alpha & 1 + 2 \tan^2 \alpha \end{pmatrix}$$

reprezentáló mátrixhoz jutunk.

Jelen szakasz utolsó eredményeként megmutatjuk, hogy a projektív tér vektorainak másik normálásával adódó L hiperboloid modell segítségével H^n differenciálgeometriai értelemben is jól kezelhető, a topológikus izometriái éppen a lineáris izometriák. (Ezen utóbbiakat pedig az előző két tételünk jellemzi.) A továbbiakban L mint H^n modellje a felső féltérbe eső hiperboloid darabot jelenti.

5.4.1. Lemma. *Legyen a hiperboloid modell egy pontjába mutató helyvektor $\mathbf{p}$. Ekkor a $\mathbf{p}$ pontbeli érintőtér – az indefinit skalárisszorzat szerint értve – éppen a $\mathbf{p}$ -re ortogonális vektorok halmaza.*

A lemma következménye, hogy az indefinit skalárisszorzat megszorítása a hiperboloid érintőtereire pozitív definit skaláris szorzatot ad. Ezért a modell tekinthető egy Riemann sokaságnak, ahol a skaláris szorzat indukálja a tér metrikáját a következő módon. Jelöljük ds^2 -el azt a függvényt, amely a modell egy pontjában felvett érintősík két vektorának a skaláris szorzatát rendeli, a pont és a két érintővektor által meghatározott hármashoz. Nyilván a függvény sima (akárhányszor differenciálható) és származtatható belőle tetszőleges a modellhez tartozó $\gamma : [a, b] \rightarrow L$ görbe ívhossza az

$$s(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle_{\gamma(t)}} dt$$

formulával. A Riemann távolsága az $x = \gamma(a)$ illetve $y = \gamma(b)$ pontoknak:

$$d(x, y) := \inf \{s(\gamma) \text{ olyan } \gamma \text{ függvényekre, melyekre } \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}.$$

Topológikus (metrikus) izometriáról beszélünk egy olyan $L \rightarrow L$ homeomorfizmus esetén, ami a pontpárok Riemann távolságát őrzi. Legyen F egy lineáris izometria (azaz F lineáris leképezés és a beágyazó tér skaláris szorzatát őrzi, valamint L -et L -be viszi), melynek a megszorítása L -re f . Ha $x, y \in L$ két pont, akkor az x -ből y -ba haladó görbe ívhosszát össze tudjuk hasonlítani az $f(x)$ -ből induló $f(y)$ -ba érkező megfelelő görbe ívhosszával. Valóban az

$$\langle Df(\dot{\gamma}), Df(\dot{\gamma}) \rangle_\gamma = \langle DF(\dot{\gamma}), DF(\dot{\gamma}) \rangle_\gamma = \langle F(\dot{\gamma}), F(\dot{\gamma}) \rangle_\gamma = \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_\gamma$$

egyenlőségek mutatják, hogy lineáris izometria a görbék ívhosszát őrzi. Így őrzi a pontok Riemann távolságát is. A következőkben az L -beli x pontot a beágyazó térbeli helyvektorával $\mathbf{x}$ -el azonosítjuk.

5.4.2. Lemma. *Az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ pontok Riemann távolsága kifejezhető az indefinit skalárisszorzattal, pontosabban:*

$$\cosh(d(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Bizonyítás: A fenti formulában az infimumot szolgáltató geodetikus görbék a Cayley-Klein modellben is geodetikusok, hiszen ugyanazon formula alapján ugyanazon skaláris szorzatra nézve végezzük az integrálást. Ezért a projektív alapformula megfelelő normálásával adódik a két pont távolságára vonatkozó képlet. $\square$

Tegyük fel, hogy f topológikus izometria L -en. Az $\mathbf{x}_i \in L$ $i = 1, \dots, n+1$ pontok legyenek lineárisan függetlenek, így definiálhatunk egy F lineáris leképezést a $F(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i)$ egyenlőségekkel. Ha a standard $\mathbf{e}_i$ bázis elemei az

$$\mathbf{e}_i = \sum_{l=1}^{n+1} a_{il} \mathbf{x}_l$$

egyenlőségekkel adottak, akkor

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{e}_i), F(\mathbf{e}_j) \rangle &= \sum_{l,k=1}^{n+1} a_{il} a_{jk} \langle f(\mathbf{x}_l), f(\mathbf{x}_k) \rangle = \\ &= -\cosh(d(f(\mathbf{x}_i), f(\mathbf{x}_j))) \sum_{l,k=1}^{n+1} a_{il} a_{jk} = -\cosh(d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)) \sum_{l,k=1}^{n+1} a_{il} a_{jk} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \end{aligned}$$

mutatja, hogy F -re invariáns az indefinit skalárszorzat. Igazolnunk kell még hogy megszorítása L -re éppen f . Feltehető, hogy $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i$ minden i -re (különben tekinthetnénk az $F^{-1} \circ f$ leképezést), bizonyítanunk kell, hogy F az L -en ekkor az identitás. Ehhez tekintsük:

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{x}), F(\mathbf{e}_j) \rangle &= \sum_{l=1}^{n+1} a_{il} \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_l) \rangle = -\cosh(d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_i))) \sum_{l=1}^{n+1} a_{il} = \\ &= -\cosh(d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)) \sum_{l=1}^{n+1} a_{il} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \end{aligned}$$

egyenlőséget. Mivel ez minden i -re fennáll $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, de az $\mathbf{x}$ választása L -n tetszőleges volt, ezért valóban F az L -en az identitás. Kaptuk tehát, hogy tetszőleges Riemann izometria egy lineáris izometria megszorítása L -re. Azaz kaptuk, hogy

5.4.3. Tétel. *A pszeudo-euklideszi térbe beágyazott hiperbolikus tér hiperboloid modelljére vonatkozó topológikus és lineáris izometria fogalmak megegyeznek. Minden lineáris izometria invariánsan hagyja a Riemann metrikát és minden topológikus izometria kiterjed a beágyazó tér lineáris izometriájává.*

5.5. Az n -dimenziós szférikus tér

*... a logika sok szabálya helyett beértem a négy következővel...
A harmadik az, hogy bizonyos rendet kövessék gondolkodásomban, mégpedig olyképp, hogy a legegyszerűbb és a legkönnyebben megismerhető tárgyakkal kell kezdenem, hogy aztán lassan, fokozatosan emelkedjem fel az összetettebbek ismeretéhez; S még azok között is fel kell tételezzek bizonyos rendet, amelyek nem magától érthetően következnek egymás után.*

R. Descartes: Értekezés az ész helyes vezetésének módszeréről

Az n -dimenziós szférikus tér az $(n + 1)$ -dimenziós euklidészi tér egységvektorainak végpontjai által modellezhető tér, ahol a pontok távolságát a tér skaláris szorzatából definiálhatjuk a

$$\cos d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

formula segítségével. Az illeszkedési struktúrát a beágyazó tér altérrendszere származtatja ennek gömbfelszínre való megszorítása által. Az egydimenziós alterek két átellenes pontot jelölnek ki, a kétdimenziósak egy főkört, általában egy k -dimenziós altér egy $k - 1$ -dimenziós un. szférát jelöl ki. A kapott szférákra az abszolút terek illeszkedési axiómái közül már az első sem teljesül ha tetszőleges két pontot különbözőnek tekintünk, (két átellenes pont sok főkört határoz meg) de értelmezhetők a geometriai vizsgálatok alapfogalmai és objektumai, (geodetikus, szög, sokszögek, poliéderek, konvexitás,) és minden konkrét euklidészi vagy hiperbolikus formula és tétel valamilyen szinten adaptálható a szférikus térben. Ha nem ragaszkodunk az abszolút terekéhez hasonló konzekvens axiomatikus felépítéshez, a szférikus geometria nem egyéb, mint a gömbfelszínre vonatkozó geometriai állítások és összefüggések egy speciális együttese. Ha vizsgálatainkat az abszolút tereknél látott axiomatikus rendszerben szeretnénk folytatni, szükséges az átellenes pontpárok azonosításával egy újabb struktúrát létrehozni, amelyet elliptikus geometriának nevezhetünk. A kapott modell mellett az elliptikus terek tipikus képviselői a projektív terek, ezeknek egy külön fejezetet szentelünk. Itt valóban csak a szférikus térrel foglalkozunk egybevetve a kapott formulákat az euklidészi és hiperbolikus formulákkal is.

5.5.1. Elemi formulák

Először elemi összefüggéseket fogunk össze hasonlítani. Az táblázataink a háromszögek oldalai és szögei közti összefüggéseket tárgyalja. A szférikus formulákban a teret modellező gömb sugarát, míg a hiperbolikusokban a tér k

paraméterét választottuk egységnyiinek. A háromszög oldalai a, b, c szemben levő szögei rendre α, β, γ , a -hoz tartozó magassága m , amely a -t az előjeles a_1, a_2 szakaszokra bontja. Legyen továbbá s a háromszög félkerülete. A szinusz, koszinusz tételek alakjait, továbbá a háromszög területének szögekkel és oldalakkal kifejezett formuláit hasonlíthatjuk össze. A hiperbolikus és szférikus formulákban a trigonometrikus illetve hiperbolikus függvények hatványsor előállításában a hossz jellegű paraméterekkel nullához tartva ugyanazon határformulákat kapjuk ezek éppen az euklidészi geometria formulái. Jelen paragrafusban a szférikus formulákat bizonyítjuk. A hiperbolikus formulák ezekből formálisan megkaphatók a hossz jellegű paraméterek tisztán képzetes helyettesítésével, ha felhasználjuk a következő azonosságokat:

$$i \sinh a = \sin(ia), \quad \cosh a = \cos(ia), \quad i \tanh a = \tan(ia).$$

Az 1.7 pontban igazoltuk a Bolyai féle abszolút szinusz tételt, ami magában foglalja a szférikus esetet is. Láttuk azt is, hogy a szférikus trigonometria a beágyazó tértől független az euklidészi és hiperbolikus térbeli formulák megegyeznek. Most az oldalakra vonatkozó koszinusz tétel egy vektorokkal történő bizonyítását adjuk.

5.5.1. Tétel (Gömbi koszinusz tétel).

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

Bizonyítás: A háromszög csúcspontjaiba mutassanak rendre az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ helyvektorok. A $\mathbf{c}$ vektorra merőleges sík metszete az a illetve b oldalat meghatározó síkkal adja az $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ vektorokat. Ekkor

$$\mathbf{a} = (\cos b)\mathbf{c} + (\sin b)\mathbf{a}' \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = (\cos a)\mathbf{c} + (\sin a)\mathbf{b}',$$

ezért

$$\cos c = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \cos a \cos b + \sin a \sin b \langle \mathbf{a}', \mathbf{b}' \rangle = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma,$$

ahogy állítottuk. $\square$

A szögekre vonatkozó koszinusz tétel azonnal adódik ebből, ha a gömbháromszög polárháromszögre felírjuk az oldalakra vonatkozót. A polárháromszög csúcsait a gömbből az eredeti háromszög oldalait kimetsző síkok normálvektorai adják. Ezen háromszög oldalainak mértéke az eredeti háromszög szögeinek mértékével egyezik meg és fordítva. Következő említésre méltó állítás a háromszög területének meghatározása szögei függvényében. A terület fogalmát a modellgömb felszínének segítségével értelmezzük, a sík egy halmazának akkor van területe, ha a megfelelő gömbfelületrésznek van felšíne, a terület mértéke ilyenkor ezen érték. A sík háromszögtartományai a

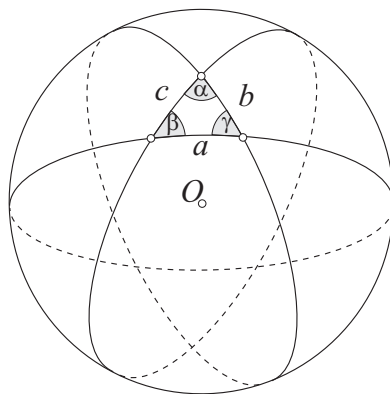
modellgömb π -nél kisebb oldalú gömbháromszögeiként tekinthetők, azzal a megjegyzéssel, hogy egy rögzített háromszög esetén a modellgömb forgatható úgy, hogy oldalai euklideszi értelemben összefüggőek legyenek. Felhasználjuk még a gömbkétszög fogalmát, amely két gömbi főkör által meghatározott π -nél kisebb szögű gömbi tartomány. A gömbkétszög a gömbön elfoglalt helyzetétől eltekintve a főkörök síkjai által meghatározott, felszíne egyszerű integrálással adódóan $2\alpha r^2$, ahol α a gömbkétszög szöge.

5.5.2. Tétel. *Az α , β , γ szögekkel rendelkező háromszög szférikus területe*

$$T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$$

ahol r a modellgömb sugara.

Bizonyítás: Tekintsük a 5.4. ábrán jelölt ABC háromszöget. Ennek szö-



5.4. ábra. A háromszög területe a szférikus modellben

gei rendre α , β , γ . Az α szögű szögtartomány meghatároz két gömbkétszöget, melyek egyenként tartalmazzák az ABC és az átellenes, vele egybevágó gömbháromszöget. Hasonlóan van két β és két γ szögű szögtartomány, melyek szintén tartalmazzák a két gömbháromszöget. A hat gömbkétszög együttesen lefedi a gömböt oly módon, hogy a gömbháromszögeket három-három fedi. Így a következő formulához jutunk:

$$2(2\alpha + 2\beta + 2\gamma)r^2 = 4\pi r^2 + 4T$$

ahonnan rögtön adódik, hogy

$$T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2. \quad \square$$

Most rátérünk az oldalak hossza alapján számolható képletek igazolására. A továbbiakban a gömbök sugara 1.

5.5.3. Tétel. *Ha egy T területű gömbháromszög a hosszú oldalát a hozzá tartozó m magasság az (előjeles) a_1 , a_2 hosszú ívekre bontja, akkor fennáll*

$$\tan \frac{T}{2} = \tan \frac{m}{2} \left(\tan \frac{a_1}{2} + \tan \frac{a_2}{2} \right)$$

összefüggés.

Bizonyítás: Tekintsünk egy a, b befogókkal rendelkező derékszögű háromszöget. Ennek területe előző tételünk szerint:

$$T = (\alpha + \beta) - \frac{\pi}{2}.$$

Azaz

$$\tan \frac{T}{2} = \tan \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\alpha + \beta}{2} - 1}{\tan \frac{\alpha + \beta}{2} + 1}.$$

Számoljuk először ki a

$$\left(\tan \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

értéket. A koszinusz tétel szerint

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha = \cos^2 b \cos a + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

ahonnan felhasználva a $\cos c = \cos a \cos b$ gömbi Pitagorasz tételt, kapjuk, hogy

$$\cos \alpha = \frac{\cos a \sin b}{\sin c}.$$

Ezért

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin c + \cos a \sin b}{2 \sin c}},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin c - \cos a \sin b}{2 \sin c}},$$

és így

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} &= \frac{1}{2 \sin c} \left(\sqrt{(\sin c - \cos a \sin b)(\sin c + \cos b \sin a)} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(\sin c + \cos a \sin b)(\sin c - \cos b \sin a)} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin c} \left(\sqrt{(\sin^2 c + \sin c \sin(a - b) - \sin a \sin b \cos a \cos b)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(\sin^2 c - \sin c \sin(a-b) - \sin a \sin b \cos a \cos b)} = \\
&= \frac{1}{2 \sin c} \left(\sqrt{(1 - \cos a \cos b \cos(a-b) + \sin c \sin(a-b))} + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{(1 - \cos a \cos b \cos(a-b) - \sin c \sin(a-b))} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \sin c} \left(\sqrt{(1 - \cos c \cos(a-b) + \sin c \sin(a-b))} + \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{(1 - \cos c \cos(a-b) - \sin c \sin(a-b))} \right) = \\
&= \frac{1}{2 \sin c} \left(\sqrt{(1 - \cos(a-b+c))} + \sqrt{(1 - \cos(c-a+b))} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2 \sin c} \left(\sin \left(\frac{a-b+c}{2} \right) + \sin \left(\frac{c-a+b}{2} \right) \right) = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sin c} \sin \frac{c}{2} \cos \frac{a-b}{2} = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{c}{2}}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{a+b}{2}}{2 \cos \frac{c}{2}},$$

ezért

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}},$$

ahonnan

$$\tan \frac{T}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2}} = \frac{-2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{-b}{2}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{-b}{2}} = \tan \frac{a}{2} \tan \frac{b}{2}.$$

Azaz a tétel állítása derékszögű háromszögre teljesül. Az m magasság segítségével háromszögünket két derékszögű háromszögből állíthatjuk elő, így valóban fennáll a

$$\tan \frac{T}{2} = \tan \frac{m}{2} \left(\tan \frac{a_1}{2} + \tan \frac{a_2}{2} \right)$$

formula. □

5.5.4. Tétel (Heron formulája a gömbön). *Ha a, b, c, s, T egy gömbháromszög oldalai, félkerülete és területe, akkor*

$$T = 4 \arctan \sqrt{\tan \frac{s}{2} \tan \frac{s-a}{2} \tan \frac{s-b}{2} \tan \frac{s-c}{2}}.$$

Bizonyítás: Az előző tételünkben derékszögű háromszög esetére igazoltuk a

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{c}{2}}$$

egyenlőséget. Ez $\gamma = \frac{\pi}{2}$ miatt a

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

alakban is felírható. Igazoljuk, hogy ez a formula tetszőleges gömbháromszögre teljesül. (Ha pld. a háromszög egyenlőszárú ($a = b$), akkor a kívánt egyenlőség a

$$\sin \alpha = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

alakot ölti, melyet a $\frac{\gamma}{2}$ szögre felírt koszinusz tételből azonnal megkapunk.) Az előző bizonyításban a derékszögű háromszögre vonatkozó számolásaink könnyen levezethetők általános háromszögre is, ha nem használjuk a Pitagorász tétel gömbi alakját, mint egyszerűsítő formulát. Valóban

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

azaz

$$1 + \cos \alpha = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c} = 2 \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}.$$

Tehát

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}},$$

és hasonlóképpen

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c) \sin(s-b)}{\sin b \sin c}},$$

azaz

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} &= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin b \sin c}} \left(\frac{\sin(s-b)}{\sin c} + \frac{\sin(s-a)}{\sin c} \right) = \\ &= \frac{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}. \end{aligned}$$

Ebből

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2})}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

és így a

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}) \pm \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2} \pm \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

összefüggés alapján a

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}) - \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}) + \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{c}{2}}$$

egyenlőséghez jutunk. Használva a két szög koszinuszának összegére illetve különbségére vonatkozó formulákat, ebből a

$$\tan \frac{\pi - \alpha - \beta + \gamma}{4} \tan \frac{\pi - \alpha - \beta - \gamma}{4} = \tan \frac{a - b + c}{4} \tan \frac{a - b - c}{4}$$

összefüggést kapjuk. A

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

analóg összefüggés hasonlóképpen a

$$\tan \frac{\pi + \alpha + \beta - \gamma}{4} \tan \frac{-\pi + \alpha + \beta + \gamma}{4} = \tan \frac{a + b + c}{4} \tan \frac{a + b - c}{4}$$

egyenlethez vezet. A második egyenlet szorzata az első -1 szeresével a

$$\tan^2 \frac{T}{4} = \tan^2 \frac{-\pi + \alpha + \beta + \gamma}{4} = \tan \frac{s}{2} \tan \frac{s-a}{2} \tan \frac{s-b}{2} \tan \frac{s-c}{2}$$

képletet adja, ami a Heron formula négyzete.

□

$\sin \alpha : \sinh \frac{a}{k} = \sin \beta : \sinh \frac{b}{k}$
$\cosh \frac{c}{k} = \cosh \frac{a}{k} \cosh \frac{b}{k} - \sinh \frac{a}{k} \sinh \frac{b}{k} \cos \gamma$
$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh \frac{c}{k}$
$\frac{T}{k^2} = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$
$\frac{T}{k^2} = 4 \arctan \sqrt{\tanh \frac{s}{2k} \tanh \frac{s-a}{2k} \tanh \frac{s-b}{2k} \tanh \frac{s-c}{2k}}$
$\frac{T}{k^2} = 2 \arctan((\tanh \frac{a_1}{2k} + \tanh \frac{a_1}{2k}) \tanh \frac{m}{2k})$

$$H^2(k) \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} H^2(k) &\longrightarrow E^2 \\ k &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

$\sin \alpha : a = \sin \beta : b$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
$\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$
$0 = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$
$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$T = \frac{am}{2}$

$$\begin{aligned} E^2 &\longleftarrow S^2(r) \\ \infty &\leftarrow r \end{aligned}$$

$$S^2(r) \quad r \in \mathbb{R}$$

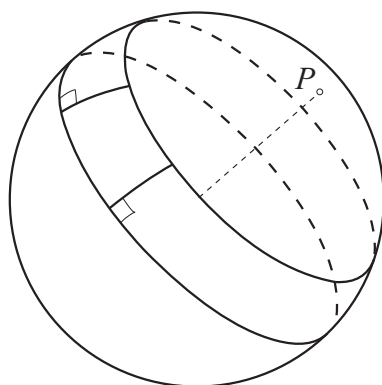
$\sin \alpha : \sin \frac{a}{r} = \sin \beta : \sin \frac{b}{r}$
$\cos \frac{c}{r} = \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} + \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos \gamma$
$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \frac{c}{r}$
$\frac{T}{r^2} = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$
$\frac{T}{r^2} = 4 \arctan \sqrt{\tan \frac{s}{2r} \tan \frac{s-a}{2r} \tan \frac{s-b}{2r} \tan \frac{s-c}{2r}}$
$\frac{T}{r^2} = 2 \arctan((\tan \frac{a_1}{2r} + \tan \frac{a_1}{2r}) \tan \frac{m}{2r})$

5.5.2. Nevezetes vonalak

Célunk nevezetes vonalak és fontos mértani hely feladatok megoldása a szférikus esetben is. Mivel a gömbfelszínen a szögeket a szárakat kimetsző O -n áthaladó síkok hajlásszöge méri, az A, B, C csúcsokkal rendelkező gömbháromszög és euklidészi háromszög bizonyos nevezetes vonalai egymás centrális vetületei az O pontból. Így a megszokott nevezetes vonalak közül: a magasságvonalak, oldalelező merőlegesek és súlyvonalak léteznek, egy pontban metszik egymást, ezzel definiálván a magasságpontot, a "köré írható kör" középpontját és a súlypontot. Ennek belátásához elég meggondolni, hogy egy húr felezőpontját a középponttal összekötő egyenes a húrhoz tartozó ív felezőpontján is áthalad, és két sík pontosan akkor merőleges egymásra, ha az egyik tartalmaz a másikkra merőleges egyenest. Felmerül a kérdés, hogy mit nevezünk "körnek" a gömbfelszínen és síkbeli háromszög nevezetes körei milyen kapcsolatba hozhatók ezen alakzatokkal.

A kör természetes definíciója megegyezik az abszolút geometriákban megszokott definícióval: adott ponttól adott távolságra levő pontok mértani helye. Így a gömbfelszín körei a szokott értelemben vett euklideszi körök. A definíció nem zárja ki a főköröket azaz a gömbfelszín egyeneseit sem, ha a félreértést el akarjuk kerülni, szigorú értelemben körnek a főköröktől különböző köröket érthetjük.

Adott egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok mértani – a távolságvonal – szintén kör, ennek középpontja az egyenest kimetsző síkra merőleges sugárhoz tartozó pont.



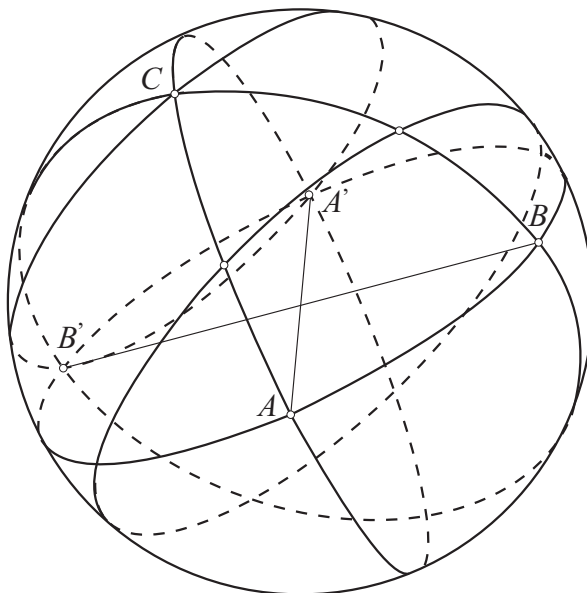
5.5. ábra. Kör és távolságvonal a gömbfelszínen

Két háromszög (a síkbeli illetve gömbi) köré írható kör ugyanaz a kör, a pontok síkjának metszete a gömbfelszínnel. A két háromszög szögfelezői között nincs hasonló egyszerű kapcsolat, mivel az (ABC) sík általában nem merőleges az OA sugárra, ezért a $CAB_{\angle}$ szöget nem felezi a megfelelő síkok

szögfelező síkja. Azonban ezen szögfelező síkok egy O -n áthaladó egyenesben metszik egymást, mely kimetsz a gömbfelszínből egy a gömbháromszög oldalaitól egyenlő távolságra levő pontot, a "bele írható kör" középpontját. Tekintsük ugyanis két szögfelező sík metszésvonalát m -et. Ez létezik, mert a két síknak van egy közös pontja O . Az m egyenes tetszőleges pontja a három triéder síktól egyenlő távolságra van, ezért a harmadik szögfelező síkhoz is hozzátartozik. Ez azt jelenti, hogy a három szögfelező sík m -ben metszi egymást. Az m egyenesnek a gömbfelszínnel alkotott metszéspontjából az egyik triéder síkra bocsátott merőleges m -el együtt ezen triéder síkra merőleges O -n keresztülhaladó síkot határoz meg, mely a gömbfelszínből kimetszi a megfelelő gömbi oldalra bocsátott merőleges gömbi egyenest.

A következőkben r, R jelöli a beírt illetve körülírt körök gömbi sugarát, A', B', C' a beírt kör középpontjából a BC, AC, AB oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjait, d pedig a két középpont távolságát. Az euklidészi háromszögekre vonatkozó területképletből azonnal következik, hogy adott alapú, adott területű háromszögek harmadik csúcspontjainak mértani helye az alappal párhuzamos egyenespár. Ezen mértani hely feladat megoldása hiperbolikus és szférikus geometriában is lehetséges az analóg formulák alapján.

5.5.5. Tétel (Lexell kör). *A szférikus geometriában az adott alapú, azonos területű háromszögek harmadik csúcspontjainak mértani helye egy körpár, melyet Lexell körnek nevezünk.*



5.6. ábra. A Lexell kör

Bizonyítás: Legyen háromszögünk az ABC_Δ és rögzítsük ennek AB alapját. Az AC , BC oldalak felezőpontjai legyenek F_B illetve F_A . Ezek összekötő egyenese a háromszög C -hez tartozó középvonala. A középvonalat kimetsző sík a csúcspontokhoz tartozó euklideszi háromszög síkjából annak középvonalát metszi ki, így az (ABO) sík és az (F_AF_BO) sík egymást egy AB -vel párhuzamos gömbátmérőben metszi. Következésképpen valamennyi AB alappal rendelkező háromszög középvonalát kimetsző sík az AB -vel párhuzamos gömbátmérőn átmegy. Bocsássunk merőlegest az A, B, C pontokból az F_AF_B egyenesre. Legyenek ezek rendre A_1, B_1, C_1 . A gömbi szinusztétel szerint az AA_1, BB_1, CC_1 gömbi szakaszok egyenlő hosszúak és hasonlóképpen az $A_1F_B = C_1F_B, B_1F_A = C_1F_A$ egyenlőségek is fennállnak, ezért az $AA_1F_B\Delta$ területe megegyezik az $C_1F_BC_\Delta$ területével, továbbá a $BB_1F_A\Delta$ területe a $C_1F_BC_\Delta$ területével. Ezért a kiindulási háromszög területe megegyezik az AA_1B_1B két derékszögű négyszög területével. Ebből rögtön következik, hogy egyenlő területű két háromszög, ha közös a középvonaluk, azaz ha a C csúcsuk a középvonal síkjával párhuzamos sík által kimetszett gömbi kör két pontja. Fordítva, ha (azonos AB egyenest kimetsző félgömbhöz tartozó) két AB alapú háromszög különböző C -hez tartozó középvonallal bír, akkor ezek nem lehetnek egyenlő területűek, mert az előző állítás alapján nyilván találunk az egyikkel megegyező területű a másik belsejébe eső háromszöget. A teljes gömbön a mértani hely tehát két gömbi kör, melyek az A, B pontok átellenes pontjaiban metszik egymást és az AB egyenest kimetsző síkra vonatkozóan egymás tükörképei. $\square$

Jegyezzük meg, hogy ez a bizonyítás a hiperbolikus sík esetén is működik és végeredményül két az AB egyenesre szimmetrikusan elhelyezkedő hiperciklust kapunk, melyek alapvonalai a háromszögek közös középvonalai.

A háromszög köré írható kör megoldása egy másik mértani hely feladatnak. Legyen A, B, C egy gömbháromszög három csúcspontja O a köré írható kör középpontja. Ekkor az OA, OB, OC sugarak a megfelelő oldalakkal egyenlő szögeket zárnak be, így nem nehéz (a különböző esetekre vonatkozó különböző, de) egyszerű számolásokkal igazolni, hogy pld.:

$$OAB_\Delta = \frac{1}{2}(\alpha - OCA_\Delta + \beta - OCB_\Delta) = \alpha + \beta - \gamma.$$

Ezért az O középpont (és így a köré írható kör is) közös az AB alapú azon háromszögek esetében, melyekre az $\alpha + \beta - \gamma$ érték állandó. Azaz a Lexell kör mellett a köré írható kör is megadható szögösszegre vonatkozó mértani hely feladat megoldásaként; az $ABC, A'B'C$ pontokon áthaladó körök rendre, az $\alpha + \beta - \gamma = \text{konst}$ illetve az $\alpha + \beta + \gamma = \text{konst}$ egyenleteket kielégítő AB alapú háromszögek C csúcsainak mértani helyei.

A látószög kör általában nem kör. Ezt könnyen ellenőrizhetjük például a $\frac{\pi}{2} = \gamma = c$ esetben.

Az euklidészi geometriában adott pontból mint centrumból kicsinyítve egyenest vagy kört, egy az eredetivel párhuzamos a ponttól fele távolságra levő egyenest illetve egy fele akkora a ponttól szintén fele távolságra eső kört kapunk. Szférikus vagy hiperbolikus geometriában nincs középpontos kicsinyítés a fenti transzformáció azonban elvégezhető. Szférikus geometriában adott (kis vagy fő) kör adott pontból való felére zsugorítását úgy definiálhatjuk, hogy a pontot a kör pontjaival összekötő szakaszok felezőpontjainak mértani helyét tekintjük. Egy konkrét felezőpontot a gömb sugara mentén a két pontot összekötő euklidészi szakasz felezőpontjába vetíthetjük, így a keresett mértani hely ezen centrális vetítéssel a pont és a kör által meghatározott térbeli euklidészi (ferde) körkúp alkotóinak felezőpontjaiba vetül. A kapott alakzat a kör síkjának a pontból felére zsugorított példányának és a körkúpnak síkmetszete azaz maga is kör. Ezen kör síkja nem tartalmazza általában a gömb középpontját ezért centrális vetülete a gömbfelszínre egy negyedrendű görbe. Kivételes eset, amikor a pont sugarára merőleges sík metszi ki a főkört, ekkora felezőpontok mértani helye egy távolságvonallal is egyben, azaz kiskör.

5.5.3. Egybevágóságok

A szférikus geometriában mindig használunk beágyazó abszolút teret. Bolyai alapvető észrevétele alapján teljesen mindegy, hogy a beágyazó tér euklidészi vagy hiperbolikus a trigonometrikus formulák megegyeznek, természetesen az adott geometria szögmértékére épülve. Analitikus tárgyalásnál célravezetőbb az euklidészi szög és távolság érték alapján definiálni a szférikus geometria mértékeit. Világos, hogy tetszőleges a beágyazó tér origóját invariánsan tartó egybevágóság a gömbfelszín izometriáját is származtatja. Ugyanakkor, ha tekintünk egy kölcsönösen egyértelmű távolságtartó leképezést a gömbfelszínen akkor ez kiterjeszthető a beágyazó tér egységvektorainak is egy kölcsönösen egyértelmű leképezésévé, ha deklaráljuk, hogy az origó képe az origó. A kapott leképezés az egységvektorok halmazának kölcsönösen egyértelmű a természetes skalárszorzatot őrző leképezése, mivel a gömbfelszínen egybevágóság volt. A szokásos $f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$ kiterjesztéssel ez az euklidészi tér origót fixen tartó, skalárszorzat tartó leképezésévé terjed ki, azaz lineáris izometria. Azaz kapjuk:

5.5.6. Tétel. *A gömbfelszín távolságtartó leképezései éppen a beágyazó euklidészi vektortér lineáris izometriái.*



5.7. ábra. René Descartes

5.6. Descartes

Descartes korában a filozófia és a matematika szorosan összekapcsolódott nem utolsó sorban azért, mert a két tudomány művelői ugyanazon személyek voltak. Descartes alapvető geometriai munkája, melyben felvázolja és használja a geometriai vizsgálatokhoz az analitikus geometria módszerét, egy nagyobb szabású filozófiai munkájának, a "Discours de la Méthode" c. munkájának függelékeként jelent meg. Hatása a geometriára és a matematika fejlődésére ugyanolyan mértékű volt, mint később Bolyai János szintén függelékként megjelenő Appendix c. munkájáé. Ebből a függelékből idézzük most az első könyvet. A bonyolultabb számításokat és alkalmazásokat a további két könyv tartalmazza a Descartes által képviselt szellem azonban tökéletesen érezhető ezen bevezető részben is. Descartes érezte, hogy módszere fontosabb mint a konkrétan leírt tények, a harmadik könyv és így a teljes függelék záró mondata ez:

Remélem az utókor kedvezően fog megítélni engem, nem csak azon dolgok alapján, amit kifejtettem, hanem azokat is figyelembe véve, amiket szándékosan elhagytam, megadva másoknak is a felfedezés örömét.

R. DESCARTES: GEOMETRIA

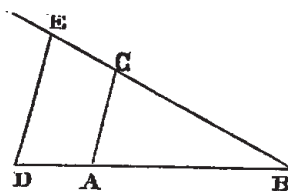
ELSŐ KÖNYV

AZOKRÓL A SZERKESZTÉSI ELJÁRÁSOKRÓL,
MELYEK CSAK KÖRZÖT ÉS VONALZÓT IGÉNYELNEK.

A geometria minden problémája könnyen redukálható olyan részekre, amelyek konstrukciójához csak egyenes szakaszok hosszának ismerete szükséges. Éppen úgy, ahogy az aritmetika négy vagy öt műveletet tartalmaz, nevezetesen az összeadást, kivonást, szorzást, osztást és a gyökvonást, ami valamiféle osztásnak tekinthető, a geometriában egy szakasz megtalálása más szakaszok összegének vagy különbségének megtalálását igényli; vagy egy tetszőlegesen adott egységnek nevezett szakaszhoz tartozó szorzás elvégzését, ami olyan negyedik szakasz szerkesztését jelenti, mely két adott szakasz közül az egyikhez úgy aránylik, mint a másik az egységhez; vagy osztását, amely olyan negyedik szakasz szerkesztését jelenti, mely úgy aránylik a kettő közül az egyikhez, mint az egység a másikhoz; vagy, végül egy, két vagy számos középárányos szerkesztését az egység és egy másik szakasz viszonylatában, ami nem egyéb, mint meghatározni a négyzetgyökét, köbgyökét, stb ... az adott szakasznak. A világosabb felépítés kedvéért nem habozok bevezetni az aritmetikai kifejezéseket a geometriába.

Például, legyen AB egységnek tekintve, és szorozzuk össze BD -t BC -vel. Ekkor összekötöm A -t és C -t és DE párhuzamost húzok AC -vel. A BE a keresett szorzat.

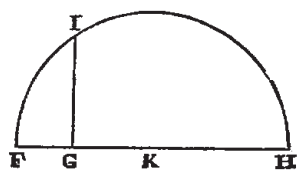
Ha BE -t BD -vel szeretném osztani, összekötöm E -t és D -t és AC húzom DE -vel párhuzamosan; ekkor BC az eredmény.



5.8. ábra. A szorzás

Ha a GH gyökét szeretném meghatározni, ugyanarra az egyenesre felmérem a GF egységszakaszt; majd megrajzolva az FH K felezőpontja köré írt F és H pontokon áthaladó kört a G -ben FH -ra állított merőleges I -ben metszi azt. Ekkor GI a keresett gyök. Nem beszélünk most köbgyökről, vagy egyéb gyökökről, mert ezekre a későbbiekben még alaposabban visszatérünk.

Gyakran nem szükséges lerajzolni a szakaszokat papírra, elegendő őket egy betűvel jelölni. Eképpen, a BD illetve GH szakaszok összege helyett az a illetve



5.9. ábra. A négyzetgyök szerkesztése

b szakaszok összegéről beszélünk és $a + b$ -vel jelölöm ezt. Ekkor $a - b$ jelenti, hogy a -ból kivonom b -t; ab , hogy a -t megszorozom b -vel; a/b , hogy a -t elosztom b -vel; aa vagy a^2 , hogy a -t szorzom a -val, a^3 ha az eredményt megszorozom a -val; és így tovább. Ha meg szeretném határozni az $a^2 + b^2$ négyzetgyökét, $\sqrt{a^2 + b^2}$ kifejezést írom; ha a $a^3 - b^3 + ab^2$ kifejezés köbgyökére vagyok kíváncsi $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$ formulát írom, hasonlóképpen a magasabb gyökökhöz. Észre kell vennünk, hogy itt a^2 , b^2 , és a hasonló kifejezések egyszerű szakaszok, amelyeket azonban az algebra terminusának megfelelően négyzetnek, köbnek, stb., nevezek. Szintén meg kell említenem, hogy egy egyenes tetszőleges részét ugyanolyan dimenzióként kell kifejeznem, a szükséges egységek száma nem determinált a probléma feltételeivel. Eképpen, a^3 ugyanannyi dimenziós mint ab^2 vagy b^3 , ezek összetevői annak a szakasznak, melyet $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + ab^2}$ -el jelölök. Ez azonban nem ugyanaz a dolog, mint, amikor az egység meghatározott, mert az egység mindig tanulmányozható, akár túl sok, akár túl kevés a dimenzió; azaz ha ki akarjuk fejteni a köbgyökét az $a^2b^2 - b$ mennyiségnek, úgy kell tekintenünk az a^2b^2 mennyiséget mintha egységgel osztanánk, és a b -t mintha kétszer szoroznánk az egységgel.

Végül, hogy vissza tudjunk emlékezni a szakaszok neveire, egy különálló listát kell létrehozunk olyan gyakorisággal, ahogy ezeket hozzárendeljük vagy megváltatjuk. Például, azt írjuk, hogy $AB = 1$ ha AB egyenlő 1-el; $GH = a$, $BD = b$, és így tovább.

Ha meg szeretnénk oldani valamilyen problémát, először is feltesszük, hogy a megoldást megtaláltuk, és elnevezünk minden szakaszt, amely szükséges a szerkesztéshez, – mindazokat, amelyek ismeretlenek és azokat is, amelyek ismertek. Azután, nem téve különbséget az ismertek és a nem ismertek között, ki kell fejtenünk a nehézséget bármely úton, mely a legtermészetesebben relációt adja ezen szakaszok között, amíg ha ez lehetséges, egy mennyiséget két úton meg nem kapunk. Ez egy egyenlethez vezet, amivel együtt tekintve az egyik tagjait, ugyanazt kapjuk, mintha a másikat tekintenénk vele együtt.

Annyi egyenletet kell találnunk, amennyi az ismeretlen szakaszok száma; de ha, a mindenre kiterjedő vizsgálat után is csak kevesebb található, akkor világos, hogy a kérdés nem volt meghatározott. Ebben az esetben minden ismeretlen szakasz helyett, amelyhez nincs egyenlet, tetszőleges szakaszt választhatunk.

Ha van néhány egyenletünk, használhatjuk őket akár egyedül tekintve őket, akár néhány másikhoz viszonyítva, minden ismeretlen szakasznak értéket adva; és úgy kombinálva őket míg csak egy ismeretlen szakasz marad, amely vagy ismeretlennel van kifejezve, vagy négyzete, köbe, negyedik hatványa, ötödik hatványa, hatodik hatványa, stb... egyenlő az összegével vagy különbségével két vagy több mennyiségnek, egy ismertnek és a többi középárányosa az egységnek és ennek a négyzetnek, köbnek, vagy negyedik hatványnak, stb... szorozva ismert szakaszokkal. Ezt a következőképpen fejezhetem ki:

$$\begin{aligned} z &= b, \\ \text{vagy } z^2 &= -az + b^2, \\ \text{vagy } z^3 &= +az^2 + b^2z - c^3, \\ \text{vagy } z^4 &= az^3 - c^3z + d^4, \text{ etc.;} \end{aligned}$$

Azaz, z , amelyet ismeretlen mennyiségnek tekintek, egyenlő b -vel; vagy a négyzete egyenlő b négyzetével mínusz a z a -szorosával; vagy a z köbe egyenlő a z^2 a -szorosához adva a b négyzetének z -vel való szorzatát és ebből kivonva a c köbét; és hasonlóképpen haladhatunk tovább a többi kifejezéshez. Eképpen az ismeretlen mennyiségek kifejezhetők olyan egyszerű mennyiségek tagjaiként, amelyek vagy körvonalakkal és szakaszokkal, vagy kúpszeletekkel, vagy harmad és negyedrendűnél nem magasabbrendű görbékkel előállíthatók.

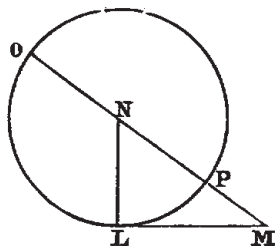
Azonban nem fogok most megállni ennek a részletesebb kifejtésében, mert akkor megfosztanám önöket a saját elme tökéletesítésének örömétől ugyanúgy, mint az ezen való munka által okozott gondolati edzés kalandjától, ami véleményem szerint a legfontosabb hasznunk ebből a tudományból. Tudniillik, semmi olyan nehézséget nem találtam itt, amit ne tudna kidolgozni bárki, aki ismeri a szokásos geometriát és algebrát, és megfontoltan halad előre ebben a gyűjteményben.

Eképpen, tartani fogom magamat ahhoz az állításhoz, hogy ha a tanuló, ezen egyenletek megoldása során nem mulaszt el egyszerűsíteni, amikor csak lehetséges, meg fogja kapni a legegyszerűbb összetevőket, amelyekre a probléma redukálható.

És ha ez megoldható a szokásos geometriával, akkor, használva egy sík felület szakaszait és köreit, amikor az utolsó egyenlet megoldódik nem marad más, mint a négyzete egy ismeretlen mennyiségnek, ami egyenlő valamely ismert mennyiség és a gyökének szorzatával növelve vagy csökkentve egy másik ismert mennyiséggel. Ekkor ez a gyök vagy az ismeretlen szakasz könnyen megtalálható. Például, ha

$$z^2 = az + b^2,$$

konstruálok, egy derékszögű NLM háromszöget, amely egyik oldala LM b -vel egyenlő, ami a négyzetgyöke az ismert b^2 mennyiségnek, a másik oldala LN $\frac{1}{2}a$ -val egyezik meg, ami, azon másik ismert mennyiség fele, amely az ismeretlen z -vel van szorozva. Ezután meghosszabítom ezen derékszögű háromszög átfogóját O -ig úgy, hogy NO egyenlő legyen NL -el és a teljes OM szakasz a keresett z .



5.10. ábra. Másodfokú egyenlet megoldása

Ezt a következő formulával tudom kifejezni:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

Ha azonban $y^2 = -ay + b^2$, ahol y a keresett mennyiség, ugyanezt az NLM háromszöget szerkesztem meg, de az átfogón az NM szakaszból kivonom az NL -el egyenlő NP szakaszt és a megmaradó PM a keresett gyök. Eképpen

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

adódik. Ugyanezen az úton kapjuk hogy, ha

$$x^4 = -ax^2 + b^2,$$

akkor PM az x^2 és

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}};$$

hasonlóképpen mint a másik esetben.

Végül, ha

$$z^2 = az - b^2,$$

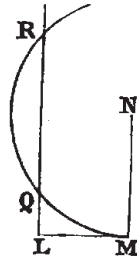
NL -t $\frac{1}{2}a$ -nak, LM -t b -nek választva mint az előbb: akkor az M és N összekötése helyett MQR párhuzamosat húzok az LN -el, és N -ből mint középpontból rajzolok egy kört L -en keresztül, ami kimetszi a Q és R pontokat; ekkor a keresett

z szakasz vagy MQ vagy MR , amely esetekben rendre

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2},$$

és

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$



5.11. ábra. Másodfokú egyenlet megoldása

És ha az N körüli kör nem metszi és nem érinti az MQR egyenest, az egyenletnek nincs gyöke, amikor azt mondjuk, hogy a problémának a megoldása lehetetlen.

Ugyanezen gyökök sok más módon is megtalálhatók, az általam adott egyszerű megoldások azt mutatják, hogy megszerkeszthető minden probléma a közös geometriában, nem csinálva többet, mint egy kicsit kiterjesztve a négy általam adott ábrát. Ez egy olyan dolog, amit úgy hiszem az antik matematikusok vagy nem vettek észre, vagy nem fektettek elegendő munkát azon könyvek megírásába, amelyekben az állításaikat bemutatják, így nincs egy biztos módszer a problémák közös megoldására, inkább véletlenszerűen vannak ezek összegyűjtve.

Szintén nyilvánvaló ez abból, amit Pappos csinál a hetedik könyvének az elején, ahol, miután tekinthetőleg teret szentel az elődjei geometriáról írt könyveinek felsorolására, végül hivatkozik egy kérdésre, amiről azt mondja, hogy sem Euklidész sem Apollonius és senki más sem oldott meg teljesen; a saját szavaival mondva:

*Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres et quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius; sed neque paululum quid addere iis, quae Euclides scripsit, per ea tantum conica, quae usque ad Euclidis tempora præmonstrata sunt, etc...*²

² A három vagy négy egyenesre vonatkozó probléma, amivel Apollonius oly öntelten dicsekszik, nem híven az öt megelőző szerzőknek, ilyen természetű: Ha három egye-

Egy kicsivel később, a következőképpen teszi fel a kérdést:

At locus ad tres et quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnifice se jactat, et ostentat, nulla habita gratia ei, qui prius scripserat, est hujusmodi. Si positione datis tribus rectis lineis ab uno et eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectae lineae ducantur, et data sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquę: punctum contingit positione datum solidum locum, hoc est unam ex tribus conicis sectionibus. Et si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineę ducantur; et rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit: similiter punctum datam coni sectionem positione continget. Si quidem igitur ad duas tantum locus planus ostensus est. Quod si ad plures quam quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, sed lineas tantum dictas; quales autem sint, vel quam habeant proprietatem, non constat: earum unam, neque primam, et quę manifestissima videtur, composuerunt ostendentes utilem esse. Propositiones autem ipsarum hę sunt.

*Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas quinque ducantur rectę lineę in datis angulis, et data sit proportio solidi parallelepipedı rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur ad solidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur reliquis duabus, et data quapiam linea, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, et data sit proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum, quod tribus reliquis continetur; rursus punctum continget positione datam lineam. Quod si ad plures quam sex, non adhuc habent dicere, an data sit proportio cujuspıam contenti quatuor lineis ad id quod reliquis continetur, quoniam non est aliquid contentum pluribus quam tribus dimensionibus.*³

nes adott, és szakaszokat tudunk húzni ezekhez valamely pontból úgy, hogy ezek adott szögeket zárjanak be az eredeti egyenesekkel és két kapott szakasz hosszának szorzata a harmadik négyzete legyen, akkor a pont illeszkedik egy adott "solid locus"-ra, azaz, kúpszelet.

³ Ismét, ha valamely pontból húzott szakaszok adott szögeket zárnak be négy adott egyenessel, és valamely kettőnek a szorzata a másik kettőével egyezik meg, akkor, a pont egy adott kúpszeletre illeszkedik. Meg lett mutatva, hogy csak két egyenes illeszkedhet egy síkbeli locushoz. De ha több mint négy egyenesünk van a mértani hely jelenleg nem ismert (azaz, nem lehet meghatározni ugyanazzal a módszerrel), egyszerűen "vonálnak" nevezik. Nem világos, hogy mik ők és mik a tulajdonságaik. Egy közülük, nem az első, de a legnyilvánvalóbb, volt csak vizsgálva és van hozzá bizonyítás. Ezek az állítások kapcsolódnak hozzá: Ha egy pontból egyenes szakaszok húzhatók öt adott egyeneshez adott szögekkel, és három szakasz által meghatározott téglatest térfogata egy adott arányban van a maradék két szakasz és bármely egyéb adott szakasz által meghatározott téglatest térfogatával, akkor a pontok egy vonalon helyezkednek el. Továbbá, ha hat adott egyenes van, és valamely három szakasz által meghatározott téglatest térfogata a másik három által meghatározottal egyezik meg, akkor megint a pont egy vonalra illeszkedik. Ha azonban több

Ennél a pontnál észrevehető, hogy azon geometriai vizsgálatokra vonatkozó aritmetikai megfigyelések, amelyeket az antik szerzők használtak nem léphettek át egy ponton, azon ahol tisztán látták a kapcsolatát két objektumnak, okozva ezáltal homályosságot és zavart vizsgálataik kifejtése során.

Pappos így folytatja:

Acquiescunt autem his, qui paulo ante talia interpretati sunt; neque unum aliquo pacto comprehensibile significantes quod his continentur. Licebit autem per conjunctas proportionales hęc, et dicere, et demonstrare universe in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas ducantur rectę lineę in datis angulis, et data sit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, et altera ad alteram, et alia ad aliam, et reliqua ad datam lineam, si sint septem; si vero octo, et reliqua ad reliquam: punctum continget positione datas lineas. Et similiter quotcumque sint impares vel pares multitudine, cum hęc, ut dixi, loco ad quatuor lineas respondeant, nullum igitur posuerunt ita ut linea nota sit, etc.

4

A kérdés, aminek a megoldása Euklidésszel kezdődött majd Apolloniusszal folytatódott, de máig nincs megoldva a következő:

Ha adott három, négy vagy több egyenes, először is szeretnénk találni olyan pontot, amelyből az egyeneseket adott szögekben metsző szakaszok húzhatók úgy, hogy az első kettő szorzata adott arányú legyen a harmadik négyzetével (ha csak hárman vannak), vagy a fennmaradó kettő szorzatával (ha négyen vannak); vagy három szorzata legyen arányos a fennmaradó kettő és egy tetszőlegesen adott harmadik szakasz szorzatával (ha öten vannak), vagy a maradék három szorzatával (ha hat van); vagy (ha hét van) tetszőleges négy szorzata legyen adott arányú a maradék három szorzatával, vagy a maradék négy szorzatával (ha nyolc van).

mint hat egyenesünk van, akkor nem tudjuk azt mondani, hogy az aránya valaminek ami tartalmazza a négy szakaszt adott valamihez, ami tartalmazza a maradék szakaszokat, mert nincs három dimenziósnál magasabb dimenziós alakzat.

⁴Ez a homályos szakasz a következőképpen fordítható: Ebben egyetértek azokkal, akik formálisan interpretálták ezeket a dolgokat (azaz, hogy a dimenziója egy alakzatnak nem haladhatja meg a hármat) ők fenntartják, hogy egy alakzat ami a szakaszokat tartalmazza nem kiterjeszthető minden úton. Ez megengedhető, azonban, mondani és szerkeszteni is lehet általában ezeket az arányokat a következő módon: Ha valamely pontból egyenes szakaszokat húzunk adott szög alatt adott egyenesekhez; és adottak az arányok a megfelelők között, úgy, hogy az első aránylik az elsőhöz, a második a másodikhoz, a harmadik a harmadikhoz, és így tovább, az utolsó az utolsóhoz, a pont egy adott vonalon fekszik. És hasonlóan, lehet akár páros vagy páratlan a szám, ahogy említettem, ez vonatkozik a négy egyenes esetére is, nincs közös módszer, ami ezt a vonalat meghatározza. — A szakasz jelentése megmutatkozik abban, ami ezután következik a szövegben.

Másodszor mivel végtelen sok ilyen pont van, szintén meg szeretnénk találni és leírni azt a görbét mely az összes ilyen pontot tartalmazza. Pappos azt mondta, ha három vagy négy egyenes van, akkor a keresett görbe kúpszelet, de nem tudta meghatározni, leírni vagy kifejezni a vonal természetét amikor több egyenes volt adva. Csak azt fűzte hozzá, hogy az antik matematikusok felfedeztek és jól használhatónak tartottak egyet közülük, amelyik a legegyszerűbb de nem a legfontosabb volt. Ez vezetett engem arra hogy megpróbáljak találni egy saját módszert, amellyel messzebb tudok jutni a probléma megoldásában.

Először is felfedeztem, ha a probléma három, négy vagy öt egyenesre vonatkozik, akkor elemi geometriai úton megoldható, azaz, körző és vonalzó segítségével, alkalmazva az általam eddig megadott szerkesztéseket, kivéve az öt párhuzamos egyenes esetét. Ebben az esetben, és a hat, hét, nyolc vagy kilenc egyenes esetében a keresett pontok a térbeli mértani helyek geometriájával, azaz a három kúpszelet egyikével oldható meg. Itt megint van egy kivételes eset a kilenc párhuzamos egyenes esete. Ebben és a tíz, tizenegy, tizenkettő vagy tizenhárom egyenes esetében, a kúpszeleteknél magasabb fokú egyenletnek felelnek meg a keresett görbék. Ismét, ki kell zárunk a tizenhárom párhuzamos egyenes esetét, amely a tizennégy, tizenöt, tizenhat és tizenhét egyenes eseteinek megfelelő, az előzőeknél magasabb fokú egyenletek megoldásaként adódik; és így tovább a végtelenségig.

Ezután, azt találtam, hogy, amikor csak három egyenesünk van, a keresett pontok nem csak kúpszeleten, de körön vagy egyenesen is fekkhetnek.

Amikor öt, hat, hét vagy nyolc egyenes adott, akkor a mértani hely a kúpszeleteknél magasabb fokú görbéken helyezkedik el, és nem lehet elképzelni olyan görbét, amely nem elégíti ki a probléma feltétel rendszerét; de a mértani hely lehet megint kúpszelet kör vagy egyenes. Ha kilenc, tíz, tizenegy vagy tizenkét egyenesünk adott, a görbénk csak egy fokkal magasabb rendű, mint a megelőző esetben, de ezek is kielégítik a feltételt, és így tovább a végtelenségig.

Végül, az első és legegyszerűbb görbe a kúpszeletek után előállítható egy parabola és egy mozgó egyenes metszéspontjaiként.

Úgy hiszem, hogy teljességgel előállítottam mindazt, amit Pappos szerint az antik matematikusok felfedeztek, megpróbálom most néhány szóban demonstrálni, amit oly sokszor már kimerítően leírtam.

Legyenek AB , AD , EF , GH , ... az adott egyenesek, és keressünk olyan C pontot, amelyből CB , CD , CF , CH , ... meghúzásával, $CBA_{\angle}$, $CDA_{\angle}$, $CFA_{\angle}$, $CHA_{\angle}$, ... az adott szögek, továbbá közülük néhány szorzata a többiével egyezik meg, vagy a két szorzat aránya adott, ezen utóbbi feltétel semmilyen extra nehézséget sem okoz.

Tegyük fel, hogy az egyenesek adottak, jelöléseinket egyszerűsíthetjük úgy, hogy két egyenest kiemelünk egyet az adottak közül és egyet a húzandók közül (AB -t és BC -t), és ezeket alapegyeneseknek tekintjük, ezekre vonatkoztatva

Láthatóan mindegy, hogy hány egyenes adott, a hossza a C végpontú vizsgált szakaszoknak mindig kifejezhető három tag összegeként, az egyik az y ismeretlen mennyiség szorozva vagy osztva valamely ismert mennyiséggel, a másik az x ismeretlen mennyiség szorozva vagy osztva egy ismerttel, a harmadik pedig egy ismert mennyiség. Kivétel akkor adódik, amikor az adott egyenes párhuzamos AB -vel vagy CB -vel, (ekkor a megfelelő x -t vagy y -t tartalmazó tag eltűnik.) Ez az eset túl egyszerű a további kifejtéshez. A tagok előjele $+$ vagy $-$ minden megengedett kombinációban.

Szintén látható, hogy bármely számú szakasz szorzatában a foka az x illetve y mennyiségeknek nem lehet nagyobb mint az összeszorozott szakaszok száma. Így nincs olyan tag, ami másodrendűnél, ha két szakasz szorzódik; harmadrendűnél ha három szorzódik egymással, és így tovább. Továbbá a C meghatározásához csak egy feltétel szükséges, azaz, hogy bizonyos szakaszok szorzata egyenlő lesz, vagy (ami ugyanolyan egyszerű) adott arányban áll a többi szorzatával. Mivel ez a feltétel a két ismeretlen egyetlen egyenletével fejezhető ki, tetszőleges értéket adhatunk az x illetve y közül az egyiknek és megkereshetjük az egyenletből a másikat. Nyilvánvaló, ha ötnél nincs több egyenes, az x mennyiség, amelyet nem használtunk az első szakasz kifejezéséhez, nem szerepelhet másodrendűnél magasabb fokon.

y -nak egy értéket adva $x^2 = \pm ax \pm b^2$, és így x megtalálható körzővel és vonalzóval, azon módszer alapján, amit már kifejtettünk. Ha szukcesszív módon végtelen sok értéket adunk y -nak, meg tudjuk kapni a megfelelő végtelen sok értéket az x értékére is, eképpen végtelen sok olyan C pontot, amely a keresett görbére esik.

Ez a módszer használható akkor is, amikor hat vagy több egyenesünk van, ha az egyik közülük párhuzamos AB -vel vagy BC -vel, amikor is x vagy y legfeljebb másodfokon szerepel az egyenletben, ekkor C megint megtalálható körzővel és vonalzóval.

Ugyanakkor, amikor az összes egyenes párhuzamos egymással és a kérdés az öt egyenes esetére vonatkozik, a C pont ezen az úton nem található meg. Mivel az x mennyiség nem szerepel az egyenletben, nem adhatunk az y számára tetszőleges értéket. Meg kell találnunk y -t. Mivel y -ban az egyenlet harmadfokú, egy köbös egyenlet gyökeként kapható meg, amely általában a kúpszeletek használata nélkül nem állítható elő.

Továbbá, ha kilencnél nem több az adott egyenesek száma, és nem mindegyik párhuzamos egymással, az egyenlet mindig megadható úgy, hogy legfeljebb negyedfokú legyen. Ezek az egyenletek mindig megoldhatók kúpszeletek segítségével egy általam a jelen munkában kifejtett úton.

Ugyanígy, ha nincs több tizenhárom egyenesnél, egy egyenlet foka nem haladhatja meg a hatot. Ezen egyenletek, ahogy azt szintén megmutatom, megoldhatók olyan görbék segítségével, melyek foka csak eggyel nagyobb a kúpszeletekéénél.

Ezzel az első részét az általam demonstrálandóknak befejeztem, mielőtt a második részt elkezdenénk, szükséges néhány általános állításról szólnunk, amelyek a görbe vonalak természetéhez kapcsolódnak.

Kosztolányi Dezső: Csöndes, tiszta vers

Nincs semmim... Így megyek magamban -
tip-top - szelíden, csendesen.
S ha éjjel bántanak a rablók,
kitárom két üres kezem.

A rablók sírnak velem együtt,
olyan-olyan szegény vagyok,
mint kisdéd első fürdetőjén,
és mint a teknőn a halott.

De tart a föld. Ez az enyém még,
feszül az ég fejem felett,
s kitárom az örök egeknek
örök-mezítlén testemet.

6. fejezet

A térfogatfogalom

A továbbiakban a terület illetve térfogat fogalmának abszolút megalapozásával foglalkozunk. A klasszikus analízis euklidészi struktúrára épülő eljárása a következő: A szakaszhossz és egyváltozós függvény fogalma alapján értelmezi a Riemann integrálhatóságot, ennek segítségével definiálja a síkbeli alakzatok bizonyos körének a területét, majd bevezetve a kétváltozós függvény illetve annak Riemann integrálhatóságának fogalmát definiálja a tér bizonyos alakzatainak térfogatát, és így tovább. Kétségtelen azonban, hogy ezen módszer során az euklidészi geometriában érvényes, a tér szerkezetét leíró szabályok egy körét automatikusan használjuk. (A konkrét értékek számítása során alapvetően használjuk a téglatest, derékszögű koordinátázás fogalmát, biztosítva, hogy eljárásunk a hiperbolikus térben biztosan nehézségekhez vezessen.)

A modern matematika egyik ága, a mértékelmélet, éppen azon igény konzekvens átgondolása alapján jött létre, hogy a függvényként való működés minimális feltételrendszere alapján beszéljünk a térfogatról. Definiáljuk a minimális igényeket kielégítő értelmezési tartományt (σ -gyűrű), a minimális feltételrendszert magára a halmazfüggvényre, (pozitivitás, σ -additivitás), ezáltal bevezetve a mérhetőség fogalmát, de nem foglalkozunk, a mérhető halmazok mértékének konkrét szám formájában való megadhatóságával.

A geometriában kézzelfogható alakzatokhoz rendelt kiszámítható értékeket szeretünk definiálni. Az évezredek során kialakult metódust, az újkori geometria ágyazta be az axiómák világába. Kiderül, hogy a síkon a terület fogalma, bizonyos szempontból egyszerűbb fogalom a térbeli alakzatok térfogatfogalmánál, továbbá összehasonlítva az euklidészi és hiperbolikus eseteket, ra kell jönnünk, hogy más metrikus adat kapcsolja ügyesen össze a különböző dimenziós mértékeket (melyek mértékelméleti definíciók szerint nem is mértékek) a két esetben. Példaként említeném, hogy az euklidészi esetben a távolság mérése vezet könnyebben a terület fogalmához (és a hasonlóságok

miatt) a szögek nem határozzák meg a területet, míg a hiperbolikus esetben a szögmérés adja a természetes utat a területhez és a távolságok lehetnek megtévesztők a területmérés szempontjából.

Az euklidészi esetekben az általunk minimálisan szükséges értelmezési tartomány elemein a térfogatfüggvény konkrét értékei meg is adhatók, míg a hiperbolikus esetben a térfogatfüggvény értékeinek meghatározása a legegyszerűbb esetekben is nehézséget okozhat.

6.1. Terület az euklidészi síkon

A körök területei úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérőik négyzetei.

Euklidész: Elemek XII, 2.Tétel

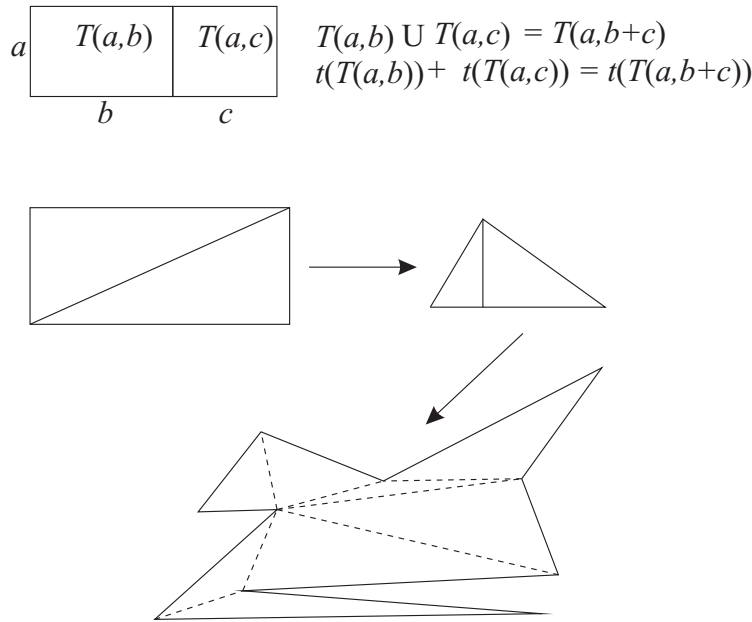
6.1.1. Definíció. *A terület az a T nem negatív additív halmazfüggvény, ami az egyszerű sokszögeken értelmezett, az egységnégyzethez az 1 számot rendeli és az egybevágóságokra nézve invariáns.*

A definíció alapján először meghatározhatjuk tetszőleges téglalap területét, majd a háromszögek területét, végül az egyszerű sokszög területét. Az első lépésben rögtön használnunk kell, hogy a Cauchy-féle függvényegyenletnek pozitív értékek esetén egyértelmű a megoldása, pontosabban: a pozitív félegyenesen értelmezett pozitív értékeket felvevő additív függvény lineáris. Ennek bizonyítása az Archimédeszi folytonossági axiómát használja, ezért a határátmenet fogalmára explicite nem épít. (Implicit módon persze használjuk, ahogy használnunk kell a szakasz hosszának definiálása során is.)

6.1.1. Lemma. *A téglalap területe a két oldalának szorzata, a háromszög területe alapjának és hozzá tartozó magassága szorzatának a fele.*

Bizonyítás: Világos, hogy egyik oldalát a téglalapnak rögzítve a másik oldal hosszának additív függvénye a terület függvény. A tétel előtti megjegyzés szerint ez a függvény lineáris azaz valamely $k'(a)$ számmal $t(T(a, b)) = k'(a) \cdot b$. Hasonlóképpen valamilyen $k''(b)$ számmal $t(T(a, b)) = k''(b) \cdot a$. Az első egyenletbe $b = 1$ -et helyettesítve $t(T(a, 1)) = k'(a)$ adódik, míg a második egyenletbe $a = 1$ -et rakva látjuk, hogy $t(T(1, b)) = k''(b)$. Ezért $t(T(a, b)) = k'(a) \cdot b = t(T(a, 1)) \cdot b = k''(1) \cdot a \cdot b = t(T(1, 1)) \cdot a \cdot b = a \cdot b$. A háromszög területére vonatkozó formula a háromszög derékszögű háromszögekre bontása után azok téglalappá történő kiegészítésével könnyen adódik. $\square$

6.1.2. Lemma. *Tetszőleges egyszerű sokszög egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontható.*



6.1. ábra. Sokszög felbontása.

Bizonyítás: Az állítást indukcióval bizonyítjuk. $n = 3$ esetben az állítás teljesül. Legyen $n \geq 4$. Tekintsük a sokszög konvex burkát, legyen v ezen sokszög egy csúcsa. v az eredeti sokszögnek is csúcsa. A v -vel szomszédos csúcsok legyenek u és w . Ha $\overline{uw}$ átló, akkor a v csúcs elhagyásával keletkező sokszögre indukciós feltételünket alkalmazva állításunk adódik. Ha nem, akkor $\triangle_{vuw}$ háromszög a belsejében, vagy az $\overline{uw}$ szakasz relatív belsejében tartalmazza az eredeti sokszög valamely csúcsát, így tekinthetjük egyikét azon csúcspontoknak, melyek $\triangle_{vuw}$ háromszöghöz tartoznak és $\overline{uw}$ szakasztól a távolságuk maximális. Egy ilyen z . Nyilván $\overline{vz}$ szakasz az eredeti sokszög átlója. Ez a sokszöget két kisebb oldalszámú sokszögre bontja, melyekre egyenként alkalmazva az indukciós feltételt az állítás adódik. $\square$

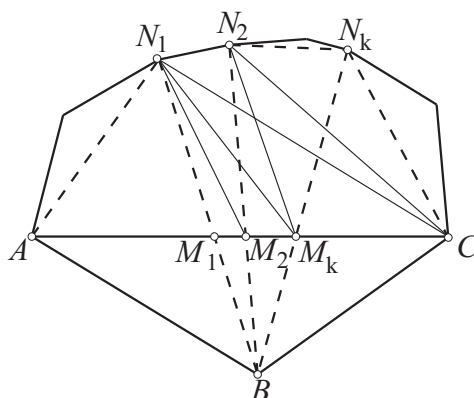
6.1.1. Megjegyzés. Az indukciós bizonyításból világos, hogy a keletkező háromszögek száma $n - 2$, és a felbontás egy $O(n^2)$ lépésszámú rekurzióval realizálható. Ehhez elég észrevenni, hogy a fenti eljárásban $O(n)$ lépésben találhatunk egy átlót, így a rekurzív eljárás $O(n^2)$ lépésben fejezhető be. A jelenleg ismert leghatékonyabb algoritmus, ezt a feladatot $O(n)$ lépésben oldja meg.

6.1.2. Megjegyzés. Az előbbi megjegyzést is figyelembe véve ha van jól definiált területfüggvényünk az különböző háromszög felbontások esetén nem adhat különböző értékeket az egyszerű sokszög területére. Így a továbbiakban két út közül választhatunk; vagy igazoljuk, hogy két háromszögre bontás esetén

az egyszerű sokszögre ugyanazt a számértéket kapjuk így az egyszerű sokszög területe definiálható, mint valamely fenti módon való triangulálásánál a keletkező háromszögek területeinek az összege, vagy általánosan konstruálunk egy terület függvényt, mely az eddig levezetett formulákat és a terület fogalmában szereplő állításokat egyaránt teljesíti, ekkor a terület függvény létezése garantálja, hogy a különböző triangulálások ugyanazon eredményt adják. Számunkra az első megoldás kézenfekvőbb, mert ez esetleg a hiperbolikus sík esetén is alkalmazható megfontolásokhoz vezet.

6.1.2. Definíció. Egy egyszerű sokszög konvex, ha tetszőleges két pontjával együtt annak összekötő szakaszát is tartalmazza.

6.1.3. Lemma. Konvex sokszög két, nem metsző átlókkal való triangulálása esetén, a két felbontásban keletkező háromszögek területeinek összege megegyezik.



6.2. ábra. Konvex sokszög területe.

Bizonyítás: A csúcsszámra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. $n = 3$ esetén az állítás triviális. Ha $n = 4$ két háromszögbontásunk van a két átlónak megfelelően. A két bontás háromszögei egymást négy háromszögben metszik. Ezek területének egyértelműsége és az additivitás alapján az állítás ebben az esetben is teljesül. Legyen most $n \geq 4$. Tekintsük az egyik felbontás egy olyan háromszögét, mely a sokszög két szomszédos oldalát tartalmazza oldalként, legyen ez $\triangle ABC$, ahol $\overline{AB}, \overline{BC}$ a sokszögnek is oldalai. (Mivel a sokszögnek n oldala van, a keletkező háromszögek száma pedig $n - 2$, ilyen háromszög legalább kettő van.) Ha ezen háromszög a másik felbontásnak is háromszöge, a B csúcs elhagyásával keletkező konvex $n - 1$ szögnek a maradék háromszögek alkalmas triangulálását adják, így indukciós feltételünket érvényesítve az állítást kapjuk. Ha $\triangle ABC$ nem háromszöge a második felbontásnak, a B csúcsból induló $n - 3 > k > 0$ átló k metszéspontot ad az

$\overline{AC}$ szakaszon, legyenek ezek rendre $M_1, \dots, M_k$. A $\overline{BA}, \overline{BM_1}, \dots, \overline{BM_k}, \overline{BC}$ szakaszok a második trianguláció $(k+1)$ darab B csúcsú háromszögének oldalaira illeszkednek. A $\overline{BM_1}, \dots, \overline{BM_k}$ szakaszoknak megfelelő csúcspontok legyenek rendre $N_1, \dots, N_k$. Az $AN_1 \dots N_k C$ konvex sokszöget a vizsgált átlók a $\triangle_{AN_1 M_1}, \triangle_{N_k M_k C}$ háromszögek és az $M_i N_i N_{i+1} M_{i+1}$ négyszögek diszjunkt uniójára bontják. Tekintsük az $M_i N_i N_{i+1} M_{i+1}$ négyszögnek az $\overline{M_i N_{i+1}}$ átlóval való felbontását. Ekkor az additivitás miatt

$$t(\triangle_{BN_i N_{i+1}}) = t(\triangle_{BM_i M_{i+1}}) + t(\triangle_{M_i N_i N_{i+1}}) + t(\triangle_{M_i N_{i+1} M_{i+1}})$$

áll fenn. Jelöljük $\mathcal{F}$ -el a második felbontás azon háromszögeinek halmazát, melyek nem tartoznak a $AN_1 \dots N_k C$ sokszöghöz. A második felbontáshoz tartozó területösszeg így:

$$\begin{aligned} t_2 &= t(\triangle_{ABC}) + \sum_{\triangle \in \mathcal{F}} t(\triangle) + t(\triangle_{AN_1 M_1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^{k-1} [t(\triangle_{M_i N_i N_{i+1}}) + t(\triangle_{M_i N_{i+1} M_{i+1}})] + t(\triangle_{CN_k M_k}). \end{aligned}$$

Az $M_1 N_1 N_2 M_2$ négyszög másik átló szerinti felbontása a

$$t(\triangle_{M_1 N_1 N_2}) + t(\triangle_{M_1 N_2 M_2}) = t(\triangle_{M_1 N_1 M_2}) + t(\triangle_{M_2 N_1 N_2})$$

egyenlőséghez vezet, ahonnan

$$\begin{aligned} &t(\triangle_{AN_1 M_1}) + \sum_{i=1}^{k-1} [t(\triangle_{M_i N_i N_{i+1}}) + t(\triangle_{M_i N_{i+1} M_{i+1}})] + t(\triangle_{CN_k M_k}) = \\ &= t(\triangle_{AN_1 M_2}) + t(\triangle_{M_2 N_1 N_2}) + \sum_{i=2}^{k-1} [t(\triangle_{M_i N_i N_{i+1}}) + t(\triangle_{M_i N_{i+1} M_{i+1}})] + t(\triangle_{AN_1 M_1}) \end{aligned}$$

összefüggéshez jutunk. Az eljárást folytatva az $AN_1 \dots N_k C$ sokszög nem metsző átlókkal való $\triangle_{AN_1 C}, \triangle_{CN_1 N_2}, \triangle_{CN_2 N_3}, \dots, \triangle_{CN_{k-1} N_k}$ triangulációját kapjuk, mellyel a kérdéses t_2 területösszeg:

$$t_2 = t(\triangle_{ABC}) + \left\{ \sum_{\triangle \in \mathcal{F}} t(\triangle) + t(\triangle_{AN_1 C}) + \sum_{i=1}^{k-1} t(\triangle_{CN_i N_{i+1}}) \right\}.$$

Mivel a kapcsos zárójelben levő összeg, egy nem metsző átlókkal való felbontású területösszege azon $n-1$ csúcsú sokszögnek mely az $\triangle_{ABC}$ elhagyásával keletkezik az indukciós feltételünk szerint megegyezik az első felbontás $\triangle_{ABC}$ -től különböző háromszögeinek területösszegével, ezért $t_1 = t_2$ valóban teljesül. $\square$

6.1.3. Definíció. *A konvex sokszög területe a nem metsző átlókkal való valamely felbontásában szereplő háromszögek területének összege.*

Lemmánk szerint a háromszögekre a megfelelő formulát adó terület függvény a fenti definícióval kiterjed a konvex sokszögekre.

6.1.1. Tétel. *Egyszerű sokszög két, nem metsző átlókkal való triangulálása esetén, a két felbontásban keletkező háromszögek területeinek összege megegyezik.*

Bizonyítás: Az egyszerű sokszög egyik triangulációja a másik háromszögeit konvex részekre bontja. A konvex daraboknak tetszőleges triangulációját tekintve a t_1 területösszeg az ábrán szereplő valamennyi háromszög területének összegeként adódik. A második t_2 területösszeget ugyanezen háromszögek területének egy másik csoportosításával kapott összeg adja. Így a két terület összeg megegyezik. Ez az előző lemma szerint nem függ a metszet darabok triangulálásától. $\square$

6.1.4. Definíció. *Az egyszerű sokszög területe a nem metsző átlókkal való valamely felbontásában szereplő háromszögek területének összege.*

Definíciónk a tétel értelmében a terület függvény egyszerű sokszögekre való kiterjesztését adja. Ezzel igazoltuk, hogy a háromszögekhez rendelt "alap és a hozzátartozó magasság szorzata osztva kettővel" függvény a terület definíciójában szereplő valamennyi kitételnek megfelelő módon kiterjeszthető. Azaz van terület függvény, aminek érvényességi körét a továbbiakban általánosabb síkbeli alakzatokra is kiterjeszthetjük. Legyen T valamely terület függvényünk.

6.1.5. Definíció. *A H halmaznak van területe, ha a beírt egyszerű sokszögek területének $B(H)$ suprémuma megegyezik a köré írt egyszerű sokszögek területének $K(H)$ infimumával. Legyen $T(H)$ érték ez a közös szám.*

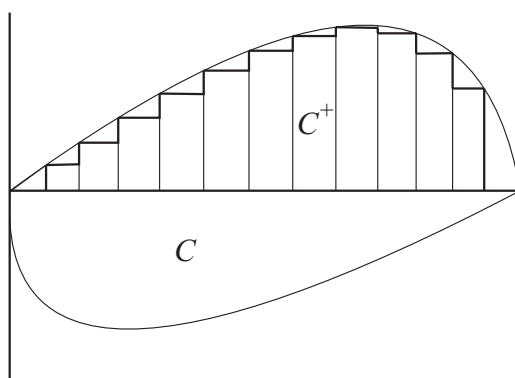
Jegyezzük meg, hogy egyszerű sokszögek esetén ez éppen a korábban definiált terület értéke.

6.1.4. Lemma. *A terület függvény monoton. Azaz ha $A \subset B$ és a két halmaznak van területe, akkor $T(A) \leq T(B)$.*

Bizonyítás: Legyen $K \subset A \subset B$ egyszerű sokszög, ekkor $T(K) \leq T(B)$ minden $K \subset A$ így $T(A) = B(A) \leq B(B) = T(B)$. $\square$

6.1.2. Tétel. *Minden korlátos konvex halmaznak van területe. A kör területe $r^2\pi$.*

Bizonyítás: C tetszőleges konvex halmaz. Ha nincs három nem egy egyenesen levő pontja, akkor maga is egy szakasz így területe nyilván nulla. Egyébként tekintsük egy átmérőjét. (Két határpontját összekötő szakaszt húrnak nevezzük, a maximális hosszúságú húrok az átmérők.) Ennek végpontjaiban húzott merőlegesek a konvex halmazt csak ebben a pontjában metszik, ezek a konvex halmaznak támaszegyenesei. Az átmérő és az egyik végpontjában megrajzolt támaszegyenes a konvex halmazhoz rendelt derékszögű koordinátarendszert származtat, tekintsük x tengelynek az átmérő egyenesét. A pozitív y koordinátájú pontok egy újabb C^+ konvex halmazt adnak C metszetét a felső félsíkkal. Ennek azon határpontjai, melyek x -hez nem tartoznak a koordinátarendszer konkáv függvényét adják. Ezen konkáv függvény Riemann integrálhatóságából következik, hogy az alsó közelítőösszegek supremuma és felső közelítőösszegek infimuma megegyezik. Mivel ezek geometriai reprezentációja, C^+ -ba beírt illetve C^+ köré írt egyszerű sokszögek területeinek supremuma illetve infimuma, C^+ nak így vele együtt C -nek van területe. A kör területére vonatkozó állítás egyszerű integrálással könnyen adódik. $\square$



6.3. ábra. Konvex halmaz területe.

6.2. Terület a hiperbolikus síkon

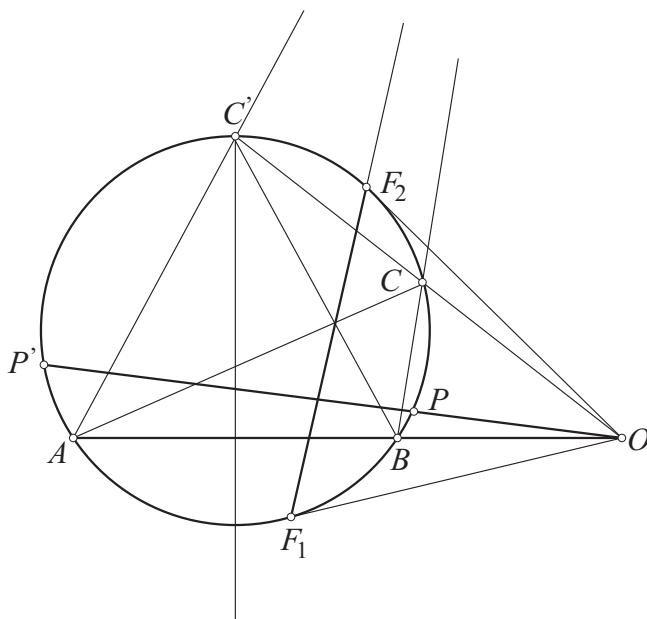
Egyenlő területű háromszögeknek a szögösszege egyenlő.

Bolyai J.: Appendix

A terület függvény definícióját módosítanunk kell, hiszen nincs a hiperbolikus síkon négyzet, a helyébe lépő alakzat területének egységként való rögzítése pedig nem kecsegtet előnyökkel. Mint kiderül, a jó mérték választás a háromszorosan aszimptotikus háromszögek területének alkalmas rögzítésével adódik.

6.2.1. Definíció. A terület egy olyan T nem negatív additív halmazfüggvény, ami az egyszerű sokszögeken értelmezett és az egybevágóságokra nézve invariáns.

6.2.1. Tétel. A háromszorosan aszimptotikus háromszögek egymással egybevágóak. Így területük egy konstans T érték.



6.4. ábra. Háromszorosan aszimptotikus háromszögek egybevágósága.

Bizonyítás: A projektív modell egybevágóságai azok a kollineációk, melyek a modellkört invariánsan hagyják. Tekintsünk egy a modellbe írt $\triangle ABC$ háromszöget. Az $\overline{AB}$ szakaszfelezőmerőlegese messe a C' -ben a modellkört, úgy, hogy C és C' azonos $\overline{AB}$ által meghatározott íven legyenek. Ha $C = C'$ a háromszögiünk egyenlőszárú, ha nem, tekintsük az AB és CC' egyenesek O metszéspontját. Tegyük fel (OBA) , (OCC') rendezések állnak fenn, ha O közös pont, illetve legyen $AC'CB$ a trapéz csúcsainak körbenjárása, ha O végtelen távoli pont. Tekintsük azt a centrális axiális kollineációt, melynek centruma O , A, B illetve C képe B, A illetve C' . Ennek a leképezésnek tengelye a BC , AC' egyenespár közös pontját az AC , BC' egyenespár közös pontjával összekötő egyenes. (Mivel az egyik pont a körön kívül a másik belül helyezkedik el a leképezésnek két fixpontja is van a körön (F_1 és F_2) ezek az O -ból a körhöz húzott érintők, érintési pontjai.) A leképezés olyan kollineáció mely a modellkört invariánsan hagyja, hiszen ha P képe P' valamely P körhatáron levő pontra, akkor PA és $P'B$ egyenesek metszéspontja a tengelyre

esik. A Pascal tétel megfordítását alkalmazva a $CPBC'P'A$ hatszögre, adódik, hogy ezen pontok egy kúpszeletre illeszkednek. Mivel a hat pont közül öt egy kör pontja P' is a modellkörhöz tartozik. Így minden körbe írt háromszög egyenlőoldalú háromszögbe transzformálható a modellben egybevágóságként jelentkező transzformációval. Az egyenlőoldalú háromszögek a modellkör középpontja körüli forgatással azonosíthatók, amely szintén a hiperbolikus sík egybevágósága. Ezzel állításunkat igazoltuk. $\square$

6.2.2. Tétel. *Az egyszeresen aszimptotikus háromszögek átdarabolhatóak egy ötszögbe.*

Bizonyítás: Az átdarabolhatóság bizonyításához H.Liebmann zseniális ötletét alkalmazzuk, a szemléletes ábrához a Poincare körmodellt fogjuk használni (lásd 6.5. ábra). Jelöljön ABC egy olyan egyszeresen aszimptotikus háromszöget, amely végtelenben fekvő csúcsa C , A csúcsa pedig a modellkör középpontja. (Ezzel a feltétellel az ábrát csak egyszerűsítjük, mint láttuk, a modellkör középpontjának nincs kitüntetett szerepe.) Egészítsük ki az ABC háromszöget az AB oldalélegyenes alkalmas meghosszabbításával egy ACD kétszeresen aszimptotikus háromszöggé. Az A csúcsból DC oldalra bocsátott merőleges talppontja M , az ABC háromszög AM egyenesre vonatkozó tükörképe pedig AA_1D . Az A_1D illetve BC oldalak M_1 -ben metszik egymást. Az A_1 és B pontokból szintén állítsunk merőlegest a DC egyenesre, a talppontokat jelölje P és Q . Ha a CB egyenes tükörképe A_1P egyenesre DA_2 akkor az $A_1A_2M_2$ háromszög egybevágó az $A_1M_1M_2$ háromszöggel, az viszont az M_1BB_2 háromszöggel, így az ABC háromszög számmal jelölt darabjait rendre meg tudjuk feleltetni az ötszög azonos számmal jelölt darabjainak. Ebből az állítás már következik. $\square$

6.2.3. Tétel. *Ha a kétszeresen aszimptotikus háromszög szöge α a területe $c(\pi - \alpha)$ ahol a c konstans tetszőleges pozitív szám lehet.*

Bizonyítás: Jelölje $f(\phi)$ a kérdéses területet, ahol ϕ a háromszög szögének kiegészítő szöge, lásd a 6.6. ábrát.

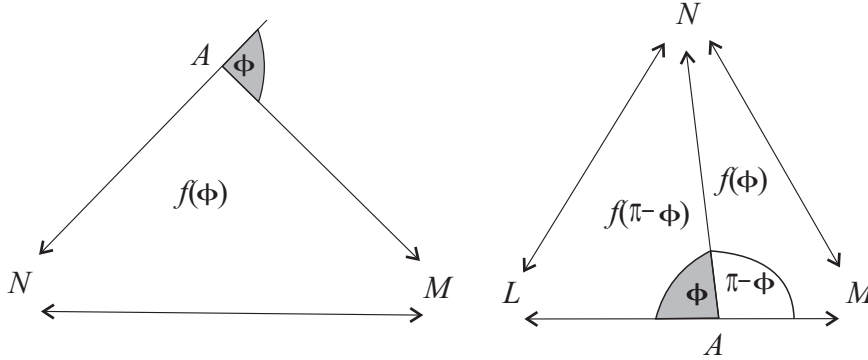
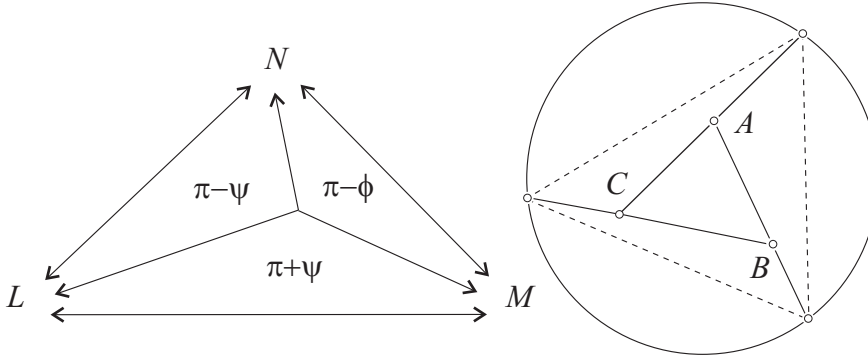
Ha most összeillesztünk az ábrának megfelelően két kétszeresen aszimptotikus háromszöget, melyek nem nulla szöge rendre ϕ és $\pi - \phi$ egy háromszorosan aszimptotikus háromszöget kapunk, melynek területe a konstans T érték. Ebből rögtön adódik, hogy a vizsgált függvényre teljesül a

$$f(\phi) + f(\pi - \phi) = T$$

feltétel, ahol $0 \leq \phi \leq \pi$. (Az $f(0) = 0$ $f(\pi) = T$, értékpár határátmenettel adódik.) A 6.6. ábra jól mutatja, hogy miért kell teljesülnie az

$$f(\phi) + f(\psi) + f(\pi - \phi - \psi) = T$$


$$f(\phi) + f(\psi) = f(\phi + \psi),$$
$$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$$
$$k \leq nx \leq k + 1$$
$$k\lambda \leq nf(x) \leq (k+1)\lambda.$$
$$\left| x - \frac{f(x)}{\lambda} \right| < \frac{1}{n}$$
$$f(x) = \lambda x.$$

6.6. ábra. Miért additív az f függvény?

6.7. ábra. A terület és a defektus

A λ értéke nyilván $\lambda = T/\pi$, mert a háromszorosan aszimptotikus háromszög területe T . $\square$

Ezek után válasszuk a T értékét π -nek. Ekkor

6.2.4. Tétel. Az α, β, γ szögekkel rendelkező háromszög területe a defektusa.

Bizonyítás: Az oldalak ciklikus meghosszabbításával bármely véges oldalú, ABC_{Δ} háromszög egy háromszorosan aszimptotikus háromszöggé egészíthető ki. A kiegészítő darabok olyan kétszeresen aszimptotikus háromszögek, melyek területe az előbbiek szerint éppen $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma$, így a területfüggvény additivitása alapján a kívánt formulához jutunk:

$$T(ABC_{\Delta}) = \lambda(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$$

ahol $\lambda = T/\pi$. $\square$

6.3. Térfogat az euklidészi térben

Azok a paralelepipedon, melyek magassága ugyanaz,

úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik.

Euklidész Elemek XI. 32. Tétel

A terület fogalmának felépítéséhez nem volt szükség egyébre, csak azon princípium felhasználására, hogy pontosan az egymásba átdarabolható alakzatok az egyenlő területűek. A térben ez az elv nem igaz, két azonos területű poliéder nem feltétlenül darabolható át egymásba. Ahhoz, hogy alkalmas definícióhoz juthassunk először ezt a kérdést vizsgáljuk meg.

6.3.1. Max Dehn tétele

M. Dehn Hilbert harmadik problémájának megválaszolása közben bevezeti a Dehn invariáns fogalmát. Ez egy poliéderhez rendelt szám, ami rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy átdarabolás során az értéke nem változik meg.

Válasszunk egy additív függvényt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, amelyre $f(\pi) = f(0) = 0$. Defináljuk tetszőleges P poliéderre a következő számot:

$$D(P) = \sum_{e \in \{P \text{ éle}\}} f(\theta_e) \ell(e),$$

ahol θ_e a P poliéder e élénél fellépő lapszög, és $\ell(e)$ az e él hossza.

Igazolni akarjuk, ha P -t véges sok kisebb poliéderre $P_1, \dots, P_N$ -re bontjuk, akkor

$$D(P) = \sum_{k=1}^N D(P_k) \quad (6.1)$$

áll fenn azaz, ha P és Q egymásba átdarabolhatóak, akkor $D(P) = D(Q)$.

Legyen $P_1, \dots, P_N$ a P egy ilyen felbontása. Adott e él és P_k esetén a következő esetek léphetnek fel:

1. e a P belsejébe esik. Mivel ilyenkor e egy környezete is P -hez tartozik, az e -t élként vagy annak részeként tartalmazó darabok e -nél fellépő lapszögeinek összege 2π . Így a (6.1) jobb oldalán az e él egy $f(2\pi)\ell(e)$ mennyiséggel járul az összeghez. (Felhasználtuk, hogy f additív.)
2. e P egy lapjához tartozik. Ilyenkor az előző pont okfejtése érvényben marad, de a kérdéses összeghez most $f(\pi)\ell(e)$ összeggel járulunk csak hozzá.
3. ha e egy e' P -hez tartozó él része, akkor a teljes hozzájárulás, éppen $f(\theta_{e'})\ell(e)$.

Mivel f -et úgy választottuk, hogy $f(\pi) = 0$ így $f(2\pi) = 0$ f additív volta miatt szintén igaz, ezért kapjuk, hogy az (6.1) egyenlőség valóban fennáll.

6.3.1. Tétel (Dehn átdarabolhatósági tétele). *A szabályos tetraéder és a vele egyenlő térfogatú kocka nem darabolhatók egymásba.*

Bizonyítás: Tekintsünk egy 1 élű szabályos T tetraédert. Világos, hogy $D(T) = 6f(\theta)$, ahol θ a T egy lapszöge. Ismert, hogy a $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$ összefüggésnek eleget tevő szögre θ/π irracionális, azaz található egy additív f függvény úgy, hogy $f(\theta) = 1$ és $f(\pi/2) = 0$ egyaránt teljesül. Tekintsük ugyanis $\mathbb{Q}$ felett $\mathbb{R}$ -et mint végtelen dimenziós V vektorteret. Ebben π és θ független vektorok, így kiegészíthetők a tér egy bázisává. (Természetesen használjuk a kiválasztási axiómát.) Legyen $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, melyre $f(\theta) = 1$ és a többi bázisvektorra v -re $f(v) = 0$. A függvény $\mathbb{Q}$ felett lineáris, $\mathbb{R}$ felett additív. Definíció szerint $f(\theta) = 1$ és az additivitás miatt $2f(\pi/2) = f(\pi) = 0$. (Jegyezzük meg, hogy f $\mathbb{R}$ felett nem lineáris, mert $0 \neq \pi f(\theta)$, míg $0 = \theta f(\pi)$ és linearitás esetén mindkettő $f(\theta\pi)$ -vel lenne egyenlő.)

Azaz a K kockára $D(K) = 0$ ugyanakkor a szabályos tetraéderre $D(T) = 6$. Így nem lehet őket egymásba átdarabolni. $\square$

6.3.2. Cavalieri-elv

A terület felépítésének módszere további analitikus feltétel nélkül tehát, nem alkalmazható a térfogat kiépítéséhez. A határérték fogalmának korai használatát elkerülendő egy új axiómát – a *Cavalieri-elvet*– veszünk fel axiómáink közé. Ennek célja összekapcsolni a terület és a térfogat fogalmát a lehető legegyszerűbb módon. Mint ahogy az más tankönyvekből kiderül, az elemi felépítések elkerülhetik ezt az állítást, de annak analogonjait újra és újra bizonyítaniuk kell, például említeném az egyenlő alapterülettel és egyenlő magassággal rendelkező tetraéderekhez rendelt számok egyenlőségét, vagy az azonos alappal rendelkező, egyenlő magasságú kúpok és hengerek térfogatának az arányát. Természetesen az elvet a modern matematika elvárásainak megfelelő szinten kell interpretálni, így a szokásos egyszerűbb megfogalmazás helyett egy kicsit körmonfontabbak leszünk.

6.3.1. Definíció (Cavalieri-elv). *A V halmazfüggvény teljesíti a Cavalieri elvet, ha tetszőleges H_1, H_2 halmazpár esetén, amelyre értelmezett, teljesül a következő tulajdonság: Ha egy párhuzamos síksor elemeivel metszve H_1 és H_2 halmazokat, minden metszetszámnak létezik és egyenlő a területe, akkor*

$$V(H_1) = V(H_2).$$

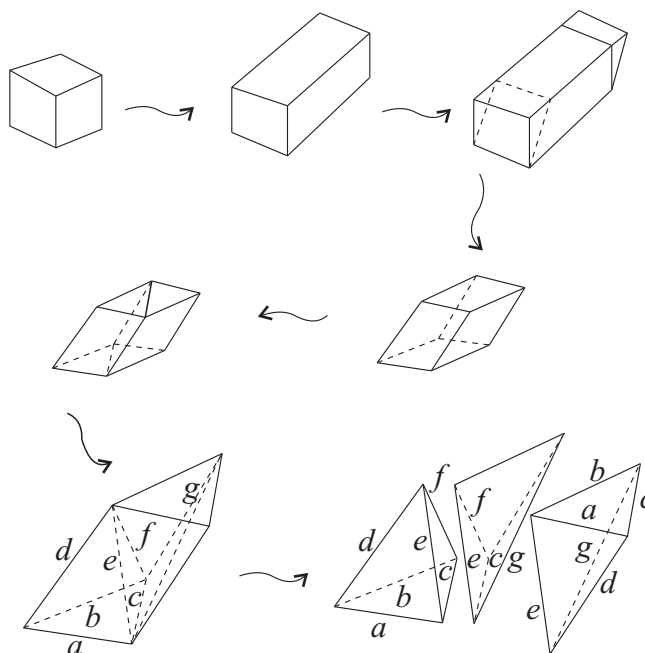
6.3.2. Definíció. A térfogat egy V nem negatív, additív halmazfüggvény, ami az egyszerű poliédereken értelmezett, az egységkockához az 1 számot rendel, az egybevágóságokra nézve invariáns, és teljesíti a Cavalieri-elvet.

Mostmár a további felépítéshez szükséges tetraéder-térfogat egyszerűen adódik.

6.3.2. Tétel. A T tetraéder térfogata:

$$V(T) = \frac{1}{3}T(ABC_{\Delta}) \cdot m,$$

ahol m az ABC_{Δ} háromszöglaphoz tartozó tetraéder magasság.



6.8. ábra. Tetraéder térfogata.

Bizonyítás: A szokott módon alkalmas átdarabolásokkal és a folytonossági axiómák felhasználásával eljuthatunk a paralelepipedon térfogatát kifejező "alapterület és a magasság szorzata" formuláig. A paralelepipedont egy átlós síkja mentén félbevágva két egybevágó háromoldalú hasábhöz jutunk, melyeknek persze egyenlő a térfogata. Az ábrának megfelelő módon ezen hasáb három – a Cavalieri elv szerint – egyenlő térfogatú tetraéderre bomlik, melyek térfogata ezek szerint a paralelepipedon térfogatának hatoda. $\square$

Mivel a konvex poliéderek tetraéderekre bonthatók, az általános poliéderek, meg konvex poliéderek diszjunkt uniójaként állnak elő, a poliéderek térfogatát meg tudjuk határozni. A közismert egyéb testek térfogata integrálszámítás segítségével határozható meg.

6.4. Integrálfogalmak

Egy matematikai elméletet - mint egyébként minden más dolgot - könnyebb felfogni, mint elmagyarázni a szépségét.

A. Cayley

Az integrálás tehát alapvető szerepet játszik a térfogat meghatározásában most a leginkább használt két integrálfogalmat elevenítjük fel.

6.4.1. Jordan mérték és a Riemann integrál

A Jordan mérték a szokásos poliéder térfogat fogalmon alapuló mérési mód. A továbbiakban n -dimenziós abszolút térben adjuk meg a mértéket, felhasználva, hogy a szimplex térfogatának ismeretében tetszőleges poliéder térfogatát ismerjük. Ha H tetszőleges halmaz, melybe írható poliéder és valamely másik poliéderhez hozzátartozik definiálhatjuk a H belső illetve külső mértékét a

$$v^-(H) = \sup\{v(P) \text{ ahol } P \subset H \text{ poliéder}\},$$

$$v^+(H) = \sup\{v(P) \text{ ahol } P \supset H \text{ poliéder}\}.$$

Jordan értelemben mérhető egy halmaz ha

$$v^-(H) = v^+(H) =: v(H)$$

és ekkor ezt a közös értéket a halmaz Jordan mértékének vagy n -dimenziós térfogatának nevezzük és $v(H)$ -val jelöljük. Jegyezzük meg, hogy definíciónk szerint a poliéderek Jordan mérhetőek. Véges metszete és uniója valamint szimmetrikus differenciája Jordan mérhető halmazoknak szintén mérhető. Kompakt halmaz nem feltétlenül mérhető, a Cantor halmaz belső mértéke nyilván nulla, míg külső mértéke nem tűnik el, mert a komplementer intervallumok összhossza kisebb mint egy; hasonlóképpen a $[0,1]$ intervallum racionális pontjainak halmaza mint $\mathbb{R}$ részhalmaza sem mérhető. Egy korlátos nyílt halmaz szintén nem feltétlenül Jordan mérhető. Igazolható, hogy egy korlátos halmaz Jordan mérhető akkor és csak akkor ha a határa Lebesgue

értelemben nullmértékű halmaz. Világos, hogy megszámlálható unióra a Jordán mérhető halmazok halmaza nem zárt, azaz a Jordán mérhető halmazok nem alkotnak σ -algebrát így a Jordán mérték igazából nem mérték.

A Riemann által használt integrál fogalom a Jordán mérték fogalmára épít. Most mi a Darboux által bevezetett felépítést vázoljuk. Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ valós vektor változós valós értékű függvény. Jelölje $\mathcal{D}(f)$ az értelmezési tartományát, tegyük fel, hogy ez Jordán mérhető halmaz. Az értelmezési tartomány egy felosztása nem más, mint véges sok, páronként közös belső ponttal nem rendelkező, Jordán mérhető halmazok egy olyan rendszere, amely uniója $\mathcal{D}(f)$. Jelöljön F egy ilyen felosztást és vezessük be a felosztásra vonatkozó alsó $s(f, F)$ illetve felső $S(f, F)$ közelítő összeget a következőképpen:

$$s(f, F) := \sum_{i=1}^n m_i v(F_i),$$

$$S(f, F) := \sum_{i=1}^n M_i v(F_i),$$

ahol F_i az F felosztáshoz tartozó i -edik halmaz, m_i illetve M_i az f függvény infimuma illetve supremuma az F_i halmazon. Könnyen igazolható, hogy ha F illetve F' két felosztás, akkor teljesül a

$$s(f, F) \leq S(f, F')$$

egyenlőtlenség, így az összes felosztások halmazán definiált

$$s(f) := \sup s(f, F) \leq \inf S(f, F) =: S(f)$$

egyenlőtlenség is fennáll. A $s(f)$ illetve $S(f)$ függvények az alsó illetve felső Darboux féle integrálok. *Riemann értelemben integrálhatónak* nevezzük a függvényt, ha az alsó illetve felső Darboux integrálja megegyezik.

Könnyen igazolható, hogy Jordán mérhető halmazon értelmezett folytonos függvény Riemann integrálható, és az integrál értéke a gráf és az $x_{n+1} = 0$ hipersík közötti általános henger Jordán mértéke $((n+1)$ -dimenziós térfogata). Következésképpen a halmazok egy széles körének Jordán mértéke integrálás útján meghatározható, pld. tetszőleges konvex halmaz határát egy adott irányú árnyékhatára két olyan felületre vágja szét, mely egy alkalmas koordinátarendszerben egy folytonos függvény gráfja, így tetszőleges $n+1$ -dimenziós konvex halmaz euklidészi térfogata meghatározható. Mindazonáltal a Jordán mérhető halmazok köre igen szűk, ezért egy új (ezúttal igazi) mérték fogalmat vezetünk be, mely mérhető halmazai között a Jordán mérhető halmazok szerepelnek.

6.4.2. Lebesgue mérték és Lebesgue integrál

A Lebesgue mérték definíciójánál elegendő az euklidészi n -dimenziós térben dolgoznunk, hiszen ha kialakult a megfelelő integrál fogalmunk a hiperbolikus térbeli számításainkat a koordináták euklidészi terében fogjuk elvégezni. Ezért a kiindulási objektumunk a téglák, melynek Lebesgue mértékét az élek hosszának szorzataként definiáljuk.

Rögzítsük az $n \in \mathbb{N}$ számot. Az $\mathbb{R}^n$ -beli *tégla* a

$$B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i], \text{ ahol } b_i \geq a_i$$

direkt szorzat. A *Lebesgue mértékét a téglának* a

$$\text{vol}(B) =: \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

szorzattal definiáljuk. (Ez a közösleges mértéke is egyúttal.) Tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazhoz rendeljük a:

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{B \in \mathcal{C}} \text{vol}(B) : \text{ahol } \mathcal{C} \text{ egy megszámlálható téglák fedése } A\text{-nak} \right\}$$

úgynevezett *külső mértéket*. Az A halmaz *Lebesgue mérhető*, ha teljesül rá a következő tulajdonság:

$$\forall S \subset \mathbb{R}^n, \lambda^*(S) = \lambda^*(A \cap S) + \lambda^*(S \setminus A).$$

A Lebesgue mérhető halmazok egy σ -algebrát alkotnak, és a Lebesgue mértékük definiálható a

$$\lambda(A) = \lambda^*(A)$$

értékkel. Legfontosabb ismeretek a Lebesgue mértékről számos analízis könyvben megtalálhatóak, azonban néhány tulajdonságot it is megemlítenénk. A Lebesgue mérték a Jordan mérték kiterjesztése, azaz Jordan mérhető halmazok Lebesgue mérhetőek is és a két hozzárendelt érték megegyezik, továbbá igazi mérték, azaz a Lebesgue mérhető halmazok σ algebráján σ additív. A nyílt és zárt halmazok Lebesgue mérhetőek, a nem üres nyílt halmazokon szigorúan pozitív, azaz nem üres, nyílt halmaz Lebesgue mértéke nem nulla. A mérhetőség fogalma invariáns a lineáris transzformációkra nézve, maga az érték az egybevágóságokra nézve invariáns, speciálisan *eltolás invariáns mérték*.

A Lebesgue integrál fogalom kialakítása során először definiáljuk a függvény integrálhatóságának fogalmát. Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Lebesgue értelemben mérhető, ha a zárt intervallumok ősképei Lebesgue mérhetőek.

A Lebesgue mérhető függvények Lebesgue integrálját a következőképpen jelöljük:

$$\int_E f d\lambda = \int_E f(x) \lambda(dx).$$

A definíció első lépéseként tekintsük a karakterisztikus függvényeket. Definíció szerint az S mérhető halmaz pontjai felett ennek értéke 1 máshol nulla. Az egyetlen értelmes választás az, ha a tartójuk (ahol nem nullák) Lebesgue mértékét rendeljük ezek integráljaként:

$$\int 1_S d\lambda = \lambda(S).$$

Ha egy függvény véges lineáris kombinációja karakterisztikus függvényeknek, akkor lépcsős függvénynek nevezzük. Ekkor az alakja

$$\sum_k a_k 1_{S_k},$$

ahol az a_k együtthatók valós számok, a halmazok pedig Lebesgue mérhetőek. Legyenek először az együtthatók nem negatívak, ekkor definiálhatjuk az

$$\int \left(\sum_k a_k 1_{S_k} \right) d\lambda = \sum_k a_k \int 1_{S_k} d\lambda = \sum_k a_k \lambda(S_k).$$

formulával az integrált. A végeredmény lehet végtelen, továbbá tegyük fel, hogy nulla szorozva végtelennel az nulla. Áttérve az általános esetre az $\infty - \infty$ definiálatlan eset elkerüléséhez tegyük fel először, hogy

$$f = \sum_k a_k 1_{S_k},$$

ahol $a_k = 0$ ha $\lambda(S_k) = \infty$. Ekkor az előző formula érvényben maradhat és a kapott érték nem függ a függvény karakterisztikus függvényekkel való előállításától.

Ha B tetszőleges mérhető részhalmaza a térnek és s mostmár általános együtthatókkal rendelkező lépcsős függvény, akkor

$$\int_B s d\mu = \int 1_B s d\lambda = \sum_k a_k \lambda(S_k \cap B).$$

Legyen f most a tér tetszőleges nem-negatív mérhető függvénye. Ekkor definiáljuk az integrált a

$$\int_E f \, d\lambda = \sup \left\{ \int_E s \, d\lambda : 0 \leq s \leq f, \, s \text{ lépcsős függvény} \right\}$$

formulával. Könnyen látható, hogy lépcsős függvényekre ez a definíció megegyezik a korábbival. Látható továbbá, hogy ha egy függvény Riemann integrálható akkor ezen értelemben is és a két számérték megegyezik egymással.

Legyen most f tetszőleges függvény. Ezt mindig felírhatjuk két nem-negatív függvény különbségeként:

$$f = f^+ - f^-,$$

ahol

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } f(x) > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{if } f(x) < 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Világos, hogy

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Ha

$$\int |f| \, d\lambda < \infty,$$

akkor f -t integrálhatónak nevezzük. Ebben az esetben, mindkét integrálra szintén teljesül, hogy

$$\int f^+ \, d\lambda < \infty, \quad \int f^- \, d\lambda < \infty,$$

és definiálhatjuk az integrált különbségeként:

$$\int f \, d\lambda = \int f^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda.$$

A két integrálfogalom összevetéséhez próbáljuk meghatározni egy rózse kupac térfogatát, ahol a gallyakat az egyik végükkel a földre állítottuk. A Riemann integrál használatakor a gallyak térfogatát egyenként meghatározzuk majd a kapott értékeket összeadjuk, ha Lebesgue módján számolunk az egyenlő hosszú gallyakat gondolatban egy kupacba gyűjtve számoljuk az együttes térfogatukat, majd az így kapott számokat adjuk össze.

6.5. Hiperbolikus térfogat

Nyilvánvaló, hogy az I. és II.-ben kifejtett értelemben minden térbeli feladat az analízis újabb, kellő határok között igen elismerésre méltó módszerével tárgyalható.

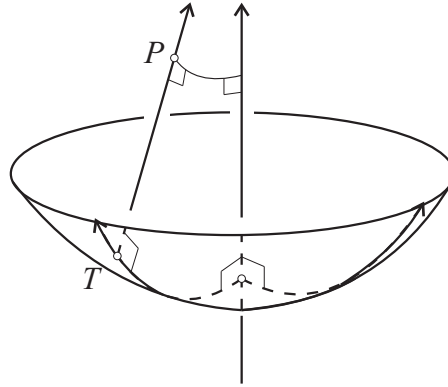
Bolyai J.: Appendix

A hiperbolikus térfogat fogalmának szintetikus felépítése komoly nehézségeket rejt magában. Ennek egyik - kisebb - oka, hogy Cavalieri elv híján a legkézenfekvőbb összehasonlításokat sem tudjuk megtenni. A fontosabb probléma, hogy habár a konvex poliédereken keresztül a poliéder fogalma az euklidészi felépítéssel analóg módon kapható, hovatovább, tetszőleges poliéder alkalmas tetraéderek diszjunkt uniójára bomlik, mégsem tudjuk a konkrét értékeket könnyen meghatározni, mert a tetraéder térfogatát kifejező integrál primitív függvénye elemi függvényekkel nem kifejezhető, ez a *Lobacsevszkij integrál*. A probléma gyökere a hiperbolikus tér szerkezetében rejlik, a tér legkézenfekvőbb módon definiált alakzatai ugyanis a szakasz, háromszög, tetraéder, ... ugyanúgy, ahogy az euklidészi térben, azonban a hiperbolikus tér lakója számára NEM ezek a könnyen mérhető alakzatok, nincs lehetőség a hosszak átskálázására, (az egység hosszú oldalakkal rendelkező szabályos háromszög végzetesen különbözik a kettő hosszú oldalakkal rendelkezőtől, a területük közötti kapcsolat nem egyszerű...), tetraéder síkmetszetei között semmilyen síksor elemeire vonatkoztatva sem találunk geometriai vagy területre vonatkozó általános kapcsolatot, azon mértani hely feladatok megoldása, melynek végeredménye az euklidészi síkban egyenes vagy sík, rendre valamely másik ciklus, stb ... Ezen problémákat többféle módon meg lehet kerülni, de mindaddig, míg érdeklődési körünk a poliéderek térfogatának meghatározása, nehézségekbe fogunk ütközni. Nem jelenthetjük azt sem ki, hogy építsünk hiperbolikus szemlélethez, jobban illeszkedő hiperbolikus testelméletet, mert akkor a legkézenfekvőbb alakzatok fogalmát kell újra alkotni.

Bolyai, Lobacsevszkij és követőik nyomán haladva a hiperbolikus (szférikus) térfogat szintetikus felépítésének gondolatát most elvetjük, a térfogat fogalmat analitikusan vezetjük be. Az elv a következő, koordinátarendszert definiálunk terünkben, a vizsgálandó alakzatokat a hozzátartozó pontok koordinátáira vonatkozó egyenlőtlenségekkel adjuk meg, így a térfogat meghatározásának kérdése az R^n egy alkalmas tartományán való integrálását jelent egy alkalmas függvénynek, melyet *térfogatelemnek* is nevezhetünk. A térfogatelem természetesen adódik a választott koordinátarendszer ismeretében. Másik (esetleg modellben értelmezett) koordinátarendszerre áttérve a térfogat elem és az alakzat koordinátáit leíró egyenlőtlenségek megváltoznak, így különböző feladatokhoz különböző koordináta rendszert választva annak

számítási részét jelentősen egyszerűsíthetjük.

6.5.1. Paraciklus koordinátarendszer



6.9. ábra. Paraciklus kordinátarendszer.

Az n -dimenziós hiperbolikus tér pontjait koordinátázhatjuk egy olyan koordinátarendszerre vonatkozólag, melynek első $n - 1$ koordinátája euklideszi derékszögű koordinátarendszerre vonatkozik a következőképpen. Tekintsünk egy $n - 1$ -dimenziós paraszféra felületet a meghatározó sugársorával együtt. A sugársor valamelyik elemét válasszuk az utolsó koordináta tengelynek, ennek a felülettel való metszetét nevezzük ki origónak, és az első $n - 1$ -koordináta tengely legyen a paraszféra felület egy merőleges paraciklusokból álló origó középpontú Descartes féle koordinátarendszere. (Ne feledjük, hogy a paraszféra geometriája Euklidészi geometria.) A P pont koordinátáit határozzuk meg a következő módon: Az utolsó koordináta ξ_n jelölje a P pontnak a sugársor eleme mentén a paraszférától mért előjeles távolsága, A távolságot meghatározó szakasz T talppontjának a paraszférán mért euklidészi koordinátái legyenek a pont első koordinátái. A kapott szám n -es legyen

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

A párhuzamos paraciklus ívek hosszának aránya csak távolságuk függvénye, pontosabban ha s_1, s_2 párhuzamos egyenes pár közé írt paraciklus ívek a sugarak mentén egymástól x távolságra vannak, akkor hosszuk aránya $e^{-\frac{x}{k}}$,

ahogy ezt Bolyai János kimutatta¹ Itt k a térre jellemző konstans és k tart végtelen esetén a két ív egyenlő hosszúságú. Ennek megfelelően a paraméter tartományban, (amely egy n -dimenziós euklidészi térrel izomorf) a P pontnak megfelel egy olyan p pont, amely közöséges derékszögű koordinátái:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\xi_n}{k}} \xi_1 \\ e^{-\frac{\xi_n}{k}} \xi_2 \\ \vdots \\ e^{-\frac{\xi_n}{k}} \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Definiáljuk, most a D Jordan mérhető tartomány hiperbolikus térfogatát, mint egy v_n konstans függvény Riemann integrálját a D^* tartomány felett, ahol D^* a D tartomány képe a fenti kölcsönösen egyértelmű folytonosan differenciálható helyettesítés mellett. A konstans értékét utólag választjuk úgy, hogy formuláink egyszerű alakot öltsenek. Azaz legyen

$$v(D) := \int_{D^*} v_n dx_1 \cdots dx_n.$$

A fenti helyettesítést elvégezve a

$$v(D) = v_n \int_D e^{-(n-1)\frac{\xi_n}{k}} d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

formulához jutunk.

Legyen $D = [0, a_1] \times \cdots \times [0, a_{n-1}]$ párhuzamos a_n hosszú szakaszok által definiált paraszféra tartomány. Ekkor

$$\begin{aligned} v(D) &= v_n \int_0^{a_1} \cdots \int_0^{a_n} e^{-(n-1)\frac{\xi_n}{k}} d\xi_n \cdots d\xi_1 = \frac{kv_n}{n-1} \left[-e^{-(n-1)\frac{a_n}{k}} + e^0 \right] \prod_{i=1}^{n-1} a_i = \\ &= \frac{kv_n}{n-1} [1 - e^{-(n-1)\frac{a_n}{k}}] \prod_{i=1}^{n-1} a_i. \end{aligned}$$

Ha a_n végtelenhez tart és $a_i = 1$ minden egyéb $i = 1 \cdots (n-1)$ indexre, akkor a térfogat

$$\frac{kv_n}{n-1}.$$

¹ Először igazolja, hogy az $s_2 = f(s_1, x)$ függvény az első változójában additív, másodszor, hogy teljesül a $cf(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$ vagy a vele ekvivalens $\ln c + \ln f(x_1) + \ln f(x_2) = \ln f(x_1 + x_2)$ egyenlőség. Ennek megoldása $f(x) = \frac{1}{c}e^{c_1x}$.

Bolyai és Lobacsevszkij gondolatmenetét követve úgy határozzuk meg v_n értékét, hogy minden rögzített k esetén egy vékony réteg térfogatát osztva a rétegvastagsággal, majd ezen vastagsággal a nullához tartva a mérőszám az eggyel kisebb dimenziós térfogat mérőszámához tartson. Számoljuk tehát a következő határértéket:

$$\lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{v(D)}{a_n} = \frac{kv_n}{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} a_i \lim_{a_n \rightarrow 0} \frac{[1 - e^{-(n-1)\frac{a_n}{k}}]}{a_n} = v_n \prod_{i=1}^{n-1} a_i,$$

aminek egyenlőnek kell lennie $v_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} a_i$ -val. Ebből az $1 = v_1 = v_2 = \dots = v_n$ értékek adódnak.

Világos továbbá, hogy ha n rögzített, és k végtelenhez tart akkor egy hiperbolikus test térfogata a megfelelő euklidészi test térfogatához konvergál. Vegyük még észre, hogy minden n számhoz van olyan k érték melyre a megfelelő hiperbolikus térben az egység térfogatú alapra épített paraszféra szektor térfogata 1, mutatván egy természetes egységtérfogatú n -dimenziós test létezését. Pontosabban ha $k = n - 1$, akkor az a paraszféra szektor melynek alapja $(n - 1)$ -dimenziós euklidészi kocka $n - 1$ -dimenziós 1 térfogattal szintén 1 térfogatú.

Elfogadva az egységválasztás általunk javasolt módját formulánk tehát paraciklus koordinátákban a következő:

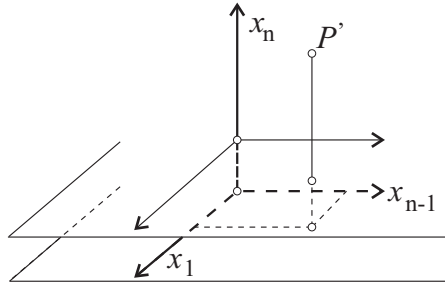
$$v(D) = \int_D e^{-(n-1)\xi_n/k} d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Azt, hogy a fenti formulával megadott definíció kielégíti a térfogat függvényre megszokott feltételeket, részben az integrál fogalom alap tulajdonságaiából következnek, részben pedig újabb számolásokkal igazolhatóak. A modell módszer erejét mutatja, hogy jelentősen egyszerűsíthetjük számításainkat ha modellhez igazított koordinátarendszerre átírjuk a kiindulási képletet. Ily módon fogjuk igazolni, hogy formulánk egybevágó alakzatokon ugyanazt az értéket veszi fel.

6.5.2. Térfogat a féltérmodellben

Tekintsünk egy Poincare-féle féltérmodellt. Ennek határoló hipersíkja legyen derékszögű koordinátarendszerünk első $n - 1$ koordinátájához rendelt $n - 1$ -dimenziós euklidészi tér. A hiperbolikus tér $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ paraciklus koordinátákkal rendelkező P pontjának feleltessük most meg a modell

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = \left(\xi_1, \xi_2, \dots, ke^{\frac{\xi_n}{k}} \right)^T$$



6.10. ábra. Koordinátarendszer a féltérmodellben.

koordinátákkal rendelkező P' pontját. (Ahogy azt a 6.10. ábrán láthatjuk, a kiindulási paraszférának az $x_n = k$ magasságban elhelyezkedő euklidészi sík lesz a képe.) A helyettesítést elvégezve, (mivel a Jacobi determináns abszolútértéke k/x_n), kapjuk, hogy

$$v(D) = k^n \int_{D'} \frac{1}{x_n^n} dx_1 \cdots dx_n,$$

ahol D' jelöli tartományunk modellbeli képét. Rögtön láthatjuk, hogy az alapsíkra merőleges síkra vonatkozó euklidészi tükrözésre invariáns a formulánk, hiszen ilyenkor nem változik az utolsó koordináta értéke. A hiperbolikus tér tetszőleges hipersíkjához választhatunk alkalmas olyan paraciklus koordinátarendszert, hogy a féltérmodellben az adott sík euklidészi síkként reprezentálódik, ezért erre síktükrözésre vonatkozóan ebben a modellben végrehajtott térfogatszámolásra a formulánk invariáns. Mivel tetszőleges egybevágóság síktükrözések szorzata térfogatunk invariáns az egybevágóságokra.

6.5.3. Derékszögű és gömbi koordinátarendszer

A paraciklus koordinátarendszerhez illesszünk egy derékszögű koordinátarendszert, ennek tengelyei legyenek a paraciklus vonalnak a közös kezdőpontban húzott érintői. Az utolsó koordináta tengelye a két koordinátarendszernek tehát közös. A P pont n -edik koordinátái a két koordinátarendszerre vonatkozólag azonban eltérnek egymástól. A derékszögű koordináták származtatásához tekintsük a pontnak az $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_n$ tengelyek hipersíkjától való távolságát, ez legyen a pont $n-1$ -edik koordinátája. A merőleges vetületnek tekintsük az első $n-3$ tengely és x_n által meghatározott $n-2$ dimenziós síktól való távolságát ez legyen az $n-2$ -edik koordináta, és így tovább, az első x_1 koordinátáig. Az n -edik koordináta legyen az utolsó vetületnek az x_n tengelyre való vetítése során kapott pont távolsága az origótól. Az eljárás során felhasználjuk a paraciklus ív és húrjának hossza közötti

kapcsolatot, valamint a középpontok távolságára vonatkozó formulát. Bolyai igazolta, hogy Az y sugarú kör kerülete a hiperbolikus síkon

$$\pi k \left(e^{\frac{y}{k}} - e^{-\frac{y}{k}} \right),$$

ahol k távolságra levő párhuzamos paraciklus ívek hosszának aránya éppen $K = e = 2,7182818 \dots$ ². Ez a kerület érték szintén Bolyai észrevétele alapján megegyezik azon s hosszú paraciklus ív által a paraszférán leírt kör kerületével, melynek kétszereséhez a $2y$ hosszú húr tartozik (lásd még 1.7.1. Tétel). Ennek az értéke:

$$2s\pi.$$

Vessük össze a két formulát, ekkor:

$$s = k \sinh \frac{y}{k}.$$

Ha most a paraciklusív és felezőpontján áthaladó tengely által meghatározott paraciklus koordinátarendszer képét nézzük a félsíkmodellben az ábrának megfelelően ívünk olyan vízszintes egyenesként reprezentálódik, melynek a félsíkmodell koordinátarendszerében az 1 második koordinátával rendelkező pontokat tartalmazza, a húr egyenese pedig az ábrának megfelelő r sugarú félkörként. Felírhatjuk tehát az

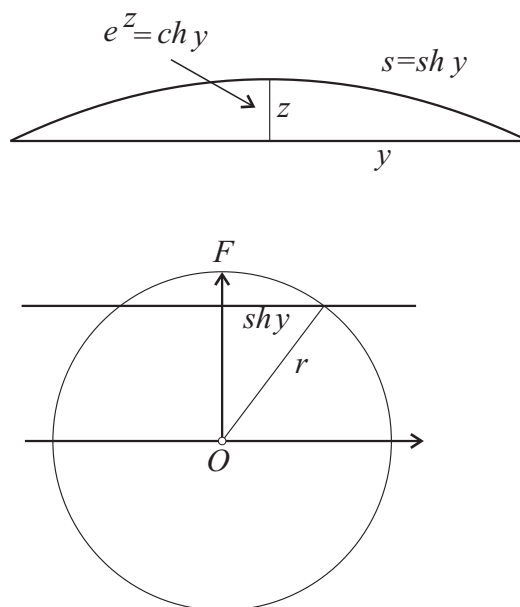
$$1 = \sqrt{e^{2\frac{z}{k}} - \left(\frac{1}{k} k \sinh \frac{y}{k} \right)^2},$$

összefüggést, hiszen most az $x_n = k$ paraszférán egyezik meg a model ívhossz a hiperbolikus ívhosszal. Innen

$$e^{\frac{z}{k}} = \sqrt{1 + \left(\sinh \frac{y}{k} \right)^2} = \cosh \frac{y}{k}$$

adódik. A derékszögű koordinátarendszerünk elhelyezése folytán az utolsó ξ_n paraciklus koordináta a P pontnak a paraszférától való távolsága. A P pont merőleges vetülete az említett $x_1, \dots, x_{n-2}, x_n$ hipersíkra legyen P_{n-1} . Az

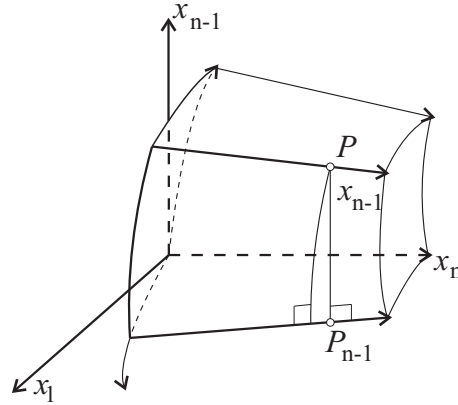
² Ha megőrizzük azt a tulajdonságot, hogy a sugár függvényében a kerület függvény a terület függvény deriváltja, a félsíkmodellben a következő számítás lehetséges: A paraciklus koordinátarendszer O közepű y sugarú köre a félsíkmodellben szintén kör melynek középpontja az y tengelyre esik. Az y tengelyre eső átmérő két végpontjának nem nulla koordinátái $ke^{\frac{y}{k}}$ illetve $ke^{-\frac{y}{k}}$. A képkör euklideszi területe megegyezik a hiperbolikus területtel így a hiperbolikus kerület is egyenlő az euklideszivel. Mivel a kör átmérőjének hossza $k(e^{\frac{y}{k}} - e^{-\frac{y}{k}})$ éppen az említett formulát kapjuk a közös értékre.

6.11. ábra. Paraciklusív és húrja ($k = 1$ eset)

előző megjegyzések szerint a P illetve P_{n-1} pontokon átmenő párhuzamos tengelyek két-dimenziós síkja a paraciklus tengelyek által meghatározott $n - 1$ -dimenziós paraszférából kimetszi azt az ξ_{n-1} tengellyel párhuzamos ívet, melyen reprezentálódik az $(n - 1)$ -dik paraciklus koordináta ξ_{n-1} . Használva a párhuzamos paraciklus ívek hosszának összehasonlítására és a húr-ív összehasonlításra vonatkozó formulákat, kapjuk, hogy

$$k \sinh \frac{x_{n-1}}{k} = e^{-\xi_n} \frac{\xi_{n-1}}{k} \text{ és } \xi_n + k \ln \left(\cosh \frac{x_{n-1}}{k} \right) = \xi_n^1,$$

ahol ξ_n^1 jelöli a P_{n-1} pont távolságát az x_{n-1} tengely elhagyásával kapott koordináta hipersík és a referencia paraszféra metszetétől. Mostmár a következő koordináta meghatározásához ezen hipersíkban hasonlóképpen járunk el a P pont helyett, annak merőleges vetületét P_{n-1} -et használva. A paraciklus koordináták és a derékszögű koordináták közötti összefüggések figyelembe



6.12. ábra. Derékszögű koordinátákra áttérés

vételével, az

$$\begin{aligned}
 \xi_{n-1} &= e^{\frac{\xi_n}{k}} k \sinh \frac{x_{n-1}}{k} \\
 \xi_{n-2} &= e^{\frac{\xi_n}{k} + \ln \cosh \frac{x_{n-1}}{k}} k \sinh \frac{x_{n-2}}{k} \\
 &\vdots \\
 \xi_1 &= e^{\frac{\xi_n}{k} + \ln \cosh \frac{x_{n-1}}{k} + \dots + \ln \cosh \frac{x_2}{k}} k \sinh \frac{x_1}{k} \\
 x_n &= \xi_n + k \ln \cosh \frac{x_{n-1}}{k} + \dots + k \ln \cosh \frac{x_2}{k} + k \ln \cosh \frac{x_1}{k}.
 \end{aligned}$$

egyenletrendszer adódik.

Ezt az n -dimenziós valós paramétertartományba transzformálva a helyettesítés egyenletrendszere:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= k \cosh \frac{x_2}{k} \dots \cosh \frac{x_{n-1}}{k} \sinh \frac{x_1}{k} \\
 &\vdots \\
 u_{n-1} &= k \sinh \frac{x_{n-1}}{k} \\
 u_n &= x_n - k \ln \cosh \frac{x_1}{k} - \dots - k \ln \cosh \frac{x_{n-1}}{k}
 \end{aligned}$$

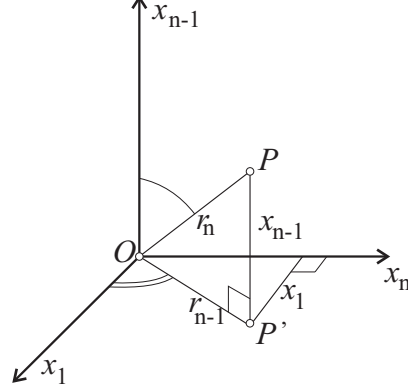
ezért a Jacobi mátrix determinánsának abszolút értéke

$$\left(\cosh \frac{x_1}{k} \right) \left(\cosh \frac{x_2}{k} \right)^2 \dots \left(\cosh \frac{x_{n-1}}{k} \right)^{n-1},$$

Derékszögű koordinátákra vonatkozólag a térfogat tehát az

$$v(D) = \int_D \left(\cosh \frac{x_{n-1}}{k} \right)^{n-1} \dots \left(\cosh \frac{x_2}{k} \right)^2 \left(\cosh \frac{x_1}{k} \right) dx_1 \dots dx_n.$$

formulával adható meg.



6.13. ábra. Gömbi koordináták

Gömbi koordinátákban való kifejezéshez tegyük fel, hogy a pontok derékszögű koordinátái adottak valamely $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinátarendszerre vonatkozólag. Jelölje a P pontnak az origótól való távolságát r_n . Ekkor a hiperbolikus Pitagorasz tétel alapján:

$$\cosh \frac{x_1}{k} \cosh \frac{x_2}{k} \cdots \cosh \frac{x_n}{k} = \cosh \frac{r_n}{k}$$

áll fenn ahol x_i a derékszögű koordinátákat is jelöli. Legyen $i = n-1, \dots, 1$ és jelölje ϕ_i az i -edik koordinátatengelynek a P $n-i-1$ -edik vetülete és O által meghatározott szakasszal bezárt szögét; r_{i+1} pedig ezen szakasz hosszát. Ekkor

$$\sinh \frac{x_{n-1}}{k} = \sinh \frac{r_n}{k} \cos \phi_{n-1}$$

adódik a hiperbolikus szinusz tételnek megfelelően. Hasonlóképpen

$$\cos \phi_{n-2} = \frac{\sinh \frac{x_{n-2}}{k}}{\sinh \frac{r_{n-1}}{k}}$$

amiből az OPP'_Δ háromszögre vonatkozó Pitagorasz tétel alapján

$$\begin{aligned} \sinh \frac{r_{n-1}}{k} &= \sqrt{-1 + \frac{(\cosh \frac{r_n}{k})^2}{(\cosh \frac{x_{n-1}}{k})^2}} = \frac{\sqrt{(\cosh \frac{r_n}{k})^2 - (\cosh \frac{x_{n-1}}{k})^2}}{\cosh \frac{x_{n-1}}{k}} = \\ &= \frac{\sqrt{(\sinh \frac{r_n}{k})^2 + 1 - (1 + \sinh \frac{x_{n-1}}{k})^2}}{\cosh \frac{x_{n-1}}{k}} = \frac{\sqrt{(\sinh \frac{r_n}{k})^2 (1 - (\cos \phi_{n-1})^2)}}{\cosh \frac{x_{n-1}}{k}} \end{aligned}$$

adódik, ahonnan kapjuk, hogy

$$\cosh \frac{x_{n-1}}{k} \sinh \frac{x_{n-2}}{k} = \sinh \frac{r_n}{k} \sin \phi_{n-1} \cos \phi_{n-2}.$$

Az általános formula így

$$\cosh \frac{x_{n-1}}{k} \cdots \cosh \frac{x_{n-i+1}}{k} \sinh \frac{x_{n-i}}{k} = \sinh \frac{r_n}{k} \sin \phi_{n-1} \cdots \sin \phi_{n-i+1} \cos \phi_{n-i}.$$

Az i maximális értékének $(n-1)$ -et választhatjuk így utolsó egyenletünk:

$$\cosh \frac{x_{n-1}}{k} \cdots \cosh \frac{x_2}{k} \sinh \frac{x_1}{k} = \sinh \frac{r_n}{k} \sin \phi_{n-1} \cdots \sin \phi_2 \cos \phi_1.$$

Meg is van a két paraméter rendszert összekötő egyenletrendszer, amelynek első (a Pitagorasz tételt leíró) egyenletét helyettesíthetjük egy az előző számításainkhoz jobban illeszkedő:

$$v_n = \cosh \frac{x_{n-1}}{k} \cdots \cosh \frac{x_2}{k} \cosh \frac{x_1}{k} \sinh \frac{x_n}{k} = \sinh \frac{r_n}{k} \sin \phi_{n-1} \cdots \sin \phi_2 \sin \phi_1.$$

egyenlettel. A két egyenletrendszer ekvivalenciáját könnyen beláthatjuk, ha az új egyenletek négyzetösszegét tekintjük. A baloldalon ekkor $\sinh^2 \frac{r_n}{k}$ adódik. Mindkét oldalhoz 1-t adva a jobboldalon álló összeg a

$$\left(\cosh \frac{x_{n-1}}{k} \cdots \cosh \frac{x_2}{k} \cosh \frac{x_1}{k} \cosh \frac{x_n}{k} \right)^2$$

szorzattá egyszerűsödik, olyan egyenlőséghez vezetve, amely éppen a Pitagorasz tétel általános alakja. Új egyenletrendszerünk első $n-1$ egyenletének baloldalán felismerhetjük az $u_1, \dots, u_{n-1}$ paramétereket az utolsó kifejezés azonban nem u_n , jelöljük v_n -el. Helyettesítsük

$$u_n = -\ln \left(-v_n + \cosh \frac{r_n}{k} \right) = -\ln \left(-v_n + \sqrt{u_1^2 + \cdots u_{n-1}^2 + v_n^2 + 1} \right)$$

értékkel v_n -t. Ekkor a két helyettesítés kompozíciója a már használt

$$u_1, \dots, u_n$$

paraméterekbe viszi eredeti gömbi paramétereinket és az integrál transzformálódásának szabályai szerint a két transzformáció deriváltmátrixainak szorzata a Jacobi mátrix. A determinánsok szorzásának alaptétele szerint a két determináns szorzataként számolhatjuk a Jacobi determinánst. Az első determináns az euklideszi gömbi koordinátákra áttérés transzformáció determinánsa ha az r_n paramétert az $r = k \sinh \frac{r_n}{k}$ -el helyettesítjük, így ismert értéke:

$$\cosh \frac{r_n}{k} \left(k \sinh \frac{r_n}{k} \right)^{n-1} \sin^{n-2} \phi_{n-1} \cdots \sin \phi_2.$$

A második mátrix első $n - 1$ sora az egységmátrixéval egyezik meg utolsó sorában így csak az utolsó elemre van szükségünk. Ez az

$$-\ln \left(-v_n + \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 + v_n^2 + 1} \right)$$

függvény v_n szerinti deriváltja:

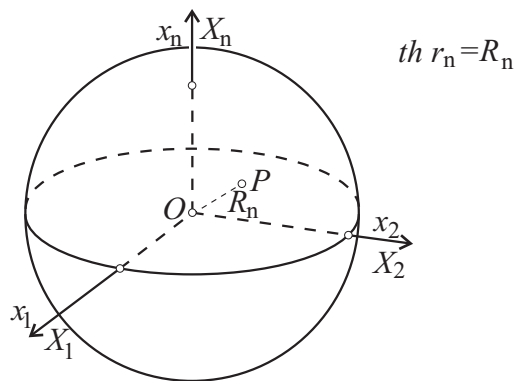
$$\begin{aligned} -\frac{1}{-v_n + \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 + v_n^2 + 1}} \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{2v_n}{\sqrt{u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2 + v_n^2 + 1}} \right) = \\ = \frac{1}{\cosh \frac{r_n}{k}}. \end{aligned}$$

A gömbi koordinátákban való térfogatszámolás képlete tehát:

$$v(D) = k^{n-1} \int_D \left(\sinh \frac{r_n}{k} \right)^{n-1} \sin^{n-2} \phi_{n-1} \cdots \sin \phi_2 d\phi_1 \cdots d\phi_{n-1} dr_n.$$

6.5.4. Térfogat a Cayley-Klein modellben

Az n -dimenziós Cayley-Klein modell egy k sugarú gömb. Ennek középpontjában helyezzünk el egy derékszögű koordinátarendszert. Ez a koordinátarendszer nem csak a modellben a beágyazó euklidészi térben is derékszögű. Egy P



6.14. ábra. Koordináták a Cayley-Klein modellben

modellbeli pont O -tól való hiperbolikus térbeli távolsága és modelltávolsága a tangens hiperbolikus függvény szerint kapcsolódik, hiszen

$$\frac{r}{k} = \frac{1}{2} \ln(0, P, U, V) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\frac{R}{k} - 1} : \frac{-1}{1 + \frac{R}{k}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{R}{k}}{1 - \frac{R}{k}} \right) = \operatorname{areath} \frac{R}{k},$$

ahol r illetve R a hiperbolikus illetve euklidészi távolsága az O, P pontpárnak. Mivel a modell középpontján keresztül haladó egyenesek modellbeli és hiperbolikus térbeli hajlásszöge megegyezik a hiperbolikus gömbi koordinátákról $(r_n, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ -ről) euklidészi gömbi koordinátákra $(R_n, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ -re) áttérve a következő egyenleteket kapjuk:

$$r_n = k \operatorname{areath} \frac{R_n}{k}$$

illetve

$$\phi_i = \theta_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

mely Jacobi determinánsa:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{R_n}{k}\right)^2}.$$

Mivel

$$\left(\sinh \frac{r_n}{k}\right)^{n-1} = \left(\sinh \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{R_n}{k}}{1 - \frac{R_n}{k}}\right)\right)^{n-1} = \left(\frac{\frac{R_n}{k}}{\sqrt{1 - \left(\frac{R_n}{k}\right)^2}}\right)^{n-1}$$

ezért a modell D tartományának térfogata euklidészi gömbi koordinátákban:

$$v(D) = \int_D \frac{R_n^{n-1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{R_n}{k}\right)^2}^{n+1}} \sin^{n-2} \theta_{n-1} \cdots \sin \theta_2 d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1} dR_n.$$

A közönséges gömbi koordinátákról visszatérve ugyanezen egyenesek által meghatározott közönséges merőleges koordinátákra $(X_1, \dots, X_n$ -re) a térfogatra a következő formula adódik:

$$v(D) = \int_D \frac{1}{\left(1 - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{k}\right)^2\right)\right)^{\frac{n+1}{2}}} dX_1 \cdots dX_{n-1} dX_n.$$

6.5.5. Konkrét térfogatok

Gömb

Gömbi koordinátákban számolva:

$$v(D) = k^2 \int_0^r \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\sinh \frac{r_3}{k} \right)^2 \sin \phi_2 d\phi_1 \right) d\phi_2 \right) dr_3 =$$

$$\begin{aligned}
&= 2k^2\pi \left(\int_0^r \frac{\cosh 2\frac{r_3}{k} - 1}{2} dr_3 \right) \left(\int_0^\pi \sin \phi_2 d\phi_2 \right) = \\
&= 2k^2\pi \left(\frac{\sinh \frac{2r}{k}}{2} k - r \right) = 2k^3\pi \cosh \frac{r}{k} \sinh \frac{r}{k} - 2k^2\pi r.
\end{aligned}$$

Hordó

Adott egy szakasz és egy hiperciklus íve, amit megforgatunk körülötte. A szakasz végpontjaiban a szakaszra állított merőleges síkok közötti a megforgatott hiperciklus ív által határolt térrészt hordónak nevezzük. A hordó térfogatát a féltérmodellben számoljuk. A z tengelyen adott a mérés, mert a hiperbolikus tér p hosszú OP szakaszának a hosszát a modellben a $-I = (0,0,0)$, $O = (0,0,k)$, $P = (0,0,ke^{\frac{p}{k}})$, $+I = (0,0,\infty)$ pontnégyes kettősvisszonya logaritmusának valamely konstansszorosával kell kifejeznünk. Azaz

$$p = c \ln(O, P, +I, -I) = c \ln \left(\frac{ke^{\frac{p}{k}}}{k} \right)$$

alapján $c = k$.

$$v(D) = k^3 \int_{D'} \frac{1}{z^3} dx dy dz,$$

ahol a D' tartományt a $z \geq 0$, $k^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq k^2 e^{\frac{2p}{k}}$, $0 \leq x^2 + y^2 \leq (\cos^2 t) z^2$ egyenlőtlenségek határozzák meg, ahol p a szakasz hossza, t jelöli a modellben egyenesként ábrázolt hiperciklusának a z tengellyel bezárt szögét és így

$$\tau = k \ln \frac{1 + \sin t}{\cos t}$$

a távolságvonal pontjainak a szakasz egyenesétől mért távolságát. Az euklideszi gömbi koordinátákra áttéréshez, legyen $x = r \cos \phi \sin \theta$, $y = r \sin \phi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$. Ekkor tartományunk pontjainak koordinátái az $k \leq r \leq ke^{\frac{p}{k}}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq t$ egyenleteket elégítik ki. Mivel a Jacobi determináns $r^2 \sin \theta$, ezért

$$\begin{aligned}
v(D) &= k^3 \int_{\theta=0}^t \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=k}^{ke^{\frac{p}{k}}} r^2 \sin \theta \left(\frac{1}{r \cos \theta} \right)^3 dr d\phi d\theta = 2k^3\pi \int_{\theta=0}^t \int_{r=k}^{ke^{\frac{p}{k}}} \frac{1}{r \cos^3 \theta} d\theta dr = \\
&= 2k^3\pi \int_{\theta=0}^t \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta \int_{r=k}^{ke^{\frac{p}{k}}} \frac{1}{r} dr = 2k^3\pi \left[\frac{1}{2 \cos^2 \theta} \right]_0^t \cdot \frac{p}{k} = \pi k^2 p \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Fejezzük most ki τ -val a végeredményt.

$$\frac{1 + \sin t}{\cos t} = e^{\frac{\tau}{k}}$$

összefüggésből

$$\frac{1 - \sin t}{\cos t} = e^{-\frac{\tau}{k}}$$

adódik, így

$$\left(\frac{1}{\cos t}\right)^2 = \left(\frac{e^{\frac{\tau}{k}} + e^{-\frac{\tau}{k}}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{\frac{\tau}{k}} + e^{-\frac{\tau}{k}})^2}{4}.$$

Azaz a térfogat:

$$v(D) = \frac{1}{4}\pi k^2 p (e^{\frac{\tau}{k}} - e^{-\frac{\tau}{k}})^2 = 2\pi k^2 p \left(\sinh \frac{\tau}{k}\right)^2.$$

Henger

Tekintsünk egy síkbeli t területű T tartományt, aminek pontjaiban állított merőlegesekre felmértünk m hosszúságú szakaszokat ugyanabban a feltételben. A kapott szakaszok összességét T alapú m magasságú hengernek nevezzük. A térfogatának meghatározásához használjuk a merőleges koordinátákra vonatkozó formulát, ahol az x, z tengelyek síkja a T síkjával egyezik meg.

$$\begin{aligned} v(D) &= \int_D (\cosh \frac{y}{k})^2 (\cosh \frac{x}{k}) dz dx dy = \left(\int_T \operatorname{ch} \frac{x}{k} dz dx \right) \left(\int_0^m (\cosh \frac{y}{k})^2 dy \right) = \\ &= T \left(\frac{k \sinh \frac{2m}{k}}{4} + \frac{m}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(Tk \sinh \frac{m}{k} \cosh \frac{m}{k} + Tm \right). \end{aligned}$$

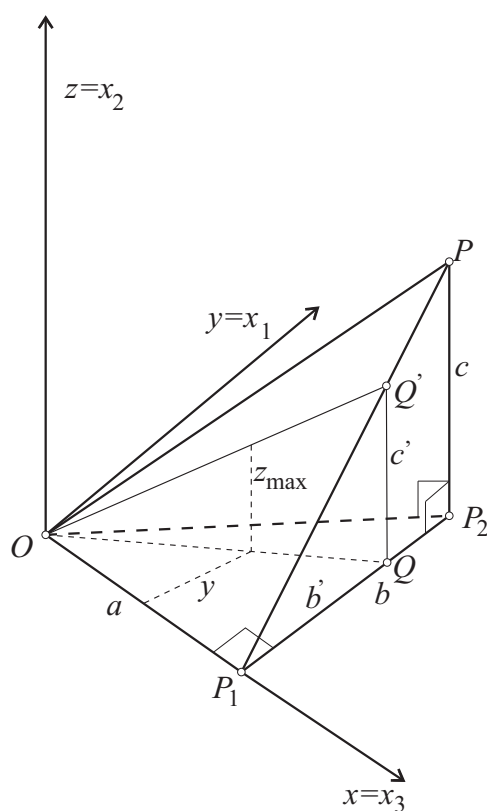
Orthoszkém

Az orthoszkém egy speciális tetraéder, aminek csúcsait egy pont valamely derékszögű koordinátarendszer különböző dimenziós altereire vonatkozó sorozatos merőleges vetületei adják. Pontosabban vetítsük P -t az $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ koordinátatengelyek hipersíkjára, majd a kapott pontot az $\{x_1, \dots, x_{n-2}\}$ tengelyek $n-2$ -dimenziós síkjára, stb. Az utolsó vetület az origó, és az így kapott $P_n, P_{n-1}, \dots, P_0 = O$ pontok konvex burka az orthoszkém. A háromdimenziós hiperbolikus esetben három adat egybevágóság erejéig egyértelműen meghatározza, ez lehet három él hossza vagy a három nem derékszög lapszög.

A térfogatot a $k = 1$ paraméterválasztás mellett, derékszögű koordinátákra vonatkozó formulával kifejezve a

$$v(D) = \int_D (\cosh z)^2 (\cosh y) dz dx dy = \int_0^a \int_0^{\phi(x)} \int_0^{\psi(x,y)} (\cosh z)^2 (\cosh y) dz dy dx,$$

integrálhoz jutunk, ahol $\phi(x)$ illetve $\psi(x, y)$ függvényeket a következőképpen tudjuk meghatározni.



6.15. ábra. Az orthoszkém derékszögű koordinátázása

Az első két koordináta síkjában található $\triangle_{OP_2P_1}$ derékszögű háromszögben az P_2OP_1 szög tangensére:

$$\tan P_2OP_1 \angle = \frac{\tanh b}{\sinh a} = \frac{\tanh y_1}{\sinh x}.$$

Azaz

$$\tanh y_{\max} = \frac{\tanh b}{\sinh a} \sinh x,$$

ezért

$$0 \leq y \leq \phi(x) \leq \tanh^{-1} \left(\frac{\tanh b}{\sinh a} \sinh x \right) =: \lambda.$$

Tekintsük most a $\triangle_{P_1 P_2 P_3}$ derékszögű háromszöget. Ebből az $O(x, y, 0)$ egyenes azon Q pontot metszi ki melyre $|\overline{P_1 Q}| = b'$. Így a

$$\tanh c' = \frac{\tanh c}{\sinh b} \sinh b',$$

egyenlőséghez jutunk. Az előző háromszögben felírt

$$\tanh b' = \frac{\tanh y}{\sinh x} \sinh a,$$

egyenlőséget is figyelembe véve, a $\triangle_{OQQ'}$ háromszögből,

$$\begin{aligned} \tanh z_{\max} &= \tanh c' \frac{\sinh (\cosh^{-1}(\cosh x \cosh y))}{\sinh (\cosh^{-1}(\cosh a \cosh b'))} = \\ &= \frac{\tanh c}{\sinh b} \sinh b' \frac{\sqrt{\cosh^2 x \cosh^2 y - 1}}{\sqrt{\cosh^2 a \cosh^2 b' - 1}} = \\ &= \frac{\tanh c}{\sinh b} \sinh b' \frac{\sqrt{\sinh^2 y + \sinh^2 x \cosh^2 y}}{\sqrt{\sinh^2 b' + \sinh^2 a \cosh^2 b'}} = \\ &= \frac{\tanh c}{\sinh b} \sinh y \frac{\sqrt{1 + \sinh^2 x \coth^2 y}}{\sqrt{1 + \sinh^2 a + \coth^2 b'}} = \frac{\tanh c}{\sinh b} \sinh y. \end{aligned}$$

Így

$$0 \leq z \leq \psi(x, y) = \tanh^{-1} \left(\frac{\tanh c}{\sinh b} \sinh y \right) =: \nu$$

feltétel teljesül a harmadik koordinátára az első kettő rögzítése után. A térfogat tehát

$$\begin{aligned} v(D) &= \int_0^a \int_0^\lambda \int_0^\nu (\cosh z)^2 (\cosh y) dz dy dx = \\ &= \int_0^a \int_0^\lambda \frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{2} (\sinh 2z) \right]_0^\nu (\cosh y) dy dx. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\nu = \frac{1}{2} \ln \frac{\sinh b + \tanh c \sinh y}{\sinh b - \tanh c \sinh y},$$

Kapjuk, hogy

$$v(D) = \frac{1}{4} \left\{ \int_0^a \left(\int_0^\lambda \ln \frac{\sinh b + \tanh c \sinh y}{\sinh b - \tanh c \sinh y} \cosh y dy + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^\lambda \sinh \left(\ln \frac{\sinh b + \tanh c \sinh y}{\sinh b - \tanh c \sinh y} \right) \cosh y dy \right) dx \right\}.$$

A második y szerinti integrál meghatározásához használjuk a $\sinh x$ függvény definícióját. Ekkor

$$\begin{aligned} & \int_0^\lambda \sinh \left(\ln \frac{\sinh b + \tanh c \sinh y}{\sinh b - \tanh c \sinh y} \right) \cosh y dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\lambda \left(\frac{\sinh b + \tanh c \sinh y}{\sinh b - \tanh c \sinh y} - \frac{\sinh b - \tanh c \sinh y}{\sinh b + \tanh c \sinh y} \right) \cosh y dy = \\ &= 2 \int_0^\lambda \frac{\sinh y \cosh y}{\frac{\sinh b}{\tanh c} - \frac{\tanh c}{\sinh b} \sinh^2 y} dy = \\ &= 2 \int_0^\lambda \frac{\sinh 2y}{2 \frac{\sinh b}{\tanh c} - \frac{\tanh c}{\sinh b} \cosh 2y + \frac{\tanh c}{\sinh b}} dy = \\ &= -\frac{\sinh b}{\tanh c} \left[\ln \left(2 \frac{\sinh b}{\tanh c} - \frac{\tanh c}{\sinh b} \cosh 2y + \frac{\tanh c}{\sinh b} \right) \right]_0^\lambda = \\ &= -\frac{\sinh b}{\tanh c} \ln \left(2 \frac{\sinh b}{\tanh c} - \frac{\tanh c}{\sinh b} \cosh 2\lambda + \frac{\tanh c}{\sinh b} \right) + \frac{\sinh b}{\tanh c} \ln \left(2 \frac{\sinh b}{\tanh c} \right). \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\cosh 2\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh a + \tanh b \sinh x}{\sinh a - \tanh b \sinh x} + \frac{\sinh a - \tanh b \sinh x}{\sinh a + \tanh b \sinh x} \right),$$

az integrál értéke:

$$-\frac{\sinh b}{\tanh c} \ln \left(1 - \frac{\tanh^2 c \sinh^2 x}{\cosh^2 b (\sinh^2 a - \tanh^2 b \sinh^2 x)} \right).$$

Az első részt parciálisan integrálva kapjuk:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\lambda \ln \frac{\sinh b + \tanh c \sinh y}{\sinh b - \tanh c \sinh y} \cosh y dy = \\
 & = \left\{ \left[\ln \frac{\sinh b + \tanh c \sinh y}{\sinh b - \tanh c \sinh y} \sinh \lambda \right]_0^\lambda - \right. \\
 & \left. - \int_0^\lambda \frac{\tanh c [(\sinh b - \tanh c \sinh y) + (\sinh b + \tanh c \sinh y)]}{\sinh^2 b - \tanh^2 c \sinh^2 y} \sinh y dy \right\} = \\
 & = \left\{ \sinh \lambda \ln \frac{\sinh b + \tanh c \sinh \lambda}{\sinh b - \tanh c \sinh \lambda} - \right. \\
 & \left. - \int_0^\lambda \frac{2 \tanh c \sinh b \cosh y \sinh y}{\sinh^2 b - \tanh^2 c \cosh^2 y + \tanh^2 c} dy \right\} = \\
 & = \left\{ \sinh \lambda \ln \frac{\sinh b + \tanh c \sinh \lambda}{\sinh b - \tanh c \sinh \lambda} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sinh b}{\tanh c} [\ln(\sinh^2 b - \tanh^2 c \cosh^2 y + \tanh^2 c)]_0^\lambda \right\} = \\
 & = \left\{ \sinh \lambda \ln \frac{\sinh b + \tanh c \sinh \lambda}{\sinh b - \tanh c \sinh \lambda} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sinh b}{\tanh c} (\ln(\sinh^2 b - \tanh^2 c \sinh^2 \lambda) - \ln(\sinh^2 b)) \right\}.
 \end{aligned}$$

Mivel

$$\sinh^2 \lambda = \frac{\tanh^2 b \sinh^2 x}{\sinh^2 a - \tanh^2 b \sinh^2 x},$$

az első integrál az

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \sinh \lambda \ln \frac{\sinh b + \tanh c \sinh \lambda}{\sinh b - \tanh c \sinh \lambda} + \right. \\
 & \left. + \frac{\sinh b}{\tanh c} \left(\ln \left(\sinh^2 b \left(1 - \frac{\tanh^2 c \sinh^2 x}{\cosh^2 b (\sinh^2 a - \tanh^2 b \sinh^2 x)} \right) \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \ln(\sinh^2 b) \right) \right\},
 \end{aligned}$$

összegegyezik meg. A két rész összege tehát:

$$\sinh \lambda \ln \frac{\sinh b + \tanh c \sinh \lambda}{\sinh b - \tanh c \sinh \lambda}.$$

A $\lambda = \tanh^{-1} \left(\frac{\tanh b}{\sinh a} \sinh x \right)$ összefüggésből következik

$$x = \sinh^{-1} \left(\frac{\tanh \lambda \sinh a}{\sinh b} \right) = \ln \frac{\tanh \lambda \sinh a + \sqrt{\tanh^2 \lambda \sinh^2 a + \tanh^2 b}}{\tanh b},$$

és így a keresett térfogat

$$v = \frac{1}{4} \int_0^b \frac{\tanh \lambda \sinh a}{\sqrt{\tanh^2 b \cosh^2 \lambda + \sinh^2 a \sinh^2 \lambda}} \ln \left(\frac{\sinh b + \tanh c \sinh \lambda}{\sinh b - \tanh c \sinh \lambda} \right) d\lambda.$$

Tételben összefoglalva számításainkat állíthatjuk:

6.5.1. Tétel. *Ha egy orthoszkém élei a, b, c , úgy, hogy $a \perp b$ and $(a, b) \perp c$, akkor a térfogata:*

$$v = \frac{1}{4} \int_0^b \frac{\tanh \lambda \sinh a}{\sqrt{\tanh^2 b \cosh^2 \lambda + \sinh^2 a \sinh^2 \lambda}} \ln \left(\frac{\sinh b + \tanh c \sinh \lambda}{\sinh b - \tanh c \sinh \lambda} \right) d\lambda.$$

A formula ideális csúcsú tetraéder térfogatának meghatározására is alkalmas. Ha az a végtelenhez tart, akkor az $\frac{\tanh \lambda \sinh a}{\sqrt{\tanh^2 b \cosh^2 \lambda + \sinh^2 a \sinh^2 \lambda}}$ függvény a $\frac{1}{\cosh \lambda}$ függvényhez, így az 1 ideális csúccsal rendelkező orthoszkém térfogata:

$$v = \frac{1}{4} \int_0^b \frac{1}{\cosh \lambda} \ln \left(\frac{\sinh b + \tanh c \sinh \lambda}{\sinh b - \tanh c \sinh \lambda} \right) d\lambda.$$

Ha c is tart a végtelenhez, formulánk a két ideális csúccsal rendelkező orthoszkém térfogatát adó:

$$v = \frac{1}{4} \int_0^b \frac{1}{\cosh \lambda} \ln \left(\frac{\sinh b + \sinh \lambda}{\sinh b - \sinh \lambda} \right) d\lambda,$$

formulává egyszerűsödik. Alkalmas tükrözésekkel megkapjuk a három majd végül a négy ideális csúccsal rendelkező tetraéder térfogatát:

$$v = \int_0^b \frac{1}{\cosh \lambda} \ln \left(\frac{\sinh b + \sinh \lambda}{\sinh b - \sinh \lambda} \right) d\lambda.$$

Ha a térfogatformulában szereplő függvényeket másodrendű elhanyagolással közelítjük, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{4} \int_0^b \frac{\tanh \lambda \sinh a}{\sqrt{\tanh^2 b \cosh^2 \lambda + \sinh^2 a \sinh^2 \lambda}} \ln \left(\frac{\sinh b + \tanh c \sinh \lambda}{\sinh b - \tanh c \sinh \lambda} \right) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b \frac{\lambda a}{\sqrt{b^2 + a^2 \lambda^2}} \frac{c \lambda}{b} d\lambda = \frac{ac}{2b^2} \int_0^b \frac{\lambda^2}{\sqrt{1}} d\lambda = \frac{abc}{6}, \end{aligned}$$

így visszkapjuk az euklidészi térfogatot.

6.6. Szférikus térfogat.

A gömbháromszögek felszínének az aránya szögösszegeik $2R$ -et meghaladó részeinek, excesszusainak arányával egyenlő.

Bolyai J.: Appendix

Nincs nehezebb dolgunk a szférikus térfogatszámolással sem mint az izometriacsoportok meghatározásával. A gömbfelszín két, három, stb. n -dimenziós tartományainak térfogatait a megfelelő integrál fogalmak közbeiktatásával induktív módon definiálhatjuk. A gömbi szakasz hosszának fogalma lehetőséget nyújt a gömbi görbe ívhosszának definiálásához, és egy a szférán elhelyezkedő derékszögű koordinátarendszerre vonatkozó integrálfogalom kialakítására, ami alapján definiálhatjuk a két-dimenziós gömbi tartományok területét. Ez alapján beszélhetünk kettős integrálról, majd három-dimenziós gömbi tartomány térfogatáról. Az eljárás segítségével rendelkezésre áll valamennyi közbeeső térfogat fogalom és ezek alapján definiálható a gömbfelszíni tartományra vonatkozó általános a beágyazó térre vonatkozó integrálfogalom. Kimutatható, hogy az n -dimenziós gömbi tartomány karakterisztikus függvényének tartományon vett integrálja éppen a tartomány n -dimenziós térfogata. Ezután már csak a gömbi koordinátákra kell áttérni a helyettesítéssel integrál segítségével. Tekintettel arra, hogy a térfogat, integrállal való számításánál két rosszul viselkedő pont az eredményt nem befolyásolja, nem szükséges foglalkozunk avval a ténnyel, hogy a gömbi koordinátázás a gömbfelszín két pontjának (az északi és déli pólus) tekintetében nem egyértelmű. A szokásos szinuszos felírásában az euklidészi tér $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ koordinátái

és az $u_1, u_2, \dots, u_n, r$ gömbi koordináták közötti kapcsolatot az

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \cos u_n \\ x_n &= \cos u_{n-1} \sin u_n \\ x_{n-1} &= \cos u_{n-2} \sin u_{n-1} \sin u_n \\ &\vdots \\ x_2 &= \cos u_1 \sin u_2 \cdots \sin u_{n-1} \sin u_n \\ x_1 &= \sin u_1 \sin u_2 \cdots \sin u_{n-1} \sin u_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer fejezi ki. A helyettesítés most n -dimenziós tartományt $(n+1)$ -dimenziós térbe képez, ezért a Jacobi determináns a következőképpen számolható: véve a fenti egyenletek parciális deriváltjaiból álló $(n+1) \times n$ méretű mátrixot, ezt transzponáltjával balról összeszorozzuk (képeztük a Gramm mátrixát) majd ezen $n \times n$ -es mátrix determinánsának gyökét vesszük. Valóban J -vel jelölve az r -t is változóként alkalmazó leképezés $(n+1) \times (n+1)$ -es Jacobi mátrixát, ennek első n oszlopa merőleges az utolsóra és az utolsó egység hosszú. Ezért a

$$J = \left(A \mid \left(\frac{\partial x_i}{\partial r} \right) \right)$$

definícióval adódik, hogy

$$\begin{aligned} |\det J| &= \sqrt{\det J^T \det J} = \sqrt{\det(J^T J)} = \\ &= \sqrt{\det \left(\left(A \mid \left(\frac{\partial x_i}{\partial r} \right) \right)^T \left(A \mid \left(\frac{\partial x_i}{\partial r} \right) \right) \right)} = \\ &= \sqrt{\det \left(\begin{pmatrix} A^T A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\det(A^T A)}. \end{aligned}$$

Így a térfogat:

$$\begin{aligned} v(D) &= \int_D 1 dv = \int_T |\det(J)| du_1 \cdots du_{n-1} du_n = \\ &= \int_T \sin u_2 \sin^2 u_3 \cdots \sin^{(n-1)} u_n du_1 \cdots du_{n-1} du_n \end{aligned}$$

formulához vezet, ahol T n -dimenziós tartomány a D tartomány ösképe a fenti helyettesítésre nézve. A két dimenziós gömbfelszínre ez a

$$v(D) = \int_T \sin u_2 du_1 du_2$$

formulát adj, mely a szokottabb $u'_i = \frac{\pi}{2} - u_i$ paraméter választás esetén az ismert

$$v(D) = \int_T \cos u'_2 du'_1 du'_2$$

képlethez vezet.



6.16. ábra. Henry Poincaré

6.7. Poincare

A geometriát véglegesen megalapozó Hilbert munkát megelőzi néhány fontos írás. Az axiomatika logikai és filozófiai kérdéseivel foglalkozó művek közül Henry Poincaré, "Tudomány és hipotézis" c. könyvéből idézünk most egy fejezetet.

H. POINCARÉ: TUDOMÁNY ÉS HIPOTÉZIS

II. RÉSZ

III. FEJEZET

NEM-EUKLIDÉSZI GEOMETRIÁK

MINDEN konklúzió premisszákat feltételez. Ezek vagy evidensek és nem kell őket igazolni, vagy meg tudjuk alapozni őket más állításokkal; és, mivel nem tudunk a végtelenségig visszamenni így, minden deduktív tudomány, speciálisan a geometria is, feltételez bizonyos számú demonstrálhatatlan axiómát. Minden geometriai értekezés ezen axiómák kinyilatkoztatásával kezdődik. Van azonban leírható különbség közöttük. Néhány, mint például, "Dolgok melyek egyenlők ugyanazon dologgal, egymással is egyenlők," nem a geometria állításai, hanem az analízisé. Úgy tekintek ezekre mint analitikusan a priori intuíciókra, és ezek nem

foglalkoztatnak a továbbiakban. Azonban súlyt kell helyeznem más axiómákra, melyek speciálisan a geometriához tartoznak. A legtöbb mű explicit kinyilvánít hármát:

- (1) Csak egy egyenes mehet át két ponton;
- (2) az egyenes vonal a legkisebb távolság két pont között;
- (3) egy ponton keresztül csak egy nem metsző húzható egy adott egyeneshez.

Habár általában a második axiómának el szoktuk hagyni a bizonyítását, le lehet vezetni a másik kettőből, és egyéb - implicit módon kinyilatkoztatás nélkül - hozzávett axiómákból, ahogy a következőkben azt kifejtjük. Hosszú ideig hiába kutattak az Euklidész posztulátumának nevezett harmadik axióma bizonyítása után. Elképzelhetetlenül nagy erőfeszítések történtek az összhang megteremtése érdekében. Végül, a tizenkilencedik század elején két tudós, egy orosz és egy bolgár³, Lobacsevszkij és Bolyai, megdönthetetlenül megmutatta, hogy ez a bizonyítás lehetetlen. Megszabadították a geometria vizsgálóit egy posztulátumtól és azóta az Académie des Sciences csak erről a témáról évente megjelentet egy-két új közleményt. A kérdés azonban nem merült ki, és történt nem sokkal ezelőtt egy nagy lépés Riemann híres előadásában, aminek címe: Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zum Grunde liegen. Ez a kis munka inspirálta a legtöbb új keletű értekezést amire a későbbiekben hivatkozni fogok, ezek közül különösképpen Beltrami és Helmholtz munkáit említhetem.

Lobacsevszkij geometriája. Ha Euklidész posztulátuma levezethető lenne más axiómákból, tagadva ezt és megtartva a többi axiómát ellentmondásra kéne jutnunk. Lehetetlen lenne ilyen premisszákból koherens geometriát felépíteni. Lobacsevszkij ezt tette. Feltette, hogy több nem metsző húzható egy pontból egy adott egyeneshez, és megtartotta a többi Euklidészi axiómát. Ezekből a feltevésekből levezetett egy sor tételt, amelyek között nem lehet ellentmondás, és konstruált egy geometriát mely logikájában ugyanolyan kifogástalan mint az Euklidészi. A tételek nagyon különböznek azoktól, amelyeket megszoktunk, és először egy kis zavart érzünk. Például, a háromszög szögeinek összege mindig kisebb két derékszög összegénél, és a két derékszög és a szögösszeg különbsége arányos a háromszög területével. Lehetetlen szerkeszteni egy alakzathoz hasonló más méretű alakzatot. Ha a körvonalat egyenlő részekre bontjuk, és érintőket húzunk az osztáspontokban, akkor ha a kör sugara elég kicsi, akkor az érintők egy szabályos sokszöget alkotnak, ha azonban elég nagy, az érintők nem metszik egymást. Nem szükséges több példát hoznunk. Lobacsevszkij állításai nincsenek kapcsolatban a megfelelő Euklidésziakkal, mindazonáltal logikailag van kölcsönös kapcsolat.

Riemann geometriája. Tekintsünk egy világot, amelyben az embereknek nincs vastagsága, és tegyük fel, hogy az "infinitezimálisan sík" élőlények van-

³ Poincaré ezen tévedése bántó számunkra, mindazonáltal célszerű megbocsátani neki egyéb elévülhetetlen érdemeire való tekintettel.

nak ugyanazon a síkon, amelyből nem tudnak kiemelkedni. Tegyük fel továbbá, hogy ez a világ elegendően távol van más világoktól ahhoz, hogy azok hatását kiküszöbölhessük, és amíg mi ezen hipotézisekkel élünk, nem éri meg felruházni ezen élőlényeket gondolkodóképességgel, és elhíttetni velük, hogy képesek geometriát csinálni. Ebben az esetben terüket bizonyosan két dimenziósnek fogják tartani. De tegyük most fel, hogy ezen képzelt élőlények, míg megtartjuk soványságukat, szférikus és nem síkbeli alakot öltenek, és ugyanazon a gömbfelszínen találhatók, ahonnan nem tudnak kiszökni. Milyen geometriát fognak konstruálni? Először is világos, hogy a teret csak két dimenzióval látják el. Az egyenes vonal számukra a gömbfelszínen választott legrövidebb út lesz egyik pontból a másikba, azaz egy főkörív. Másszóval a világuk egy szférikus geometria lesz. Amit térnek neveznek a gömbfelszín lesz amire korlátozódnak és ami a helye azoknak a jelenségeknek amiket megismertek. A terük nem korlátos, hiszen a gömbön mindig lehet előre menni anélkül, hogy meg kéne állni, és véges lesz; a vége soha nem található, de egy teljes körtúrát lehet rajta tenni. Nos, Riemann geometriája három dimenzióssá kiterjesztett szférikus geometria. Ahhoz, hogy megkonstruálja, a német matematikusnak először ki kellett dobni nem csak az Euklidészi posztulátumot, de az első axiómáinkat is, azaz, hogy csak egy egyenes mehet keresztül két ponton. A gömbfelszínen, két adott ponton át, általában csak egy főkör rajzolható, ahogy az látható, a képzeletünkben ez az egyenes. Azonban van egy kivétel. Ha a két adott pont egy átmérő két végpontja, végtelen sok főkör húzható rajtuk keresztül. Hasonlóképpen Riemann geometriájában, két ponton át csak egy egyenes húzható általában, de vannak kivételes esetek, amikor két ponton keresztül végtelen sok egyenes húzható. Riemann és Lobacsevszkij geometriái között bizonyos fajta szembenállás van. Például, a háromszögek szögösszege két derékszög az Euklidészi geometriában, kisebb két derékszögnél Lobacsevszkij geometriájában és nagyobb két derékszögnél Riemann geometriájában. Adott ponton át adott egyenest nem metsző egyenesek száma az Euklidészi geometriában egy, Riemann geometriájában ilyen nincs, Lobacsevszkij geometriájában végtelen. Vegyük ezekhez, hogy Riemann tere véges de nem korlátos, ahogy ezt a korábbiakban kifejtettük.

Konstans görbületű felületek. Egy kifogás azonban lehetséges. Nincs ugyan ellentmondás Lobacsevszkij tételei és Riemann tételei között; azonban sok egyéb következmény van, amit a geométerek levezettek a hipotéziseikből, a számuk akár végtelen is lehet; ki állíthatja, ha folytatná a dedukciót tovább, akkor sem találna végül ellentmondást? Ez a nehézség nem jelentkezik Riemann geometriájánál két dimenzióra szorítkozva, tény hogy, ez nem különbözik a szférikus geometriától, ami csak egy gyűjteménye a közönséges geometriának és ezért nincs benne ellentmondás. Beltrami megmutatta, hogy Lobacsevszkij két-dimenziós geometriája is egy gyűjteménye a közönséges geometriának, a kifogások egyszerre cáfolhatók vagy tarthatók. A gondolatmenete a következő: Tekintsünk egy alakzatot vala-

hol egy felületen. Képzeljünk a felületére nyomva egy flexibilis és nyújthatatlan anyagot, úgy, hogy amikor az anyagot áthelyezzük vagy deformáljuk a különböző vonalai a felületnek a hosszuk változása nélkül változtatják a formájukat. Mint egy vonalzó, ez a flexibilis de nem nyújtható alakzat nem lenne áthelyezhető a felület elhagyása nélkül. Vannak azonban olyan felületek, amelyeken ilyen mozgások elképzelhetők. Ezek a konstans görbületek. Összefoglalva, ha elképzeljük a vastagság nélküli lényeket egy ilyen felületen, ők lehetnek tartják majd az olyan mozgását egy alakzatnak, mely során minden vonal konstans hosszú marad. Más oldalról, ilyen mozgás abszurdnak tűnik olyan lényeknek melyek egy változó görbületű felületen élnek. A konstans görbületű felületeknek két típusa van. A görbülete néhánynak pozitív, és ezek deformálhatók egy gömbfelszinné. Ezek geometriája redukálható szférikus geometriává - nevezetesen Riemann geometriává. Mások görbülete negatív. Beltrami megmutatta, hogy ezek geometriája azonos Lobacsevszkij geometriájával. Eképpen a kétdimenziós Riemann és Lobacsevszkij geometriák az Euklidészi geometrián keresztül kapcsolódnak egymáshoz.

A nem-euklidészi geometriák interpretációja. A kétségek akképpen tűnnek el miképp a kétdimenziós geometriák egyre jobban kapcsolódnak egymáshoz. Könnyen ki lehet terjeszteni Beltrami érvelését három-dimenziós geometriákra, és azok a gondolatok, amelyek nem hátrálnak meg a négy-dimenzió előtt láthatóan nem okoznak nehézséget; bár ezek száma nem nagy. Javaslom, a folytatást. Tekintsünk egy alkalmas síkot, amelyet alap síknak nevezünk, és készítsünk egy szótárt, két oszlopba írva a megfelelő fogalmakat egymás mellé, ahogy egy közönséges szótárban láthatjuk:

Tér	az alapsíkhoz tartozó felső féltér
Sík	az alapsíkot merőlegesen metsző gömbök felszíne
Egyenes	körök melyek merőlegesen metszik az alapsíkot
Gömb	Gömb
Kör	Kör
Szög	Szög
Két pont távolsága	a két pont és a rajtuk keresztülfektetett egyenest jelentő körnek az alapsíkkal alkotott metszéspontjai által meghatározott kettősviszony logaritmus.

Etc

Tekintsük Lobacsevszkij tételeit és fordítsuk őket le ezen szótár segítségével, ahogy a német szöveget lefordítjuk egy Német-Francia szótár segítségével. Például, a Lobacsevszkij tétel miszerint: "A háromszögek szögösszege kisebb két derékszög összegénél" így fordítható: "Ha egy görbevonaltú háromszög oldalai az alapsíkot ortogonálisan metsző körvonalakra illeszkednek, akkor a szögösszege ennek a görbevonaltú háromszögnek kisebb két derékszög összegénél. Eképpen,

ugyan messze vagyunk attól, hogy a Lobacsevszkij hipotézis következményeit mind lássuk, sohasem juthatunk egy ellentmondáshoz; tény, ha Lobacsevszkij tételei ellentmondáshoz vezetnének, a fordítások útján kapott megfelelő tételek szintén ellentmondának egymásnak. Azonban ezen utóbbi tételek a közönséges geometriához tartoznak és nincs kétségünk afelől, hogy a közönséges geometria mentes az ellentmondásoktól. Eképpen valamiféle bizonyosság létre jön, de ezzel igazolódott az ellentmondástalanság? Ez az a kérdés, amiről most nem beszélünk, habár érdekes és úgy gondolom nem eldönthetetlen. Semmi sem maradt a kétségek közül, melyeket a fentiekben megfogalmaztam. De ez nem minden. Lobacsevszkij geometriája alkalmas konkrét interpretációra, nem csupán haszontalan logikai gyakorlat, alkalmazható. Nincs itt az ideje részletezni ezeket az alkalmazásokat, sem azokat, amelyeket Herr Klein és jómagam csináltunk a lineáris egyenletek integrálásánál. Továbbá, a fenti interpretáció nem az egyetlen, és sok szótár készíthető analóg módon, mely alkalmas arra az egyszerű transzformációra, mely Lobacsevszkij tételeit a közönséges geometria tételeibe viszi.

Implicit axiómák. Azok az axiómák, melyeket felvettünk adják a geometria megalapozásának egyetlen lehetőségét? Meggyőződünk az ellenkezőjéről, amikor elhagytunk egyet majd még egyet, fel tudtunk állítani néhány állítást, mely közös Euklidész, Lobacsevszkij és Riemann geometriájában. Ezek olyan premisszákon alapulnak, melyeket a geometriák implicit módon vesznek a rendszerhez. Érdekes megpróbálni kivenni őket a klasszikus bizonyításokból. John Stuart Mill állította azt, hogy minden definíció tartalmaz egy axiómát, mert definiálva, implicit módon feltesszük a létezését a definiált objektumnak. Ez túl messzire vezet. Kivételesen fordul csak elő a matematikában, hogy egy definíciót nem követ a definiált objektum létezése, csak akkor, amikor az olvasó könnyen ellenőrizheti ezt; és ne felejtsük el, hogy a szó "létezik" nem ugyanazt jelenti egy matematikai fogalom esetében mint egy anyagi objektum kapcsán. A matematikai fogalom létezése azt jelenti, hogy nincs sem magában a definícióban, sem az előzőleg hozzávett állításokból következő ellentmondás. Azonban a John Stuart Mill észrevétel nem alkalmazható minden definícióra, csak egy részükre igaz. A síkot a következő módon szokták definiálni: A sík egy olyan felület, amelyet ha egy egyenes két pontban érint, akkor teljes egészében benne fekszik. Most, nyilvánvalóan egy új axióma van ebben elrejtve. Igaz hogy valamit változtatnunk lehet, és ez kíváncsú is, de akkor ki kell mondanunk az axiómát explicit módon. Más nem kevésbé fontos definíciók szintén ezt tükrözik, mint például két alakzat egyenlőségének definíciója: Két alakzat egyenlő, ha egymásra helyezhetők. Egymásra helyezni őket azt jelenti, hogy az egyiket úgy helyezzük át, hogy a másikkal megegyezzen. De hogy kell áthelyezni? Ha ezt a kérdést megválaszoljuk, nem marad kétségünk afelől, hogy deformálás nélkül kell ezt végezni, és így egy nem változtatott test helyeződik. Ez nyilván egy záródó kör. Tény, hogy ez a definíció nem definiál semmit. Nincs jelentése egy olyan létező világban,

ahol csak gázok vannak. Ha ez világosnak tűnik, az azért van, mert megszoktuk a természetes testek tulajdonságait nem megkülönböztetni azon ideális testek megfelelő tulajdonságaitól, amelyeknek a méretei változatlanok. Azonban, nem helyes azt gondolni, hogy ez a definíció axiómát tartalmaz. A mozgás lehetősége egy változatlan alakzat számára nem evidens igazság. Hasonló a helyzet az Euklidészi posztulátum esetében, nem tud egy analitikus priori intuícióvá válni. Továbbá, amikor tanulmányozzuk a geometria definícióit és tételeit, azt látjuk, hogy bizonyítás nélkül nem csak a mozgás lehetőségét vagyunk kénytelenek feltételezni, de annak néhány tulajdonságát is. Az első amit tekinthetünk az egyenes definíciója. Számtalan rossz definíciót adtak, de az igazi az, amelyik érthető minden bizonyításban ahol az egyenes szerepel. „Előfordulhat, hogy egy változatlan alakzat mozgása olyan, hogy minden hozzátartozó vonal pontja mozgástól mentes, míg minden ezen a vonalon kívüli pont mozgásban van. Egy ilyen vonalat egyenes vonalnak nevezünk.” Ebben a kijelentésben szándékosan elkülönítettük a definíciót azon axiómától, amelyet követ. Sok bizonyítás, mint például, a háromszögek egyenlőségének esetei, feltételezi egy pontból egy egyenesre merőleges egyenes bocsátásának lehetőségét, szétválasztva az állítást a kinyilvánított tényektől, szükségszerűen arra következtethetünk, hogy lehetséges egy alakzatot mozgatni a térben egy bizonyos módon.

A negyedik geometria. Az explicit axiómák között van egy, ami érdemel némi figyelmet, mert amikor elhagyjuk, konstruálhatunk egy negyedik geometriát, ami ugyanúgy koherens, mint az Euklidészi, Lobacsevszkij féle, vagy Riemann geometriája. Annak bizonyításához, hogy mindig tudunk húzni egy merőleget az AB egyenesre annak egy A pontján keresztül tekintsünk egy AC egyenest ami az A pont körül forog kiindulva a kezdeti AB helyzetből. Ezután forgassuk A körül mindaddig, míg AB meghosszabbítására nem kerül. Ekkor mi két állítást fogalmazunk meg, az első, hogy ilyen forgatás van a második pedig, hogy végig vihető addig míg az egyik a másik meghosszabbítására nem kerül. Ha az első elfogadjuk a másodikat pedig elvetjük egy sor különös tételhez jutunk, amelyek még Lobacsevszkij és Riemann tételeinél is furcsábbak, bár azokkal egyszerre mentesek vagy nem az ellentmondástól. Csak egy tételt említenék nem is a leginkább említésre méltót - eszerint - egy valós egyenes lehet merőleges saját magára.

Lie tétele. Azon axiómák száma, melyeket a klasszikus bizonyítások során használunk több mint szükséges, és érdekes volna ezt a számot csökkenteni a minimálisra. Először is megkérdezhetjük lehetséges-e ilyen redukció a szükséges axiómák és az elképzelhető geometriák száma vajon nem végtelen-e? Sophus Lie-től származik a következő tétel, mely ebben a kérdésben igen fontos.

Tegyük fel a következő premisszákat: (1) a tér n dimenziós; (2) a mozgatása egy változatlan testnek lehetséges; (3) p feltétel szükséges ezen alakzat helyzetének meghatározásához. A fenti feltevésekkel kompatibilis geometriák száma korlátos. Sőt ha n adott, a felső határ p -vel kifejezhető. Továbbá, ha a lehetséges

a mozgásnak garantált, akkor véges, sőt igen korlátozott számú három-dimenziós geometria található ki.

Riemann geometriái. Azonban, ez az eredmény Riemann számára ellentmondásosnak tűnt, konstruált hát végtelen sok geometriát, úgy, hogy amihez a neve már hozzá kapcsolódott az csak speciális esete ezeknek. Mindegyik, mondta, csak annak a módnak a függvénye, ahogy a görbe ívhosszát definiáljuk. Végtelen sok módon lehet az ívhosszat definiálni és mindegyik kiinduló pontja lehet egy új geometriának. Ez tökéletesen igaz, de a legtöbb ilyen definíció nem kompatibilis egy változó alakzat mozgásával úgy, ahogy mi azt a lehetőséget a Lie tételben megkívánjuk. Riemann ezen geometriái, érdekesek számos alapon, azonban soha nem lehetnek, tisztán analitikusak, és egyik sem lehet a talaja az Euklidészi bizonyításokkal analóg bizonyításoknak.

Az axiómák természete. A legtöbb matematikus Lobacsevszkij geometriáját logikai kuriózumnak tartja. Néhányan, azonban, tovább léptek. Ha számos geometria lehetséges, mondják, bizonyos, hogy a mi geometriánk az igazi? A kísérlet kétségtelenül azt tanítja nekünk, hogy a háromszög szögösszege két derékszöggel egyenlő, de ez azért van, mert az általunk vizsgált háromszögek túl kicsik. Lobacsevszkij szerint a különbség arányos a háromszög területével, nem lesz ez érzékelhető, amikor jóval nagyobb háromszögekkel dolgozunk, és amikor a mérésünk pontosabbá válik? Euklidész geometriája így lehet, hogy csak egy átmeneti geometria. Ahhoz, hogy ezt kifejtsük, először is azt a kérdést kell feltennünk magunknak, mi az axiómák természete? Szintetikus a priori intuíciók, ahogy Kant állította? Ekkor mi rá vagyunk kényszerítve egy olyan erőfeszítésre, amelyet mi nem tudunk sem elképzelni sem felépíteni az ellentétes álláspontról. Ekkor nincs nem-Euklidészi geometria. Hogy meggyőzzük magunkat erről, tekintsük szintetikus a priori intuíciónak példaként, a teljes indukció elvét: Ha egy tétel igaz az 1 számra, és feltéve, hogy n -re igaz belátható hogy $n + 1$ -re is igaz, akkor igaz az összes pozitív egész számra. Próbáljunk meg megszabadulni ettől, és elvetve ezt az állítást konstruálni egy hamis aritmetikus analogonját a nem-euklidészi geometriának. Nem fogjuk tudni megcsinálni. Kezdetben csábító lesz analitikusan kezelni ezt az intuíciót. Azonkívül, megint visszatérve a vastagság nélküli állatok példájára, mi bajosan tudjuk elképzelni, ha ezek a lények hasonlóképpen gondolkoznak mint mi, akkor úgy adoptálják az Euklidészi geometriát, mint ami ellentmond a kutatásaiknak. Azt kell leszűrünk, hogy a geometria axiómái kísérleti igazságok? Nem tudunk kísérleteket végezni az ideális egyenessel és az ideális körrel; mi csak anyagi objektumnak tekinthetjük őket. Min alapulnak, eképpen, azok a kísérletek melyek a geometria alapjait szolgáltatják? A válasz egyszerű. Fentebb láttuk, hogy mi állandóan úgy okoskodunk mintha a geometriai alakzatok testek lennének. Amely geometria a kísérletből születik ezen testek tulajdonságaival rendelkezik. A fény tulajdonságai átvive az egyenesre szintén adnak állításokat ehhez a geometriához, speciálisan ez a projektív geo-

metria, és pontosan ezért kívánjuk mondani, hogy a metrikus geometria a testek tanulmányozása és a projektív geometria a fényé. Egy nehézség marad, és ez kikerülhetetlen. Ha a geometria kísérleti tudomány, akkor nem egzakt tudomány. Folytonos felülvizsgálat tárgyát kell képeznie. Sőt, attól a naptól, amikor bizonyítva lenne hogy téves tudnánk, hogy nincs szigorú értelemben vett változatlan test. A geometriai axiómák eképpen sem szintetikus a priori intuíciók sem kísérleti tények. Konvenciók. A lehetséges konvenciók között választásunkat a kísérleti tények vezetik; de megmarad szabadnak, és csak az ellentmondások elkerülésének szükségessége korlátozza, és eképpen a posztulálás teljesen szabad marad, amíg a kísérleti törvények, amelyek determinálják a választást, csak közelítőleg érvényesek. Más szavakkal, a geometria axiómái (nem beszélek az aritmetika axiómáiról) csak definíciók álruhában. Mit kell gondolnunk a következő kérdésről: Az euklidészi geometria igaz? Ennek nincs értelme. Ugyanígy kérdezhetnénk azt is, hogy vajon a metrikus rendszer igaz és a régi súlyok és mértékek hamisak; vajon a derékszögű koordináták igazak és a polárkoordináták hamisak? Az egyik geometria nem tud igazabb lenni mint a másik, csak kényelmesebb. Nos, az Euklidészi geometria a legkényelmesebb és az is marad: először is mert a legegyszerűbb, az első fokú polinomok egyszerűbbek a másodfokuaknál; másodszer mert elegendően megadja a természetes testek tulajdonságait, azokét a testeket melyeket össze tudunk hasonlítani és mérni a mi fogalmaink szerint.

Pilinszky János: Egy szenvedély margójára

A tengerpartot járó kisgyerek
mindíg talál a kavicsok közt egyre,
mely mindöröktől fogva az övé,
és soha senki másé nem is lenne.

Az elveszíthetlent markolássa!
Egész szive a tenyerében lüktet,
oly egyetlen egy kezében a kő,
és vele ő is olyan egyedül lett.

Nem szabadúl már soha többé tőle.
A víznek fordul, s messze elhajítja.
Hangot sem ad a néma szakítás,
egy egész tenger zúgja mégis vissza.

7. fejezet

Poliéderek

7.1. Topológiai alapfogalmak.

A Geometria azon területeinek gyűjteményét, melyekben pontok, egyenesek és felületek egymáshoz viszonyított helyzetének leírását, azok méretétől függetlenül tesszük, Analysis Situs -nak nevezzük.

H.Poincare: Analysis Situs

Legyen a továbbiakban X tetszőleges ponthalmaz. A $\mathcal{G}$ halmazrendszer elemei legyenek X részhalmazai.

7.1.1. Definíció. *Ha a $\mathcal{G}$ halmaz teljesíti a következő tulajdonságokat:*

- $\emptyset, X \in \mathcal{G}$,
- *unióra zárt azaz, ha minden $i \in \mathcal{I}$ esetén $G_i \in \mathcal{G}$ akkor $\bigcup G_i \in \mathcal{G}$,*
- *véges metszet zárt azaz, ha $i = 1, \dots, n$ esetén $G_i \in \mathcal{G}$ akkor $\bigcap G_i \in \mathcal{G}$,*

akkor azt mondjuk, hogy az $\{X, \mathcal{G}\}$ pár egy topológikus tér a $\mathcal{G}$ nyílthalmaz rendszerrel, amelynek elemei a tér nyílt halmazai.

A nyílt halmazok X -re vonatkozó komplementerei a *zárt* halmazok. Legyen $H \subset X$ halmaza a topológikus térnek. A B pont *belső pontja* H -nak, ha van olyan $G \in \mathcal{G}$ nyílt halmaz, hogy $B \in G \subset H$ teljesül. A H komplementérének H^c -nek belső pontjait H *külső pontjainak* nevezzük. H *határpontjai* az X azon pontjai, amelyek nem belső és nem külső pontjai H -nak.

7.1.1. Lemma. *H pontosan akkor nyílt halmaz, ha minden pontja belső pont, és pontosan akkor zárt ha összes határpontját tartalmazza.*

7.1.1. Megjegyzés. Minden metrikus tér indukál egy topológiát, amelyben a nyílt halmazok a nyílt gömbökből a végesmetszetre illetve unióra való lezárás útján adódnak. Ezt a metrika által indukált topológiának nevezzük. Nem nehéz igazolni, hogy az n -dimenziós euklideszi tér nyílt halmazai tartalmazzak nyílt metrikus gömböt.

7.1.2. Definíció. A $\{X, \mathcal{G}\}$ topológikus tér X' részhalmaza a $\mathcal{G}' := X' \cap \mathcal{G}$ nyílt halmazok rendszerével topológikus térré tehető. Az így kapott topológikus teret az eredeti alterének nevezzük.

7.1.3. Definíció. Az $\{X, \mathcal{G}\}$ topológikus tér összefüggő, ha nem bomlik fel két nem üres diszjunkt, nyílt halmazának uniójára.

A továbbiakban először topológikus terek folytonos leképezéseivel foglalkozunk.

7.1.4. Definíció. Az $f : \{X, \mathcal{G}\} \longrightarrow \{X', \mathcal{G}'\}$ leképezés folytonos, ha nyílt halmaz teljes inverz képe nyílt.

7.1.5. Definíció. Az $f : \{X, \mathcal{G}\} \longrightarrow \{X', \mathcal{G}'\}$ leképezés homeomorfizmus, ha folytonos, invertálható és az inverz függvény is folytonos. Ha van $f : \{X, \mathcal{G}\} \longrightarrow \{X', \mathcal{G}'\}$ homeomorfizmus akkor azt mondjuk, hogy az $\{X, \mathcal{G}\}$ illetve $\{X', \mathcal{G}'\}$ topológikus terek homeomorfak (vagy topológikusan ekvivalensek) egymással.

7.1.2. Megjegyzés. Könnyű találni olyan példát, hogy invertálható folytonos leképezés inverze nem folytonos, ezért a homeomorfia fogalma általában nem egyszerűsíthető. Tekintsük ugyanis az $(X, \mathcal{P}(X))$, $(X, \emptyset)$ topológikus tereket, ahol $\mathcal{P}(X)$ az X összes részhalmazát tartalmazó halmaz. A függvény legyen az alaphalmaz identitása. Ez világos módon invertálható, mint

$$id : (X, \mathcal{P}(X)) \longrightarrow (X, \emptyset)$$

leképezés folytonos az inverze viszont nem az.

A másik oldalról viszont megmutatható, hogy egy euklideszi téren értelmezett folytonos bijekció inverze is folytonos. (v.ö $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény inverzére vonatkozó ismert tétellel.)

7.1.6. Definíció. Az euklideszi tér egy szakasza mint a topológikus tér egy altere a származtatott topológiával szintén topológikus tér. Elemi ívnek nevezzük ezen tér homeomorf képeit.

Igazolható, hogy elemi görbeív meghatározza végpontjait.

7.1.7. Definíció. *Két pontja a topológikus térnek ívvel összeköthető, ha találunk véges sok elemi ívet, melyek végpontjaikban szabályosan csatlakoznak egymáshoz, azaz két végpont kivételével valamennyi végpont pontosan két ívhez tartozik, és a két szabad (csak egy ívhez tartozó) végpont a két adott pont. A topológikus tér ívszerűen összefüggő, ha tetszőleges két pontja ívvel összeköthető.*

7.1.3. Megjegyzés. *Ívszerűen összefüggő topológikus tér összefüggő. Fordítva ez nem igaz, a*

$$\left\{\sin \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R} \setminus 0\right\} \cup \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$$

alaphalmaz az $\mathbb{R}^2$ szokásos topológiája által indukált altér topológiára nézve összefüggő, három ívszerű komponensből álló topológikus tér.

Alapvető jelentőségű fogalom a topológikus tér kompaktságának fogalma.

7.1.8. Definíció. *Az $\{X, \mathcal{G}\}$ topológikus tér kompakt, ha tetszőleges nyílt halmazokból álló fedőrendszeréből kiválasztható véges fedőrendszer, azaz ha*

$$\bigcup \{G_i \in \mathcal{G} \mid i \in \mathcal{I}\} \supset X$$

teljesül, akkor $\exists \{i_1, \dots, i_\sigma\} \subset \mathcal{I}$ úgy, hogy

$$\bigcup \{G_{i_j} \mid j = 1, \dots, \sigma\} \supset X$$

is fennáll.

Először vizsgáljuk meg kompaktság egyik térről a másikra vonatkozó átvitelének lehetőségeit.

7.1.1. Tétel. *Kompakt tér zárt részhalmazai kompaktak.*

Bizonyítás: Egy nyílt fedés kiegészítve a halmaz komplementerével a tér fedését adja. Mivel ebből kiválasztható véges fedés az állítás világos. $\square$

7.1.2. Tétel. *Kompakt tér folytonos képe kompakt.*

Bizonyítás: Evidens a definíciókból. $\square$

7.1.9. Definíció. *A topológikus tér Hausdorff-féle (vagy rendelkezik a T_2 tulajdonsággal) ha tetszőleges két pontjához található olyan diszjunkt nyílt halmazpár, melynek egyike az egyik, másika a másik pontot tartalmazza.*

7.1.3. Tétel. *Hausdorff tér kompakt részhalmazai zártak.*

Bizonyítás: Ha a komplementer tetszőleges fix eleme x a részhalmaz tetszőleges pontja pedig y a Hausdorff tulajdonság miatt ezek szeparálhatók diszjunkt nyílt halmazokkal, melyek közül az y -t tartalmazó legyen G_y . $\cup G_y$ nyílt fedése a részhalmaznak, az ebből kiválasztott véges rendszer elemeihez tartozó párok metszete nyílt halmaz, x -t tartalmazza és diszjunkt a halmazunkhoz. $\square$

A következő tétel képezi az alapot a homeomorfia definíciója után tett megjegyzésünk bizonyításához.

7.1.4. Tétel. *Legyen $f : (X_1, \mathcal{G}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{G}_2)$ folytonos injekció, ahol $(X_1, \mathcal{G}_1)$ kompakt, $(X_2, \mathcal{G}_2)$ Hausdorff-féle topológikus terek. Ekkor $f : X_1 \rightarrow \mathcal{R}(f)$ homeomorfizmus.*

Bizonyítás: Elegendő látni, hogy nyílt halmaz képe nyílt. Legyen G az X_1 nyílt halmaza. Ekkor komplementere zárt így kompakt. Az $\bar{G}$ képe tehát kompakt ezért zárt X_2 -ben. A kép komplementere X_2 -ben tehát nyílt ezzel állításunkat a leképezés injektivitása alapján igazoltuk. $\square$

A következő tételek jól mutatják egy metrikus tér korlátos és zárt részhalmazai illetve kompakt halmazai között fennálló kapcsolatot.

7.1.10. Definíció. *Az (X, ϱ) párt metrikus térnek nevezzük, ha $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ teljesíti a következő tulajdonságokat:*

- $\varrho(P, Q) \geq 0$, ha $\varrho(P, Q) = 0$ akkor $P = Q$,
- $\varrho(P, Q) = \varrho(Q, P)$
- $\varrho(P, Q) + \varrho(Q, R) \geq \varrho(P, R)$.

Magát a fenti tulajdonságokkal rendelkező függvényt metrika függvénynek vagy röviden metrikának nevezzük.

7.1.4. Megjegyzés. *Minden metrikus térben megadható a nyílt gömb fogalma a szokott módon, a nyílt gömböket nyílt halmaznak tekintve, majd végsmetszetre és unióra ezt a halmazrendszert lezárva egy olyan halmazrendszerhez jutunk, mely topológiát ad meg az alaphalmazon. Ezt a topológiát a metrika indukálta topológiának nevezzük.*

Metrikus térben értelmes a korlátosság fogalma, *korlátosnak* nevezzünk egy halmazt, ha tartalmazza egy gömb.

7.1.5. Tétel. *Metrikus tér kompakt részhalmazai korlátosak.*

Bizonyítás: Minden pontja köré rajzolhatunk egy ε sugarú gömböt. A kompaktság miatt ezekből véges sok is lefedi. Ha ezek középpontjai $x_1, \dots, x_n$ az x_1 középpontú $R = 2\varepsilon + \max\{\rho(x_i, x_1)\}$ sugarú gömb fedi a teljes halmast. $\square$

A két tétel alapján mondhatjuk, hogy metrikus tér kompakt részhalmazai korlátosak és zártak. (Világos hogy minden metrikus tér Hausdorff féle.)

Ezen állítás megfordítása nem igaz. Tekintsük ugyanis az X téren azt a metrikát, mely tetszőleges két különböző ponthoz az 1 értéket rendeli. (Ha a két argumentumba ugyanazt a pontot tesszük 0-t kell felvennie értéként.) Ebben a metrikában nyílt gömbök az egyelemű halmazok, így az indukált topológia nyílt halmazai a $\mathcal{P}(X)$ halmazrendszer. Egy végtelen halmaza a térnek nem lehet kompakt, de nyilván korlátos és zárt is mert a zárthalmazok rendszere is $\mathcal{P}(X)$.

Euklideszi térben azonban igaz a Borel-féle fedési tétel:

7.1.6. Tétel (Borel). *Az n -dimenziós euklideszi tér korlátos és zárt részhalmazai kompaktak.*

Így euklideszi tér kompakt részhalmazai éppen a korlátos és zárt halmazok.

7.2. Konvex poliéderek

Határ az, ami vége valaminek.

Euklidész I. 13. Definíció

7.2.1. Az euklideszi eset

Először az n -dimenziós euklideszi tér keretein belül értelmezzük a konvex poliédert.

7.2.1. Definíció. *A belső ponttal rendelkező konvex halmast konvex testnek nevezzük.*

7.2.1. Tétel. *A nyílt feltérek egybevágó konvex halmazok.*

Bizonyítás: Világos, hogy a $H_c(\mathbf{n})^+ := \{P | \overrightarrow{OP} = \mathbf{r}, \langle \mathbf{r} | \mathbf{n} \rangle > c\}$ feltér megadásánál feltehető, hogy $\mathbf{n}$ egységvektor. A V altér egy ortonormált bázisát az $\mathbf{n}$ egységvektorral kiegészíthetjük a tér egy ortonormált bázisává. Azon A lineáris leképezést, amely ezen ortonormált bázist a standard $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$

ortonormált bázisba viszi, nyilván ortogonális mátrix reprezentál. Így a homogén alakú

$$\begin{pmatrix} A & -\mathbf{r}_0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

transzformáció egybevágóságot ad, mely nyílt féltérünket az $x_n > 0$ nyílt féltérbe viszi. Azaz tetszőleges két nyílt féltér egymással is egybevágó. A konvexitás azonnal adódik, mert $1 \geq \alpha \geq 0$ esetén:

$$\langle \alpha \mathbf{r}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{r}_2 | \mathbf{n} \rangle = \alpha \langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{n} \rangle + (1 - \alpha) \langle \mathbf{r}_2 | \mathbf{n} \rangle > c.$$

□

Világos, hogy zárt féltrekre analóg állítás érvényes.

7.2.1. Lemma. *Zárt féltérek véges metszete konvex halmaz.*

7.2.2. Definíció. *Véges sok zárt féltér metszetét, ha korlátos és van belső pontja konvex poliédernek nevezzük.*

A konvex poliédert megadó féltérek közül azokat, melyek határoló hipersíkján található a testhez tartozó olyan pont, mely egyetlen másik határoló hipersíkra sem esik, *meghatározó féltre*eknek nevezzük. A továbbiakban elhagyjuk azokat a féltreket, melyek nem meghatározóak. Világos, hogy így csak azon egyenlőtlenségeket hagytuk el a meghatározó egyenlőtlenségek közül, melyek a többinek következményei.

7.2.2. Tétel. *A meghatározó féltérek határoló hipersíkjának metszetei a konvex poliéderrel maguk is $n - 1$ -dimenziós konvex poliéderek.*

Az egyszerű bizonyítást elhagyjuk.

7.2.3. Definíció. *Az n -dimenziós konvex poliéder $(n - 1)$ -dimenziós lapjai a meghatározó féltérei határoló hipersíkjainak a poliéderrel való metszetei. Ezeket hiperlapnak is nevezzük. Az $(n - 1)$ -dimenziós lapok $((n - 2)$ -dimenziós) relatív hiperlapjai az eredeti poliéder $(n - 2)$ -dimenziós lapjai. Az eljárást folytatva eljutunk a null-dimenziós lapok definíciójához, melyeket a poliéder csúcsainak nevezünk. A poliéder határa az n -nél kisebb dimenziós lapjainak uniója.*

7.2.3. Tétel. *A K konvex poliéder a csúcsainak konvex burka. Azaz ha $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ a csúcsokba mutató helyvektorok, akkor*

$$K = \{ \mathbf{v} \in E^n | \mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{v}_i, \text{ ahol } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, m \}.$$

Bizonyítás: Az állítás a csúcsokra nyilvánvalóan teljesül. Tegyük fel, hogy a poliéder legfeljebb $(k - 1)$ -dimenziós lapjaira az állítás teljesül. Vegyük most valamelyik k -dimenziós F_k lapjának egy tetszőleges P pontját. Ha ez egyúttal F_k valamelyik lapjának is pontja akkor az indukciós feltétel és a lap definíciója szerint rá teljesül az állítás. Ha nem esik F_k semelyik lapjára sem (ilyenkor azt mondjuk, hogy F_k relatív belsejébe esik), akkor tekintsünk egy t egyenest, mely P -t valamelyik F_k -hoz tartozó R csúccsal köti össze. Mivel a konvex poliéder korlátos ez az egyenes feltétlenül metszi F_k határát még egy Q pontban. Az indukciós feltétel szerint a Q pont az F_k csúcsainak egy konvex kombinációja, P pont pedig a QR szakasz pontja, ezért P is az F_k csúcsainak konvex kombinációja. Az indukció szerint éppen állításunkat kapjuk. $\square$

7.2.1. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a poliéder tetszőleges a csúcsaitól különböző pontja pontosan egy lap relatív belső pontja, így poliéderünk előál-lítható a lapjai relatív belsejének diszjunkt uniójaként, ha számításba vesszük magát a poliédert n -dimenziós lapnak, csúcsai relatív belsejeként, pedig ma-gukat a csúcsokat értjük.

7.2.2. A hiperbolikus eset

A hiperbolikus esetben a definíciónk ugyanaz mint az euklidészi esetben, azaz:

7.2.4. Definíció. Véges sok zárt féltér metszetét, ha korlátos és van belső pontja az n -dimenziós hiperbolikus tér konvex poliéderének nevezzük.

A Cayley-Klein modell segítségével könnyen elképzelhetjük a hiperboli-kus poliédereket hiszen a modell gömbbe eső euklidészi poliéderek ábrázolják őket. Ebből közvetlenül látszik, hogy a poliéderek topológiája és laphálójá-nak kombinatorikája abszolút, sőt ez euklideszi tételek síklapokkal határolt nem korlátos hiperbolikus poliedrikus halmazokra is kézzelfogható kombina-torikus állításokat adnak. Mivel a hiperbolikus tér pontjai nem azonosíthatók egy vektortér pontjaival, a konvex kombinációról szóló állítások a tér keretein belül nem értelmezhetőek. Minden metrikus tulajdonság felülvizsgálatra szo-rul, így az ilyen tulajdonságok alapján való osztályozási kérdések, specializá-lások az euklideszi esettől eltérő végeredményekhez vezetnek. Mint korábban láttuk, hasonlóan nehéz kérdés a térfogatszámítás kérdése. A hiperbolikus poliéderek lapazonosításai alapján kapható hiperbolikus sokaságok vizsgálata szintén messzire vezet, kapcsolódik csoportelmélethez, algebrai topológiához és algebrai geometriához egyaránt.

7.3. Euler tétel

*Babonásak vagyunk, ha reménységünket a formaságokba helyezzük,
de kevélységre vall, ha nem akarjuk elfogadni őket.*

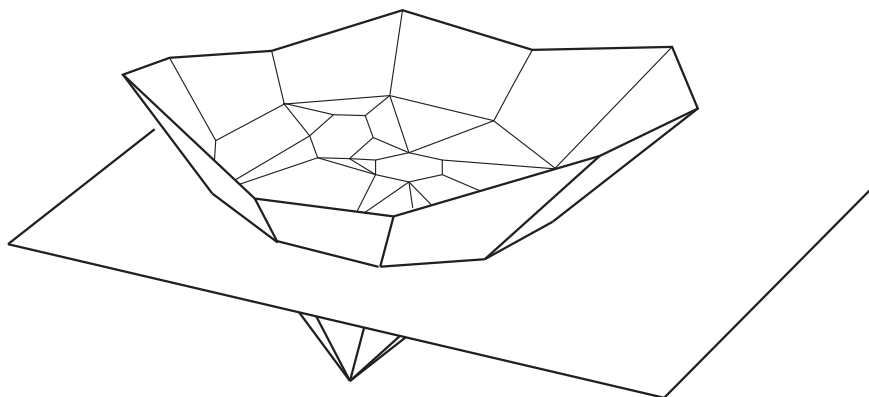
Blaise Pascal

7.3.1. A konvex és csillagszerű poliéderek esetei

Az Euler tétel az elemi geometria egyik legismertebb és legtöbbet alkalmazott tétele. Legegyszerűbb bizonyításai a konvex poliéderek osztályára adhatók. Két ilyen bizonyítást nézünk először. Az egyik a centrális vetítés alaptulajdonságait használja, a másik a gömb elemi geometriájának ismeretére épül.

7.3.1. Tétel. *Legyen egy három dimenziós konvex poliéder csúcsainak száma c , élei száma e és lapjainak száma l . Ekkor fennáll a következő összefüggés:*

$$c - e + l = 2$$



7.1. ábra. A vetítőkúp és a vetület

Bizonyítás: Vetítsük centrálisan a poliédert az egyik lapjára úgy, hogy a többi lap ezen lap átfedésmentes kitöltését adja. Ez a lap egy belső pontjához közeli, nem a poliéderhez tartozó centrumból végzett vetítéssel elérhető. Számoljuk össze a keletkező csomópontokban fellépő szögek összegét, először a megfelelő csúcsok felsorolása alapján. A kapott eredmény:

$$\xi = (k - 2)\pi + (c - k)2\pi,$$

ahol a kiválasztott lap oldalszáma k . Másodszor ezt a szögösszeget megkaphatjuk úgy is, ha laponként számoljuk össze. Ekkor észrevéve, hogy a kívánt

eredményhez a k -oldalú kiindulási sokszög szögösszegét nem kell figyelembe venni, adódik, hogy

$$\xi = \sum_{i=3} \alpha_i (i-2)\pi - (k-2)\pi,$$

ahol α_i az i -oldalú lapok száma. Mivel

$$\sum_{i \geq 3} \alpha_i = l,$$

és

$$\sum_{i \geq 3} \alpha_i i = 2e,$$

a kapott egyenlet egyszerűsítése a keresett összefüggéshez vezet. $\square$

A szférikus geometriai összefüggések vizsgálatakor meghatároztuk a szférikus háromszög területét. Ebből indukcióval azonnal adódik a következő tétel:

7.3.2. Tétel. *Legyen P konvex gömbi sokszög az egységgömbön. Ha a szögei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, akkor P területe:*

$$t(P) = \sum_{i=1}^n \varphi_i - (n-2)\pi.$$

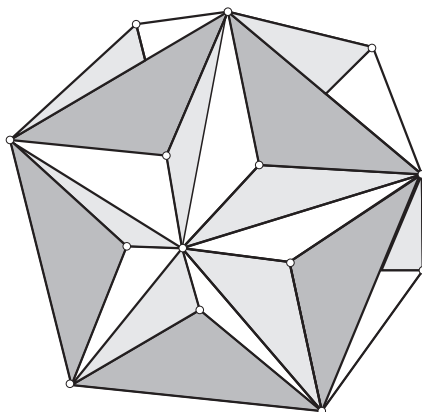
Legyen most poliéderünk *csillagszerű poliéder*, azaz legyen olyan belső pontja, melyből tetszőleges határpontjához húzott szakasz teljes egészében a poliéderhez tartozik. Ebben az esetben a következőképpen igazolhatjuk Euler tételét:

Bizonyítás: A poliéder csillagközepppontja köré írjunk egy akkora gömböt, amely már tartalmazza, és vetítsük ezen gömb felületére a poliéder felületét. Nyilván feltehető, hogy a gömb sugara egységnyi és most a gömb F felszínét határozhatjuk meg a fenti tétel formulája segítségével:

$$F = \sum_{j=1}^{\rho} \left(\sum_{i=1}^{n_j} \varphi_i^j - (n_j - 2)\pi \right),$$

ahol j indexeli a kapott gömbi konvex sokszögeket n_j pedig a j -edik sokszöglap oldalszámát jelenti. Mivel

$$\sum_{j=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{n_j} \varphi_i^j = 2c\pi,$$



7.2. ábra. Csillagszerű poliéder

és használva az i -oldalú lapok számára az α_i jelölést

$$\sum_{j=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{n_j} n_j \pi = \pi \sum_{n \geq 3} \alpha_n n = 2e\pi,$$

és

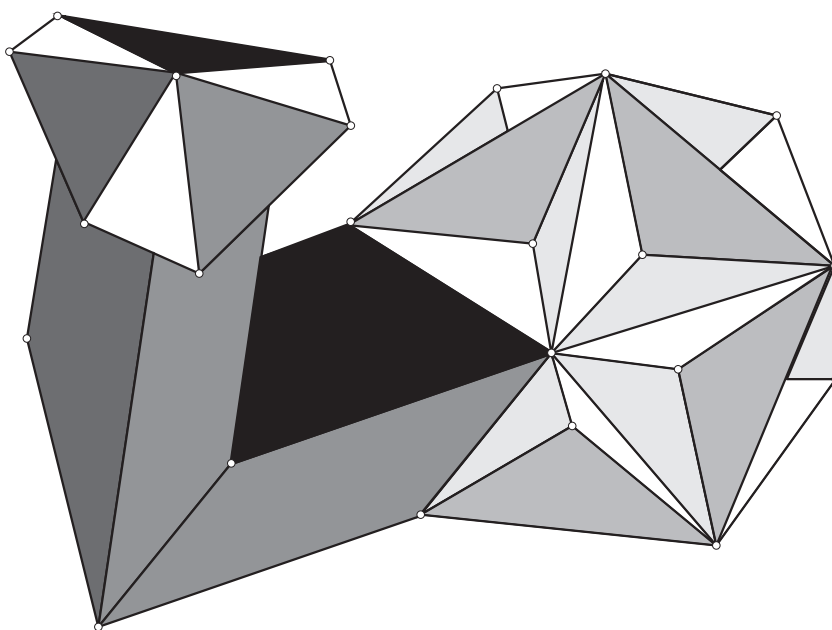
$$\sum_{j=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{n_j} 2\pi = 2\pi \sum_{n \geq 3} \alpha_n = 2l\pi,$$

$F = 4\pi$ figyelembe vételével, megint az Euler egyenlőséget kapjuk. $\square$

7.3.2. Zárt poliedrikus felületre vonatkozó bizonyítás

7.3.1. Definíció. *A tér két egyszerű sokszöge szabályosan csatlakozik, ha metszetük mindkettejüknek éle, vagy mindkettejüknek csúcsa. Ha véges sok egyszerű sokszög oly módon csatlakozik szabályosan, hogy tetszőleges él legfeljebb két sokszög éle, akkor uniójukat poliedrikus felületnek nevezzük. A poliedrikus felület határa azon éleinek uniója, melyek pontosan egy laphoz tartoznak. A poliedrikus felület zárt, ha határa üres. A zárt poliedrikus felület egy ciklusa éleinek önmagát át nem metsző zárt lánc. A zárt poliedrikus felület egyszeresen összefüggő, ha tetszőleges ciklusához találunk egy lapjaiból álló laphalmazt $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ -t, a következő tulajdonságokkal:*

- *A ciklus közös határa $\mathcal{F}'$ -nek és $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$ -nek,*
- *Ha $F_1, \dots, F_n$ lapoláncra ($F_i \cap F_{i+1}$ él minden $i = 1, \dots, n$ esetén), $F_1 \in \mathcal{F}'$ és $F_n \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$ akkor van olyan i , hogy $F_i \cap F_{i+1}$ a ciklushoz tartozik.*



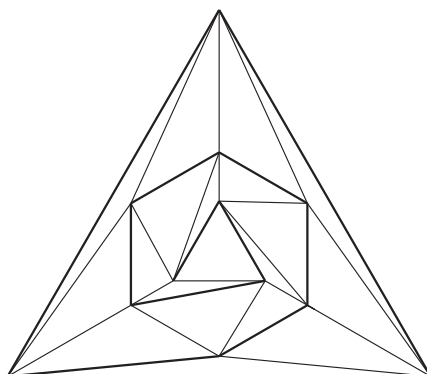
7.3. ábra. Nem csillagszerű, zárt egyszeresen összefüggő poliedrikus felület

A zárt poliedrikus felület lap-összefüggő, ha tetszőleges két F', F'' lapjához található lapok $F_1, \dots, F_n$ láncba úgy, hogy $F' = F_1$ és $F'' = F_n$.

7.3.3. Tétel. Egyszeresen összefüggő, lap-összefüggő zárt poliedrikus felületre teljesül a $c - e + l = 2$ összefüggés.

Bizonyítás: Két halmazt definiálunk rekurzív módon. Az egyiket $\mathcal{F}_i$ -vel jelöljük, ebbe a poliéder lapjait rakjuk egyesével, $\mathcal{F}_0 = \{F_0\}$, ahol F_0 a poliéder egy tetszőleges rögzített lapja. A másikat $\mathcal{E}_i$ -vel jelöljük, ebbe a poliéder bizonyos éleit rakjuk, lépésenként egyet, $\mathcal{E}_0 = \emptyset$. Először $\mathcal{E}_1$ -t adjuk meg, ez tartalmazza F_0 egy tetszőleges élét.

Legyen ezután $\mathcal{F}_1 = \{F_0, F_1\}$, ahol F_0 és F_1 közös éle éppen az előbb kiválasztott él. A továbbiakban csak olyan élet választunk, mely egyik oldalán az előző laphalmazhoz tartozó valamelyik lap illeszkedik a másik oldalán pedig valamely az eddig kiválasztott lapok között nem szereplő lap. Az élkiválasztást követő lapkiválasztás során a kiválasztott él által meghatározott, az addig nem szereplő lapot hozzá vesszük a laphalmazunkhoz. Világos, hogy az eljárást addig folytathatjuk, amíg találunk olyan élet, melyhez az egyik oldalon kiválasztott lap a másik oldalon nem kiválasztott lap illeszkedik. A felület lapösszefüggőség garantálja, hogy ilyen él van, amíg nem tartalmazza laphalmazunk a test valamennyi lapját. A lépések száma tehát $(l - 1)$, ahol l a lapok száma, így élhalmazunk $(l - 1)$ élet tartalmaz. Vegyük azt is észre,



7.4. ábra. A bizonyítás zárt poliedrikus felületre

hogy a nem kiválasztott élek halmaza összefüggő és körmentes gráfot alkot. Valóban a kiindulási helyzetben a poliéder teljes élgráfja összefüggő. Az algoritmus egy közbeeső lépése során ebből a rendszerből olyan élet hagyunk el, melynek az egyik oldalán szereplő lap élei közül ez az első elhagyott él. Ez azt is jelenti, hogy ezen lap többi éle az elhagyott él végpontjait összekötő gráfbeli utat jelent, az él elhagyásával a gráf csúcsainak összefüggése nem változik. Ugyanakkor a maradék élek alkotta gráf egy köre olyan zárt élláncot jelent, mely által (a felület egyszeres összefüggősége miatt) meghatározott egyik laphalmaz nem tartalmazhat kiválasztott lapot. Mivel minden lapot az algoritmus során kiválasztottunk, az algoritmus utolsó lépése után már nem lehet kör a megmaradó élek gráfjában. Mivel a kiindulási helyzetben valamennyi csúcsa a testnek a vizsgált gráf egy csúcsa is volt, ez a tulajdonság sem változott meg, azaz a kapott gráf egy fa, melynek csúcsai éppen a poliéder csúcsai. Így a megmaradó (nem hozzávett) élek száma $c - 1$, ahol c a csúcsok száma. Az Euler összefüggés megint adódik. $\square$

7.3.3. Az n -dimenziós formula

Jelen paragrafusban n -dimenziós konvex poliéderre igazoljuk az Euler tételt. A továbbiakban jelölje C a poliédert és $f_j(C)$ a poliéder j -dimenziós lapjainak a számát.

7.3.4. Tétel (Euler formula). *Az n -dimenziós C konvex poliéderre fennáll az alábbi összefüggés:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f_k(C) = 1 + (-1)^{n-1}.$$

Bizonyítás: A bizonyítást a dimenzióra vonatkozó indukcióval végezzük. Az $n = 3$ esetet már láttuk. Tegyük fel, hogy $n > 3$. Tekintsünk egy olyan irányt a térben, amelyre merőleges síkok C -nek legfeljebb 1 csúcsát tartalmazzák. Vegyünk fel a merőleges síkrendszerből $2f_0(C) - 1$ darab H_i síkot úgy, hogy a páratlan sorszámúak csúcson haladjanak át a páros sorszámúak pedig a páratlanok között helyezkedjenek el, azaz $H_1, H_3, \dots, H_{2f_0(C)-1}$ tartalmazzák C egy-egy csúcsát az $(f_0(C) - 1)$ darab páros indexű pedig nem tartalmaz csúcsot. Legyen $C_i := H_i \cap C$. Ekkor C_i $n - 1$ -dimenziós konvex poliéder ha $i \neq 1, (2f_0(C) - 1)$. Definiáljunk egy számláló függvényt a következő módon: Ha F_j j -dimenziós lap, ($j \geq 1$) legyen:

$$\rho(F_j, C_i) = \begin{cases} 0 & \text{ha } C_i \cap \text{relint} F_j = \emptyset \\ 1 & \text{ha } C_i \cap \text{relint} F_j \neq \emptyset \end{cases}.$$

Mivel tetszőleges lap relatív belsejébe eggyel több páros indexű hipersík metsz bele, mint páratlan indexű ezért:

$$\sum_{i=2}^{2f_0(C)-2} (-1)^i \rho(F_j, C_i) = 1.$$

Ezért a j -dimenziós lapokra összegezve, kapjuk, hogy

$$\sum_{F_j} \sum_{i=2}^{2f_0(C)-2} (-1)^i \rho(F_j, C_i) = f_j(C).$$

Így

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j f_j(C) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sum_{F_j} \sum_{i=2}^{2f_0(C)-2} (-1)^i \rho(F_j, C_i).$$

Számoljuk ki ugyanezt az összeget más úton is. Ha először a j -dimenziós lapokra összegzünk rögzített C_i esetén, két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha i páros vagy i páratlan és $j > 1$, akkor

$$\sum_{F_j} \rho(F_j, C_i) = f_{j-1}(C_i),$$

hiszen éppen a C_i poliéder $j - 1$ -dimenziós lapjait számoljuk össze a ρ függvénnyel. Ha i páratlan és $j = 1$ akkor a C_i poliéder csúcsait számoljuk meg azon egy kivételével, mely nem élnek a H_i síkkal való metszeteként adódik, ezért kapjuk, hogy:

$$\sum_{F_j} \rho(F_j, C_i) = f_0(C_i) - 1.$$

Folytassuk számolásunkat a j szerinti alternatív összegzéssel. Ha i páros, akkor a

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sum_{F_j} \rho(F_j, C_i) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j f_{j-1}(C_i),$$

összeget kapjuk és a vizsgált összeg

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sum_{F_j} \rho(F_j, C_i) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j f_{j-1}(C_i) - (-1),$$

ha i páratlan. Használva az indukciós feltételt a C_i $(n-1)$ -dimenziós konvex poliéderre, páros i esetén

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sum_{F_j} \rho(F_j, C_i) = - (1 + (-1)^{n-2}) = -1 + (-1)^{n-1},$$

adódik, míg páratlan i -k esetére

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sum_{F_j} \rho(F_j, C_i) = -(1 + (-1)^{n-2}) + 1 = (-1)^{n-1},$$

adódik. Összegezzünk végül alternatíván i -re:

$$\sum_{i=2}^{2f_0(C)-2} (-1)^i \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \sum_{F_j} \rho(F_j, C_i) = -(f_0(C) - 1) + (-1)^{n-1},$$

adódik, amit az ugyanezen kifejezésre kapott korábbi eredménnyel összevetve, kapjuk, hogy:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j f_j(C) = -(f_0(C) - 1) + (-1)^{n-1}.$$

Ez éppen Euler formulája. □

7.3.4. Euler-Poincare formula

Szimpliciális komplexus

7.3.2. Definíció. Az n -dimenziós euklideszi tér $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ pontjai affin független rendszert alkotnak, ha valamely $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ valós számok esetén fennállnak a

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$$

egyenlőségek, akkor a szereplő együtthatók mind nullák. A pontrendszer affin összefüggő, ha nem affin független.

7.3.1. Megjegyzés. Az n -dimenziós Euklideszi teret egy $(n+1)$ -dimenziós Euklideszi tér $x_{n+1} = 1$ hipersíkjának tekintve az affin összefüggőség jelentése éppen az említett vektorok lineáris összefüggősége. Világos, ezért, hogy az n -dimenziós térben fellépő affin független pontrendszerek számossága $(n+1)$ -et nem haladhatja meg. Szintén evidens, hogy affin független pontrendszer részhalmaza affin független pontrendszer.

7.3.3. Definíció. Szimplexnek nevezzük affin független pontrendszer konvex burkát. A pontrendszer elemei a szimplex csúcspontjai. A szimplex egy lapja a csúcshalmaz valamely részhalmazának konvex burka, azaz szintén szimplex. A lap dimenziója a csúcshalmazának elemszámánál eggyel kisebb szám.

Könnyen igazolható az alábbi két állítás. Ezen bizonyításokat elhagyjuk.

7.3.1. Lemma. A szimplex tetszőleges, a csúcsaitól különböző pontja, két másik pont által meghatározott szakasz felezőpontja. A szimplex csúcspontjai nem felezőpontjai a szimplexhez tartozó valamely szakasznak.

7.3.5. Tétel. A szimplexet a csúcshalmaza egyértelműen meghatározza.

7.3.4. Definíció. A $\mathcal{K}$ szimplexekből álló véges halmazt geometriai szimpliciális komplexusnak nevezzük, ha

1. Tetszőleges szimplexével együtt annak minden lapját is tartalmazza (le szálló rendszer tulajdonság),
2. Ha két szimplexének van közös pontja, akkor metszetük mindkét szimplex lapja (a szabályos csatlakozás tulajdonsága).

A szimpliciális komplexus dimenziója a benne szereplő maximális dimenziós szimplex dimenziója, teste (vagy a hozzá rendelhető poliéder) a szimplexeinek halmazelméleti uniója.

7.3.5. Definíció. Egy absztrakt szimpliciális komplexus egy V véges halmaz és részhalmazainak egy olyan Δ rendszeréből álló pár, aminek az üres halmaz nem eleme, de tetszőleges elemének tetszőleges nem üres részhalmaza szintén eleme. Az absztrakt komplexus dimenziója a Δ maximális elemszámú részhalmaza számosságánál eggyel kisebb szám.

7.3.6. Tétel. Egy k dimenziós absztrakt szimpliciális komplexus mindig realizálható egy $2k+1$ dimenziós Euklideszi tér geometriai szimpliciális komplexusaként.

Bizonyítás: Tekintsünk a d dimenziós tér $\phi(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$ $t \in \mathbb{R}$ momentum görbét. Ezen tetszőleges $(d+1)$ darab $t_0, \dots, t_d$ pont affin független pontrendszert alkot, hiszen a $d+1$ dimenziós tér $(1, t_i, \dots, t_i^d)^T$ $i = 0, \dots, d$ vektoraiból mint oszlopokból álló Vandermonde determináns különböző t_i -k esetén nem nulla. Helyezzük el a komplexus csúcspontjait a $2k+1$ dimenziós tér egy momentum görbéjén. Igazoljuk, hogy két szimplexének konvex burka a szimplexek metszetének konvex burkával azonos. (A szimplexek szabályosan csatlakoznak.) Legyen a két szimplex S_1 és S_2 , $\mathbf{x}$ pedig egy közös pontjuk. Ekkor

$$x = \sum_{i=1}^{k_1} \alpha'_i \mathbf{x}'_i = \sum_{i=1}^{k_2} \alpha''_i \mathbf{x}''_i,$$

ahol $\sum_{i=1}^{k_1} \alpha'_i = \sum_{i=1}^{k_2} \alpha''_i = 1$ a nem negatív α'_i, α''_i együtthatókkal. Mivel a szereplő $\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}''_i$ pontok együttes száma nem haladja meg $2k+2$ -t ezért a vizsgált csúcsok együtt affin független pontrendszert adnak a lemma szerint. A két egyenlőséget kivonva egymásból a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{k_1} \alpha'_i \mathbf{x}'_i - \sum_{i=1}^{k_2} \alpha''_i \mathbf{x}''_i = \\ &= \sum_{\mathbf{x}'_i \ni S_2} \alpha'_i \mathbf{x}'_i + \sum_{\mathbf{x}'_i \in S_2} (\alpha'_i - \alpha''_i) \mathbf{x}'_i - \sum_{\mathbf{x}''_i \ni S_1} \alpha''_i \mathbf{x}''_i \end{aligned}$$

egyenlőséghez jutunk, melyben az együtthatók összege zérus. Az affin függetlenség miatt minden együttható nulla, így az eredeti együtthatók közül csak a közös csúcsokhoz rendelték nem nullák (és a két szimplexre vonatkozólag ugyanazok.) Azaz a konvex burkok metszetének tetszőleges pontja a szimplexek közös csúcsai konvex kombinációjaként áll elő, ahogy állítottuk. $\square$

Homológia csoport és a Betty számok

A $\mathcal{K}$ komplexus azonos dimenziós szimplexeit egy rögzített sorrendben felsorolva egy alkalmas G csoportból vett együtthatókkal formális kifejezéseket hozunk létre, ezeket *lánckoknak* nevezzük. A lánckok dimenziója a benne szereplő szimplexek dimenziója, legyen például r . Az r dimenziós lánckokon definiáljuk a komponensenkénti összeadás műveletét, mint additív csoport műveletet. A G csoportnak válasszuk pld. az egész számok csoportját. A fenti műveletre az r -dimenziós lánckok egy $L^r(\mathcal{K})$ csoportot alkotnak. A $\mathcal{K}$ komplexus szimplexeit irányítjuk, azaz $\pm$ előjelekkel látjuk el a csúcsaik egy sorrendjét. Két sorrend kapjon azonos előjelet, ha páros inverziószámban különbözik permutációjuk. Minden szimplex irányítása legyen koherens a többivel, azaz ha egy lap csúcsainak egy $(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_l)$ sorrendje az ϵ előjelet kapta,

akkor az i -edik csúcs elhagyásával kapott $(\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_l)$ sorrend előjele legyen $(-1)^i \epsilon$. Egy koherensen irányított A^r szimplex $\Delta(A^r)$ határa az az $(r-1)$ -dimenziós lánc, mely az irányított $(r-1)$ -dimenziós $B_i^{(r-1)}$ lapjait egy a többi nulla együtthatóval tartalmazza, azaz

$$\Delta(A^r) := B_0^{(r-1)} + \dots + B_r^{(r-1)}.$$

A nulldimenziós szimplexek határa legyen nulla, az r -dimenziós lánc határa a benne szereplő szimplexek határainak ugyanazon együtthatókkal vett összege, azaz

$$\Delta(x) = \Delta\left(\sum_{i=1}^{\alpha_r} g_i A_i^r\right) := \sum_{i=1}^{\alpha_r} g_i \Delta(A_i^r).$$

7.3.7. Tétel. $\Delta\Delta(x) = 0$

Bizonyítás: Az állítást nyilván elég szimplexekre belátni. Legyen $S^r = +[P_0, P_1, P_2, \dots, P_r]$ egy irányított szimplex. Jelölje S_i^{r-1} az S^r szimplex P_i csúcsának elhagyásával kapott szimplexet az S^r szimplexszel koherens módon irányítva, és $S_{i,j}^{r-2}$ (ahol $i \neq j$) az S_i^{r-1} szimplex P_j csúcsának elhagyásával keletkezett szimplexet koherens módon irányítva. Vegyük észre, hogy $S_{j,i}^{r-2} = -S_{i,j}^{r-2}$ minden $i \neq j$ esetén. Azaz:

$$\Delta\Delta S^r = \sum_i S_i^{r-1} = \sum_i \left(\sum_{j,j \neq i} S_{i,j}^{r-2} \right) = 0.$$

□

7.3.6. Definíció. Az x r -dimenziós lánc egy ciklus, ha $\Delta x = 0$. A ciklusok családját $Z_G^r(K)$ -val vagy Z^r -rel jelöljük.

Megjegyezzük, hogy az előző tétel alapján egy tetszőleges lánc határa ciklus, mert a határa 0.

7.3.7. Definíció. Egy z r -dimenziós ciklus 0-val homológ, ha határa egy $(r+1)$ -dimenziós láncnak. Jele $z \sim 0$. A 0-val homológ ciklusok részcsoportját $H_G^r(K)$ -val, vagy H^r -rel jelöljük.

7.3.2. Megjegyzés. Az alábbi észrevételek a definíciók következményei:

- Ha $r = 0, 1, \dots, n$, akkor $H^r \leq Z^r \leq L^r$.
- A $\Delta : L^r \rightarrow L^{r-1}$ függvény egy homomorfizmus.
- $Z^r = \text{Ker}\Delta$ és $H^{r-1} = \text{Im}\Delta$.

- $H^{r-1} \cong L^r/Z^r$.

7.3.8. Definíció. Az x, y ciklusok homológok, ha $x - y \sim 0$. A $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexus r -dimenziós Betti-csoportja a $B^r = B_G^r(K) = Z^r/H^r$ faktorcsoport. Azaz a B^r csoport elemei az egymással homológ r -dimenziós láncok ekvivalenciaosztályai.

7.3.9. Definíció. Ha $\mathcal{K}$ egy szimpliciális komplexus, és $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ szintén egy szimpliciális komplexus, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{L}$ a $\mathcal{K}$ egy részkomplexusa.

7.3.10. Definíció. A $\mathcal{K}$ komplexus összefüggő, ha nem bontható fel két részkomplexusra uniójára úgy, hogy a két részkomplexusnak nincs közös szimplexe. Az $\mathcal{L}$ komplexus a $\mathcal{K}$ komplexus komponense, ha összefüggő és a tartalmazásra nézve maximális: azaz ha $\mathcal{K}$ -nak nincs olyan összefüggő részkomplexusa, mely $\mathcal{L}$ -et valódi részkomplexusként tartalmazza.

7.3.2. Lemma. A $\mathcal{K}$ komplexus pontosan akkor összefüggő, ha bármely P, Q $\mathcal{K}$ -beli csúcsokra létezik $\mathcal{K}$ -beli csúcsoknak egy olyan $P_0, P_1, \dots, P_m$ sorozata, hogy $P_0 = P$, $P_m = Q$, és $i = 1, 2, \dots, m$ esetén $[P_{i-1}, P_i]$ egy $\mathcal{K}$ -beli szimplex.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$ nem összefüggő, azaz felírható $\mathcal{K} = \mathcal{L} \dot{\cup} \mathcal{M}$ alakban, ahol $\mathcal{L}$ és $\mathcal{M}$ $\mathcal{K}$ részkomplexusai. Legyen $P \in \mathcal{L}$ és $Q \in \mathcal{M}$. Legyen $P = P_0, P_1, \dots, P_m = Q$ egy tetszőleges csúcssorozat. Jelölje s a legnagyobb indexet, melyre $P_s \in \mathcal{L}$. Mivel $Q \in \mathcal{M}$, így $s < m$. Vegyük észre, hogy ekkor $P_s \in \mathcal{L}$ és $P_{s+1} \in \mathcal{M}$ miatt $[P_s, P_{s+1}]$ nem szimplexe sem az $\mathcal{L}$, sem az $\mathcal{M}$ részkomplexusnak, és így nem eleme $\mathcal{K}$ -nak sem, tehát a csúcssorozat nem felel meg a lemmában szereplő feltételeknek.

Tegyük fel most, hogy léteznek $P, Q \in \mathcal{K}$ csúcsok, melyeket nem lehet összekötni $\mathcal{K}$ -beli élekkel. Jelölje most rendre L és M $\mathcal{K}$ csúcshalmazának azon részhalmazait, melyek $\mathcal{K}$ -beli élekkel összeköthetőek, illetve nem köthetőek össze P -vel. Legyenek az $\mathcal{L}$ részkomplexus szimplexei azon $\mathcal{K}$ -beli szimplexek, melyek minden csúcsa L -beli. Hasonlóan definiáljuk az $\mathcal{M}$ részkomplexust. Belátjuk, hogy $\mathcal{K} = \mathcal{L} \dot{\cup} \mathcal{M}$. Vegyük észre, hogy ehhez elegendő belátni, hogy nincs olyan $\mathcal{K}$ -beli él, mely egy L -beli és egy M -beli csúcsot köt össze. Ez viszont következik abból, hogy ha X összeköthető P -vel és $[X, Y] \in \mathcal{K}$, akkor Y is összeköthető P -vel. $\square$

7.3.1. Következmény. Szimpliciális komplexusokra, ellentétben a topologikus terekkel, az összefüggőség és az élösszefüggőség ekvivalens fogalmak.

7.3.3. Megjegyzés. Belátható, hogy minden szimpliciális komplexus véges sok komponens, páronként diszjunkt uniójára bontható.

A következő (általunk most nem bizonyított) tétel jól használható a Betti csoportok meghatározásánál.

7.3.8. Tétel. *Jelölje a $\mathcal{K}$ szimpliális komplexus komponenseit $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots, \mathcal{K}_p$. Ekkor $B^r(K) = B^r(K_1) + B^r(K_2) + \dots + B^r(K_p)$.*

Az Euler-Poincare formula meghatározásához emlékeztetünk néhány kommutatív csoportokra vonatkozó definícióra és állításra.

7.3.11. Definíció. *Legyen G egy additív kommutatív csoport. Ha $\{g_i : i \in I\}$ egy olyan részhalmaza, hogy a csoport tetszőleges g eleme felírható $g = \sum_{i \in I'} n_i g_i$ alakban, ahol tetszőleges i indexre $g_i \in G$, $n_i \in \mathbb{Z}$, és $\text{card } I' < \infty$, akkor azt mondjuk, hogy $\{g_i : i \in I\}$ a G csoport egy generátorrendszere. Ha egy csoportnak van véges generátorrendszere, akkor azt mondjuk, hogy végesen generált.*

7.3.4. Megjegyzés. *A végesen generált kommutatív csoportok alaptétele értelmében tetszőleges G végesen generált kommutatív csoport előáll*

$$G = A_1 + A_2 + \dots + A_p + B_1 + B_2 + \dots + B_q$$

alakban, ahol tetszőleges i -re A_i egy szabad ciklikus csoport (azaz $A_i \cong \mathbb{Z}$), és B_i olyan véges ciklikus csoport, melyre a $\text{card} B_i = \tau_i$ jelöléssel $\tau_i | \tau_{i+1}$.

7.3.12. Definíció. *Legyen $G = A_1 + A_2 + \dots + A_p + B_1 + B_2 + \dots + B_q$ egy kommutatív csoport, ahol G komponensei rendelkeznek az előző megjegyzésben szereplő tulajdonságokkal. Ekkor G rangja $\rho(G) = p$. Ha G rangja nulla, de*

$$\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_q = m$$

valamely m prímre, akkor G m -modulusra vonatkozó rangja (vagy röviden mod m rangja) $\rho_m(G) = q$.

Könnyen látható, hogy végesen generált kommutatív csoport rész- és faktorcsoporthai is végesen generáltak.

A bizonyításhoz elég meggondolni, hogy egy generátorrendszernek egy adott részcsoportba eső elemei generálják a részcsoportot, és egy generátorrendszer által a faktorcsoporthban indukált részhalmaz generátorrendszer.

7.3.13. Definíció. *Legyen G egy végesen generált kommutatív csoport. A $\{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq G$ halmaz lineárisan független, ha $\sum_{i=1}^k n_i g_i = 0$ és $n_i \in \mathbb{Z}$ esetén bármely i -re $n_i = 0$. Ha egy lineárisan független rendszer nem bővíthető, akkor az a G csoport egy bázisa.*

Vegyük észre, hogy a fenti definíció alapján véges rendű elem nem lehet tagja egy lineárisan független rendszernek, ugyanis ha g rendje $(0 <) |g| < \infty$, akkor $|g|g = 0$. Így nulla-rangú csoportnak nem lehet bázisa a fenti értelemben. Vegyük észre azt is, hogy a nullelem az egyetlen véges rendű elem, mely előáll lineárisan független elemek lineáris kombinációjaként. Ugyanis ha $\sum_{i=1}^k n_i g_i = g$, ahol $|g| < \infty$, akkor $\sum_{i=1}^k |g| n_i g_i = |g|g = 0$, így az elemek lineáris függetlensége miatt minden i -re $|g| n_i = 0$, azaz $n_i = 0$. Ekkor viszont $g = \sum_{i=1}^k n_i g_i = 0$.

7.3.14. Definíció. Legyen G egy nulla-rangú végesen generált kommutatív csoport, melynek van $\bmod m$ rangja valamely m prímre. A $\{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subseteq G$ halmaz az m -modulusra nézve lineárisan független, ha $\sum_{i=1}^k n_i g_i = 0$ és $n_i \in \mathbb{Z}$ esetén bármely i -re $m | n_i$. Egy nem bővithető m -modulusra nézve lineárisan független rendszert m -modulusra nézett bázisnak nevezzük.

Nem nehéz bizonyítani a következő két tételt:

7.3.9. Tétel. Legyen G egy végesen generált kommutatív csoport. Ha G rangja p , akkor G minden bázisának elemszáma p . Ezenkívül, ha G rangja az m -modulusra nézve q , akkor minden m -modulusra nézett bázisának elemszáma q .

7.3.10. Tétel. Legyen G egy végesen generált kommutatív csoport, és H egy részcsoportja. Ekkor $\rho(G) = \rho(H) + \rho(G/H)$.

Most már készen állunk az Euler-karakterisztika definiálására.

7.3.15. Definíció. Egy $\mathcal{K}$ komplexus Euler-karakterisztikája a

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f_i$$

összeg, ahol f_i jelöli a komplexus i -dimenziós szimplexeinek számát.

Az Euler-Poincare formula most már igazolható.

7.3.11. Tétel (Euler-Poincare formula). Legyen $\mathcal{K}$ egy n -dimenziós szimpliális komplexus, Jelölje ρ_m^i a komplexus i -dimenziós G_m feletti i -dimenziós Betti-csoportjának rangját, ahol $G_m = \mathbb{Z}_m$, ha $m > 0$ egy prím, és $G_0 = \mathbb{Z}$. Ekkor

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \rho_m^i.$$

Bizonyítás: Tetszőleges $i = 1, 2, \dots, n$ esetén

$$f_i = \rho_m(L_m^i) = \rho_m(Z_m^i) + \rho_m(L_m^i/Z_m^i) = \rho_m(Z_m^i) + \rho_m(H_m^{i-1}),$$

valamint $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\rho_m^i = \rho_m(B_m^i) = \rho_m(Z_m^i/H_m^i) = \rho_m(Z_m^i) - \rho_m(H_m^i).$$

Így $i = 1, 2, \dots, n$ esetén

$$f_i = \rho_m^i + \rho_m(H_m^i) + \rho_m(H_m^{i-1}).$$

Ezt, valamint az $f_0 = \rho_m(L_m^0) = \rho_m(Z_m^0) = \rho_m^0 + \rho_m(H_m^0)$ azonosságot felhasználva:

$$\chi(K) = \rho_m^0 + \rho_m(H_m^0) + \sum_{i=1}^n (-1)^i (\rho_m^i + \rho_m(H_m^i) + \rho_m(H_m^{i-1})) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \rho_m^i.$$

□

Végül belátjuk, hogy a most definiált fogalom konvex poliéderekre az előző fejezetben definiált Euler összefüggéshez vezet. Ehhez használunk egy fontos állítást, amelyet a Betti csoportok invariancia tételének is lehet nevezni,

7.3.12. Tétel (Betti csoportok invariancia tétele). *Ha két komplexus poliédere homeomorf, akkor tetszőleges dimenziós Betti csoportjaik izomorfak egymással.*

Ezen tétel bizonyítása meghaladja könyvünk kereteit, most csak egy érdekes következményét igazoljuk.

7.3.13. Tétel. *Ha S egy olyan szimpliciális komplexus, melynek poliédere egy n -dimenziós P konvex poliéder, akkor S Euler-karakterisztikája 1.*

Bizonyítás: Az előző tétel szerint homeomorf topológikus terek megfelelő Betti-csoportjai izomorfak. Tehát minden szimpliciális komplexusnak, melynek a poliédere egy n -dimenziós konvex politóp, megegyezik az Euler-karakterisztikája. Könnyen belátható, hogy egy n -dimenziós szimplex Euler-karakterisztikája 1. Mivel az n -dimenziós konvex poliéderek homeomorfak, ebből az állítás már következik. □

Az Euler-Poincaré formula most az Euler összefüggéshez vezet, valóban:

7.3.5. Megjegyzés. *Ha P egy n -dimenziós konvex poliéder, mely i -dimenziós lapjainak száma g_i , akkor az Euler tétel alapján*

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f_i = (-1)^{n-1} + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i g_i,$$

mutatja, hogy a konvex poliéder fenti topológikus invariánsa az Euler karakterisztika a poliéder lapjainak számából az Euler összefüggés segítségével kapható. Így az Euler összefüggés kiterjesztésének tekinthető az Euler-Poincare karakterisztika.

7.3.5. Cauchy-féle poliéder tétel

Az Euler tétel egy alkalmazásaként álljon itt két fontos és érdekes tétel az elemi háromdimenziós geometria köréből. A Cauchy-féle merevségi tétel egy olyan nem triviális alkalmazás, mely egy új vizsgálati irány első tételként tekinthető. Számos érdekes eredményhez vezettek azok a kutatások, melyek testek deformálhatóságának-merevségének kérdéskörében vetettek fel új problémákat. Az alapkérdés a következő, van-e két olyan poliéder, melyek páronként egybevágó lapokból azonos kombinatorikus szerkezettel állíthatók elő, és mégsem egybevágóak? Miután tisztáztuk, hogy mit jelent az azonos kombinatorikus szerkezet a válasz igenlő. Tekintve ugyanis egy kockát, egyik lapjára állíthatunk egy egyenlő-négyszögű gúlát, melynek magassága a kocka élhosszána a fele, de ugyanezt a tömörnek tekintett kockából el is vehetjük. Világos, hogy a két test nem egybevágó, de páronként egybevágó lapokból, azonos kombinatorikus szerkezettel épül fel. A probléma az, hogy konvex testet hasonlítottunk nem konvex testtel. Ugyanakkor észrevehetjük azt is hogy a lapok alakjának változtatása nélkül folytonos módon a két testet nem tudjuk egymásba deformálni. Ez elvezet minket a konvex testek deformálhatatlanságának gondolatához, két konvex test, azonos kombinatorikus szerkezettel, egybevágó megfelelő lappárokból felépítve talán már egybevágó. Célunk ezen állítás bizonyítása Cauchy bizonyítását alapul véve.

7.3.16. Definíció. *A poliéder laphálóját a csúcsokból, élekből, lapokból mint elemekből alkotott azon parciálisan rendezett halmaz, ahol a rendezést a halmazelméleti tartalmazás definiálja. Két poliéder azonos kombinatorikus szerkezettel rendelkezik, ha laphálójuk izomorf, azaz található olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés, mely csúcsot csúcsba, éleket élbe, lapot lapba visz úgy, hogy a tartalmazást mint relációt őrzi.*

7.3.14. Tétel (Cauchy-merevségi tétele). *Két azonos kombinatorikus szerkezettel rendelkező konvex poliéder egybevágó, ha a megfelelő lapok egybevágóak.*

A bizonyítás előtt szükségünk lesz némi előkészületre a szférikus geometria köréből. Mint láttuk a gömbi koszinusz tétel alapján állíthatjuk, hogy ha két gömbi háromszögben két-két oldal megegyezik és az egyikben a közrezárt szög nagyobb, akkor ezen háromszög harmadik oldala nagyobb mint a másik háromszög harmadik oldala. Ezt az állítást kiterjeszthetjük a gömbi konvex sokszögek úgynevezett „kar lemmájává”.

7.3.3. Lemma (Kar lemma a gömbön). *Legyen $A_i, \overline{A}_i$ két gömbi sokszög csúcsai. Tegyük fel, hogy*

$$A_i A_{i+1} = \overline{A}_i \overline{A}_{i+1} \text{ teljesül } i = 1, \dots, n-1$$

esetén, és fennállnak az

$$A_{i-1} A_i A_{i+1} \angle \leq \overline{A}_{i-1} \overline{A}_i \overline{A}_{i+1} \angle$$

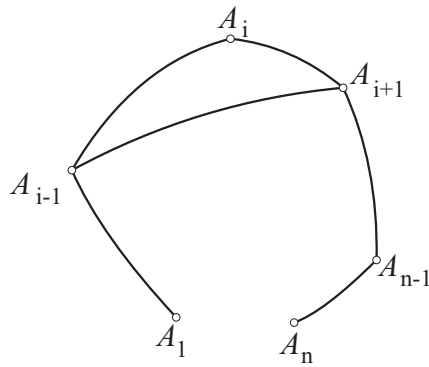
összefüggések, $2 \leq i \leq n-1$ esetén. Ekkor az

$$A_1 A_n \leq \overline{A}_1 \overline{A}_n$$

egyenlőtlenség is teljesül.

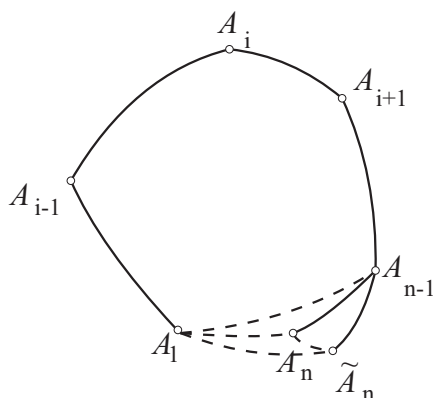
Bizonyítás: n -re vonatkozó indukciót alkalmazunk. Az $n = 3$ esetet már láttuk. Ha $n > 3$, akkor három esetet különböztetünk meg:

- Van olyan i , hogy $A_{i-1} A_i A_{i+1} \angle = \overline{A}_{i-1} \overline{A}_i \overline{A}_{i+1} \angle$
- Nincs ilyen i , de az utolsó $A_{n-2} A_{n-1} A_n \angle$ szög növelhető az első sokszög konvexitásának megtartásával az $\overline{A}_{n-2} \overline{A}_{n-1} \overline{A}_n \angle$ értékig,
- Nincs ilyen i , és az utolsó $A_{n-2} A_{n-1} A_n \angle$ szög első sokszög konvexitásának megtartásával csak egy közbeeső $\alpha < A_{n-2} \overline{A}_{n-1} \overline{A}_n \angle$ szög értékig növelhető.



7.5. ábra. Van egyenlő megfelelő szögpár

A második és harmadik esetet úgy értjük, hogy az utolsó $A_{n-1} A_n$ szakaszt az A_{n-1} pont körül forgatjuk oly módon, hogy a vizsgált szög növekedjen. Ilyenkor két eset fordulhat elő, vagy el tudjuk forgatni a kellő mértékben az élet, úgy, hogy az $A_1 A_2$ egyenesének nem kerül A_n a túlsó oldalára (7.6. ábra),

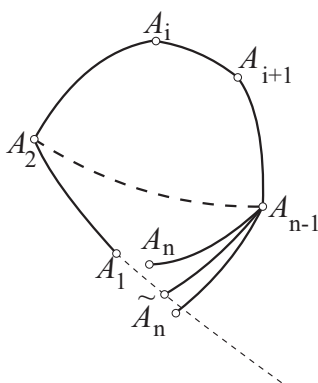


7.6. ábra. Amikor nem romlik el a konvexitás

vagy csak addig forgathatjuk, amíg A_2, A_1, A_n kollineáris ponthármassá nem válik. Ebben az esetben (ld. 7.7. Ábra) az utolsó vizsgált szög még mindig kisebb, mint a második sokszögben neki megfelelő szög.

Az első két esetben az indukciós lépés a közös szögértéknek megfelelő csúcsok elhagyása a sokszögekből, a kiindulási feltételek öröklődését pedig az elhagyott háromszögek egybevágósága garantálja. Mindkét esetben az indukciós feltétel alkalmazása és a Kar lemma $n = 3$ esete a kívánt eredményhez vezet.

Kicsit ügyesebben kell dolgozni a harmadik esetben. Ekkor a 7.7 Ábrának megfelelően az $A_2 \dots A_{n-1} \widetilde{A}_n$ $(n - 1)$ -oldalú konvex gömbi sokszöget hasonlítjuk az $\overline{A}_2 \dots \overline{A}_n$ konvex gömbi sokszöggel és megállapíthatjuk, hogy $A_2 \widetilde{A}_n \leq \overline{A}_2 \overline{A}_n$. Azonban $A_2 A_1 + A_1 \widetilde{A}_n = A_2 A_n$ és $\overline{A}_2 \overline{A}_n \leq \overline{A}_2 \overline{A}_1 + \overline{A}_1 \overline{A}_n$, ezért a kérdéses egyenlőtlenség megint fennáll. $\square$



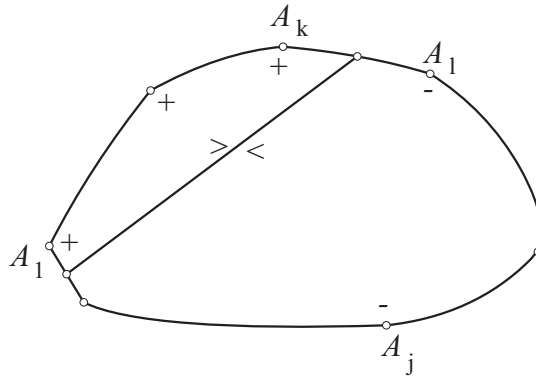
7.7. ábra. Amikor elromlik a konvexitás

A „kar lemma” egy szép következménye a „jel lemma”. Ebben megint két

konvex gömbi sokszöget hasonlítunk össze, most a megfelelő oldalak egyenlőségét tesszük fel. A megfelelő szögek összehasonlítását $+$ és $-$ jelek hozzárendelésével segítjük. Az első sokszög egy csúcsára $+$ jelet teszünk, ha abban a sokszögben a vizsgált csúcsnál nagyobb szög található, mint a másik sokszögben. A jele $-$, ha az első sokszögben a megfelelő szög kisebb mint a másodikban. Nem írunk jelet egyenlőség esetén. *Jelváltásról* beszélünk, ha az óramutató járásával megegyező irányban az első sokszög csúcsain haladva, olyan jelhez érünk, amely az előtte talált jeltől különbözik. (A nem jelölt csúcsokon átlépünk a jelváltást mindig jelhez asszociáljuk.)

7.3.4. Lemma (Jel lemma). *Ha van jel, akkor legalább négy jelváltást találunk.*

Bizonyítás: Mivel teljes kört írunk le a sokszög körül a jelváltások száma páros. Ha van jel, akkor van másik típusú jel is ellenkező esetben a kar lemmával ellentmondásba kerülnénk. Elég azt igazolni, hogy pontosan két jelváltás nem lehetséges. Két jelváltás csak úgy fordulhat elő, ha a $+$ jelek és $-$ jelek két tömböt alkotnak, ahogy ezt a 7.8 ábrán ábrázoltuk.



7.8. ábra. Kisebb vagy nagyobb?

A $+$ jelek helyezkedjenek el az A_1 és A_k ($i \leq k$) által meghatározott felső íven, ahol A_1 és A_k is $+$ -al van jelölve a $-$ jelek a komplementer íven úgy, hogy az A_l ($k < l$) illetve A_j ($l \leq j \leq n$) $-$ -al jelöltek. Kössük össze az $A_n A_1$ szakasz egy pontját az $A_{l-1} A_l$ szakasz egy pontjával, és rajzoljuk meg a megfelelő szakaszt a másik sokszögben is. Világos, hogy a kar lemma feltételei mindkét „fél sokszög” esetében teljesülnek, akár azt tekintjük, amelyen a $+$ jelek vannak, akár azt, amelyen a $-$ -ok. Ez viszont azt jelenti, hogy az első sokszögben általunk behúzott szakasz egyszer nagyobb a második sokszögben behúzottnál, másodszor pedig kisebb. Mivel ez nem lehetséges, lehetetlen az is, hogy két jelváltás lépjen fel. $\square$

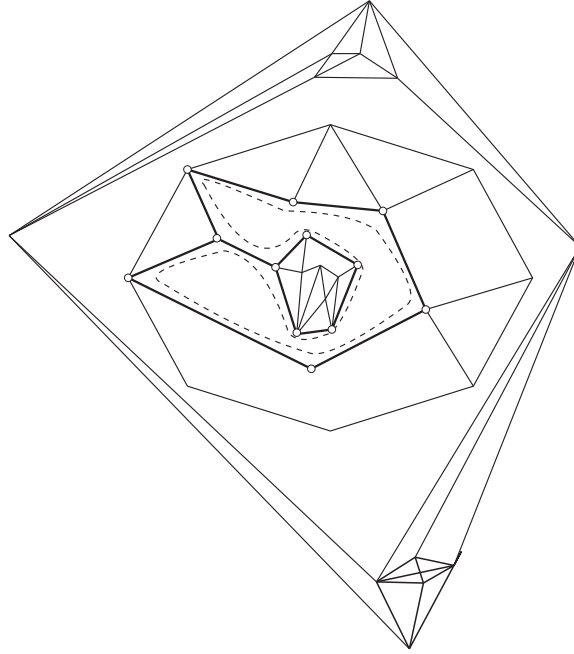
Most igazoljuk Cauchy merevségi tételét.

Bizonyítás: A tétel bizonyítását két esetre bontjuk.

Vegyük először észre, hogy a laphálók izomorfizmusa, a megfelelő lapok egybevágósága és a megfelelő éleknél fellépő lapszögek egyenlősége elegendő a két konvex poliéder egybevágóságához. Valóban az Euler tétel bizonyításában megkonstruáltunk egy lapláncot, mely felsorolja a poliéder lapjait. A laphálóizomorfizmus az első poliéderhez tartozó ezen láncot a második poliéder egy megfelelő lapláncába viszi. Építsük fel a második poliédert laponként ezen meghatározott sorrendet figyelembe véve. Egy újabb lap hozzáadása a megfelelő éleknél fellépő lapszögek egyenlősége folytán kétféleképpen történhet. A két lehetőség azonban csak a második lap esetében azonos értékű, hiszen a további lapok hozzávételekor figyelembe kell vennünk a konvexitást is, egy lap síkja által meghatározott félterek közül csak az egyik tartalmazhat pontokat a poliéderből. Azaz a lapláncban szereplő lapok egymáshoz (a második kivételével) egyértelműen, ráadásul az első poliédernek megfelelő módon csatlakoznak. Mivel maguk a lapok az első poliéderben szereplő lapokkal egybevágóak, a felépített poliéder egybevágó lesz az első poliéderrel. Azaz állításunk igaz, ha a megfelelő lapszögek egyenlők.

Másodszor tegyük fel, hogy vannak olyan megfelelő lapszögek, melyek nem egyenlők. Az első poliéder éleit jelöljük $+$ -al és $-$ -al, aszerint, hogy a hozzá tartozó lapszög nagyobb vagy kisebb a második poliéder megfelelő élénél fellépő megfelelő lapszögnél. Egy nem jelölt él két oldalán fellépő lapokat az él mentén ragasszuk össze az élet azonban tartsuk számon, hogy a bizonyítás egy későbbi pontján újra vissza ragaszthassuk az élhálózathoz. Tekintsük a továbbiakban élnek a jelölt éleket, csúcsnak azon poliéder csúcsokat, melybe megy jelölt él, lapnak az összes összeragasztás elvégzése után kapott lapuniókat. Az eképpen kapott csúcs-él-lap rendszerhez (melyet topológikus poliédernek nevezhetünk) tartozó csúcsok köré rajzolt picike gömbök felszínéből a két eredeti poliéder olyan gömbi konvex sokszögeket metsz ki, melyek a „jel lemma” feltételeinek megfelelnek. (Az eredetileg a poliéder éleire írt jelek, most a gömbi sokszögek szögeire írt jelekként tekinthetők.) A csúcskiválasztásaink azt is garantálják, hogy ezen sokszögek csúcsaira vannak jelek írva. Megszámolhatjuk tehát csúcsonként a jelváltások számát, amely összegről a „jel lemma” alapján tudjuk, hogy legalább $4c'$, ahol c' jelöli az általunk létrehozott topológikus poliéder csúcsainak számát. Ugyanezt a jelváltás számot másképp is becsülhetjük. A topológikus poliéder egy lapjának élein (valamely adott körüljárás szerint) körbehaladva érzékelt valamely jelváltás egy csúcs körüljárásával érzékelt (gömbi sokszögre vonatkozó) jelváltásnak is megfelel és fordítva, minden első módon érzékelt jelváltás a második módon is fellép. Ezért felülről is megbecsülhetjük a poliéderre vonatkozó jelváltások számát, ha ezeket új poliéderünk lapjain azok oldalszámához viszonyítjuk.

Tekintettel arra, hogy az új lapok új élei nem feltétlenül élei más új lapnak is, az éleket egyszer vagy kétszer vesszük figyelembe a lap élszámának meghatározásakor, aszerint, hogy a lap pontjain haladva azt az élek mentén körbejárva hányszor haladunk el mellette (lásd 7.9. ábra). Jelöljük az így kapott oldalszámokat a k' paraméterrel, míg a lapok határán konkrétan fellépő élek számát k -val.



7.9. ábra. Új lapok

Ekkor a $\sum_{k' \geq 3} k' \alpha_{k'} = 2e'$ összefüggés megint fennáll a topológikus poliéder e' élszámára ha $\alpha_{k'}$ a k' oldalú topológikus lapok száma. (Hiszen minden élet pontosan kétszer számolunk össze, legfeljebb ez két számlálás egy lap éleinek figyelembe vételével megtörténik.) Azt is rögtön észrevehetjük, hogy egy k' oldalú lapon legfeljebb $2 \left\lfloor \frac{k'}{2} \right\rfloor$ előjelváltást találhatunk így az előjelváltások σ számára a

$$4c' \leq \sigma \leq \sum_{k' \geq 3} 2 \left\lfloor \frac{k'}{2} \right\rfloor \alpha_{k'} \leq \sum_{k' \geq 3} (2k' - 4) \alpha_{k'} = 4(e' - l')$$

áll fenn. Ez a

$$c' - e' + l' \leq 0$$

összefüggéssel egyenértékű. A továbbiakban egyesével adjuk az új élek hálózatahoz azokat az éleket, melyek mentén lapokat ragasztottunk össze. Mindig

olyan élet adoptálunk, amely egyik végpontja a már rendelkezésre álló élhálózathoz tartozik. Evvel a feltétellel garantáljuk, hogy az élhálózat élszáma mindig eggyel nő a csúcsszáma pedig legfeljebb eggyel. Ekkor a másik végpontra két lehetőség adódik:

- Új csúcspont kerül vele a hálózathoz (csúcsszám eggyel nőtt), ekkor a lapszám nem nőhet, új lap nem jöhetett létre;
- Egy már a hálózathoz tartozó csúcs a másik végpont is (a csúcsszám nem nőtt), ekkor a kapott új él vagy kettévág egy lapot és így növeltük a lapszámot, vagy nem vágott ketté egy lapot és a lapszám megint nem nőtt.

Akármelyik esetet is tekintjük a „csúcsszám mínusz élszám plusz lapszám” mennyiség egy ilyen lépés során nem nőhet. Amíg van nem adoptált él az eredeti érendszer összefüggősége miatt olyan is van, amelyet az adott pillanatban adoptálni lehet, ezért eljárásunk csak akkor fejeződik be, amikor valamennyi élet visszacsatoltuk és a csúcs, él, lapszám paraméterek a kiindulási konvex poliéderhez tartozó értékeket veszik fel. Mivel konvex poliéderre $c - e + l = 2$ áll fenn ellentmondáshoz jutottunk, mely feloldása, hogy ezen második eset (nevezetesen, hogy van megfelelő élekhez tartozó különböző lapszög pár) nem lehetséges. $\square$

7.4. A csodák birodalma

*A csodák nem természeti törvényekkel állnak ellentmondásban,
csupán azzal, amit a természetről tudunk.*

Szent Ágoston

7.4.1. Szabályos poliéderek kombinatorikus típusai

7.4.1. Definíció. Egy konvex poliéder adott csúcshoz tartozó csúcsalakzata a csúcsból induló élek másik végpontjainak konvex burka. A 3 dimenziós, konvex poliéder szabályos, ha lapjai egybevágó konvex sokszögek, és a csúcsalakzatai szintén egybevágó szabályos sokszögek.

Az Euler tétel segítségével könnyen beláthatjuk, hogy szabályos poliéder csak öt féle kombinatorikus típusnak felelhet meg, ezeket az alábbi táblázatban találhatjuk:

n	m	e	elnevezés
3	3	6	tetraéder
3	4	12	oktaéder
3	5	30	ikozaéder
4	3	12	kocka
5	3	30	dodekaéder

Valóban, mivel definíciónk szerint minden csúcsban ugyanannyi él (pld. m darab) található, a csúcsok számának m -szerese megegyezik az élek számának kétszeresével. (Minden élet mindkét végpontjánál megszámloltunk.) Ha a lapjai n -szögek, a lapok számának n -szerese szintén megegyezik az élek számának kétszeresével. (Minden élet mindkét őt tartalmazó lapnál megszámloltuk.) A kapott két egyenletből c -t és l -t kifejezzük majd Euler képletébe helyettesítünk. Átrendezve az

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$$

összefüggéshez jutunk. n és m kettőnél nagyobb egészek $1/e$ pozitív, ezért csak a következő természetes számok oldhatják meg az egyenlőséget:

$$(n, m) \in \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)\},$$

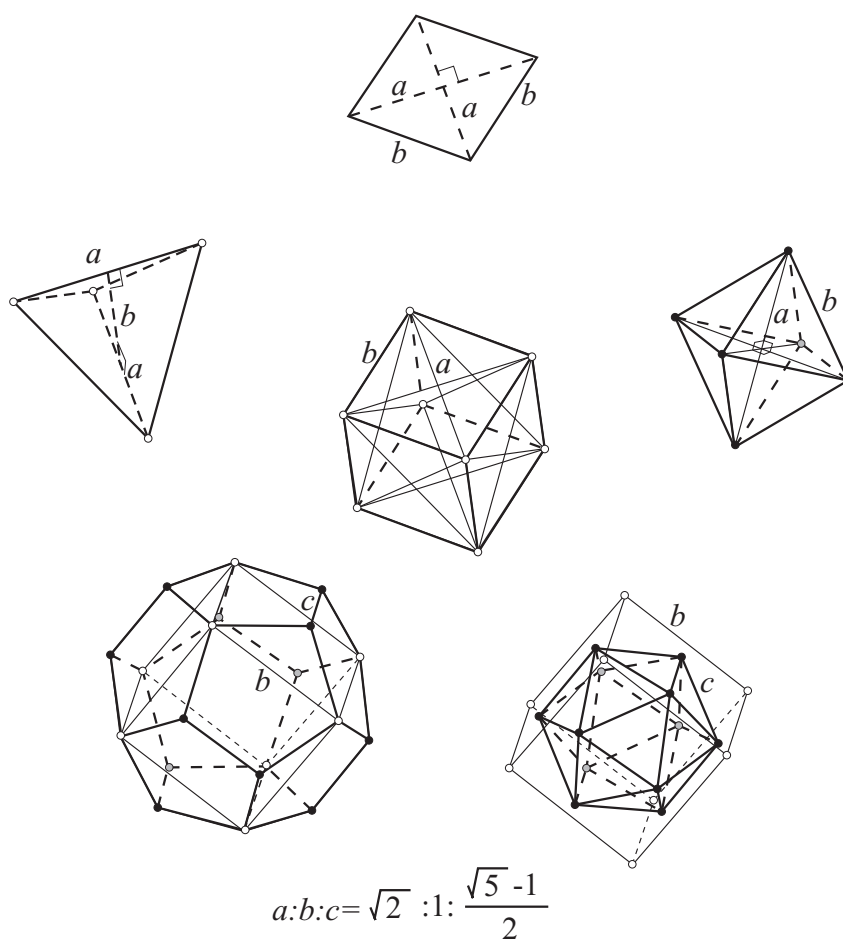
ahogy ezt a táblázatban láthatjuk.

A kombinatorikus típusnak megfelelően az $\{n, m\}$ számpárokkal jellemezhetjük a szabályos testeket. Az $\{n, m\}$ számpár első eleme a kétdimenziós lapok oldalszáma a második a csúcsalakzat kétdimenziós lapjainak oldalszáma, mely esetünkben a csúcsalakzat oldalszámával egyezik meg. Ezt a számpárt a szabályos test *szimbólumának* nevezzük (Kitalálójá vezetéknéve után Schäfli-szimbólumnak is szokás nevezni.) A szimbólum definíciója nem csak a háromdimenziós esetben értelmes azt rögtön látjuk, hogy a kétdimenziós szabályos sokszögekhez egyelemű szimbólum adódik a sokszög oldalszáma $\{n\}$. A következő fejezetben kiterjesztjük a szabályosság és a szimbólum fogalmát magasabb dimenziós esetekre is.

7.4.2. Háromdimenziós szabályos poliéderek

Világos, hogy a lehetséges szimbólumok a kétdimenziós esetben a háromnál nem kisebb számokat tartalmazó egyelemű halmazok, és minden szimbólumhoz találunk öt realizáló szabályos sokszöget. Kérdésünk most az, hogy a lehetséges háromdimenziós szimbólumokhoz is léteznek-e realizáló szabályos testek.

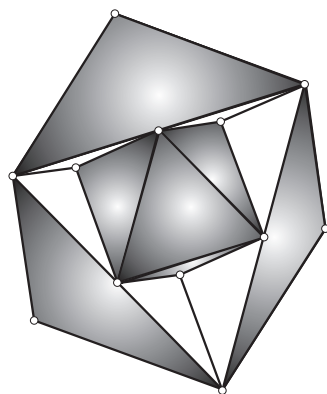
7.4.1. Tétel. *Az öt lehetséges kombinatorikus típus realizálódik, azaz a fenti táblázatban megjósolt szabályos poliéderek léteznek (lásd a 7.10. ábrát).*



7.10. ábra. Az öt szabályos test

Bizonyítás: Tekintsünk egy négyzetet. Állítsunk a középpontján keresztül a síkjára merőleges egyenest, majd mindkét irányban mérjük fel a négyzet félátlójának hosszát. A kapott két pont és az eredeti négy négyzetcsúcs konvex

burkát nyolc egybevágó háromszög határolja, a csúcsalakzatok az eredetivel egybevágó négyzetek. Ez a szabályos oktaéder. Az oktaéder két új csúcsán keresztül húzzunk a négyzet oldalaival párhuzamos kétszeres oldalhosszúságú két szakaszt, úgy, hogy az egyik az egyik csúcson a másik a másik csúcson haladjon át, és a csúcsok a rajtuk áthaladó szakaszok középpontjai legyenek. A két szakasz négy csúcspontjának konvex burka a szabályos tetraéder. (Éleinek felezőpontjai éppen az eredeti négyzet csúcspontjai.) Ha kapott tetraédert tükrözzük a négyzet középpontjára majd a két tetraéder csúcspontjainak konvex burkát vesszük a kockát kapjuk eredményül. (A 7.11. ábrán ábrázoltuk ezen három testet.)



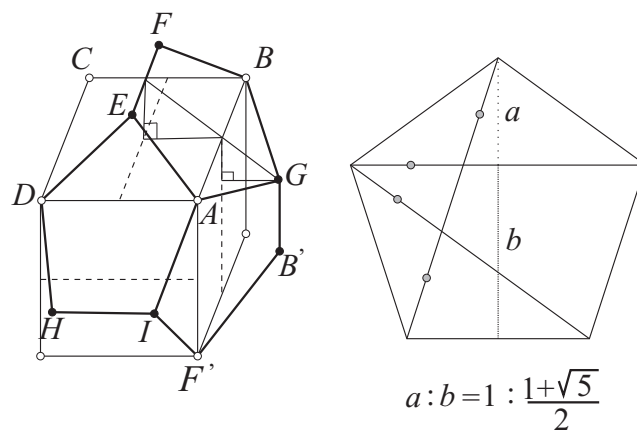
7.11. ábra. Kockában tetraéder és benne oktaéder.

A dodekaéder előállítására a kockát véve alapul a következőképpen történhet. A kocka egyik, például AB élét (lásd a 7.12. ábrát,) tekintsük egy szabályos ötszög átlójának, ekkor van az ötszögnek egy (pld EF) oldala, mely ezzel az átlóval párhuzamos. Az ötszög síkját határozzuk meg úgy, hogy tartalmazza AB -t, ezen él pontjai kivételével ne legyenek közös pontjai a kockával és az EF él merőleges vetülete az egyik (pld. $ABCD$) négyzet lapon essen a négyzet megfelelő középvonalára. (Az említett kockalap kiválasztására két lehetőség adódik, ezek közül válasszuk az egyiket.)

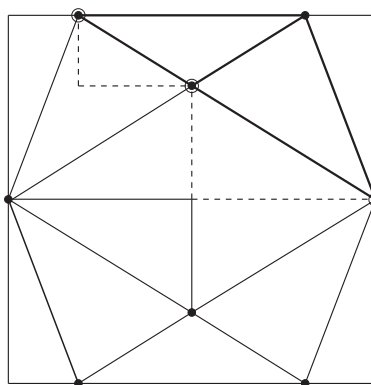
A szabályos ötszög jelölt szakaszainak egyenlősége miatt a pontozott szakaszok aránya az aranymetszéshez (lásd a következő alfejezet) tartozó arányt adják, így a G pontnak az FAB oldaltól való távolsága a kocka élhosszát (azaz az ötszög átlóját) egységnyinek tekintve:

$$x = \frac{1}{2} \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1}{1 + \sqrt{5}}.$$

Mivel az ötszög élhossza ennek kétszerese $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$, ezért az E pont y távol-



7.12. ábra. Dodekaéder konstrukció.



7.13. ábra. Ikozaéder konstrukció.

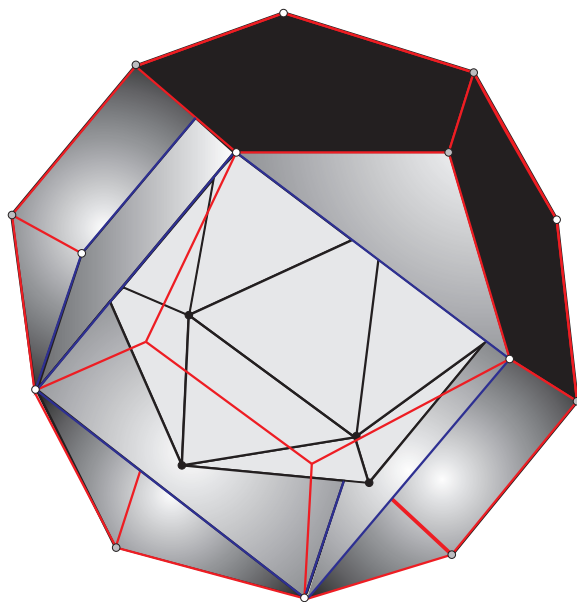
sága az ABC lapsíktól az

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2 = y^2 + \left(\frac{1 - \frac{2}{1+\sqrt{5}}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

egyenlőség alapján szintén

$$y = \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$

Ezért a kocka A csúcsán keresztülhaladó főátló körüli harmadrendű forgatás az AGB_{Δ} -t a vele egybevágó AED_{Δ} -be viszi így kiindulási ötszögünket a vele egybevágó $AEDHI$ ötszögbe. Még egyszer az előbbi harmadrendű forgatást alkalmazva ezen ötszög átkerül az $AIF'B'G$ ötszögbe. A dodekaéderhez jutunk, ha a kocka lapjaival párhuzamos szimmetriasíkjaira tükrözzük a már megkapott három lappal együtt mindazokat melyek az előző tükrözésekkel adódtak. (Három tükrözést kell végrehajtanunk, az első lépésben két új lapot kapunk, a második tükrözés a meglévő öt lapból nyolcat generál, a harmadik után megkapjuk a dodekaéder tizenkét lapját.) Összefoglalva, látjuk tehát, hogy a dodekaéder az egységnyi oldalú kocka és a lapjaihoz asszociált azok középvonalai felett $1/(1+\sqrt{5})$ magasságban szimmetrikusan elhelyezett $(1+\sqrt{5})/2$ hosszúságú szakaszokból álló szakaszrendszer konvex burka.



7.14. ábra. Dodekaéderben kocka és benne ikozaéder.

Az ikozaéder előállításához hasonló konstrukcióval történhet. A dodekaéder

konstrukcióban szereplő $2/(1 + \sqrt{5})$ hosszú szakaszokat helyezzük a kocka felszínére ugyanabban a szimmetrikus elrendezésben. Két-két szemközti szakasz ekkor egy úgynevezett „arany téglalapot” határoz meg, ennek oldalaránya az aranymetszés arányával egyezik meg. A három arany téglalap 12 csúcsának konvex burka ikozaéder. Valóban az elrendezés szakaszainak harmadrendű forgásszimmetriája azon háromszögek szabályosságát jelenti, melyek csúcsai három különböző szakasz végpontjai. A kapott szabályos háromszög oldalhossza:

$$d^2 = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{5}} \right)^2 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \sqrt{5}} \right)^2$$

összefüggés alapján éppen

$$d = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$$

azaz a többi háromszöglap is egyenlőoldali háromszöget ad. A csúcsalakzat szabályos ötszög voltának igazolásához elegendő azt kimutatni, hogy egy csúcs öt szomszédja egy síkban van, hiszen a szomszédos csúcsok távolságai megegyeznek. Tekintsük a kocka valamely élirányú vetületét. A vetületi négyzeten az öt csúcs három pontra esik – a 7.13. Ábránkon ezeket külön jeleztük – egysíkúság esetén ennek a három pontnak kell egy egyenesre esni. Azonban tekintettel az

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \sqrt{5}} \right) : \frac{1}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1}{1 + \sqrt{5}} : \frac{1}{2}$$

azonosságra a két-két pont által meghatározott szakaszok azonos meredekségűek, ez állításunkat igazolja. $\square$

7.4.3. Aranymetszés

Az aranymetszés az emberi kultúra egyik legszembeötlőbb és legtitokzatosabb jelensége. Annyira erősen kapcsolódik a szép fogalmához, hogy megjelenése a művészetekben is magától értetődő, az emberi alkotásokban mindig kiemelt szerepe van, a természetben pedig oly sűrűn találkozunk vele, hogy leginkább az a különös, ha valahol, valamely más jól meghatározott arány dominál. Matematikusok, filozófusok, művészek, mesteremberek... minden alkotással foglalkozó emberi lény használja, csodálja vagy legalábbis érdeklik tartja. Némi ízelítő a vele kapcsolatos elnevezésekből: aranymetszés, folytonos arány, vitruviusi arány, isteni arány, aranyháromszög, aranytéglalap, aranyspirális. Listát szerkeszteni a kapcsolható természeti jelenségekből, műalkotásokból, tanulmányokból, az aranymetszést tudatosan használó művészekből, mesterekből értelmetlen vállalkozás lenne, az aranymetszés tanulmányozása az időben sem lokalizálható. Ha aranymetszést szeretne látni az

ember csak körbe kell néznie...Ezen bevezető sorok zárásaképpen – akárcsak H.S.M. Coxeter – én is J. Keplert idézném:

Hiszem, hogy ez a geometriai arány adta az ötletet a Teremtőnek,
mikor bevezette a hasonló dolgoknak hasonló dolgokból történő
folytonos származtatását.

Az arány rövid bevezetése után egy hegedűn ellenőrizhetjük, hogy az arany-metszés az akusztikát és az esztétikát is összekapcsolja mindkettő optimalitása érdekében érdemes a méretezésnél ezen arányra törekedni.

Matematikai észrevételek

7.4.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az a, b hosszakkal rendelkező szakaszpár az $a + b$ hosszú szakaszt az aranymetszés arányában osztja, ha a kisebbik szakasz úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobbik az egészhez.

Ha a a kisebb b a nagyobb, akkor a definíció alapján

$$b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}a \quad \text{és} \quad a + b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}b = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 a.$$

Az $a = 1$ választással $b = 1 + \frac{1}{b}$ összefüggéshez jutunk. Ezen formula magába való sorozatos helyettesítése egy végtelen lánc tört előállítását ad b -re:

$$b = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}.$$

Az előállítás alapján felírhatunk egy b -hez konvergáló sorozatot:

$$1, \quad 1 + 1, \quad 1 + \frac{1}{1 + 1} = \frac{3}{2}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}} = \frac{5}{3} \dots,$$

mely nem más mint Fibonacci hires

$$1, \quad 1, \quad 1 + 1 = 2, \quad 1 + 2 = 3, \quad 2 + 3 = 5, \dots$$

sorozatából az egymást követő elemek hányadosaként értelmezett sorozat. A Fibonacci sorozat és a folytonos arány együttes szemléltetése a síkon két újabb geometria alakzathoz vezet, melyek egyikét Fibonacci spirálisnak, másikat aranyspirálisnak nevezhetjük. Vegyük észre, hogy a Fibonacci sorozat elemeinek megfelelő méretű négyzetek segítségével a sík kiparkettázható, a parkettázó négyzetek sorozatos uniója egy téglalap sorozatot eredményez,

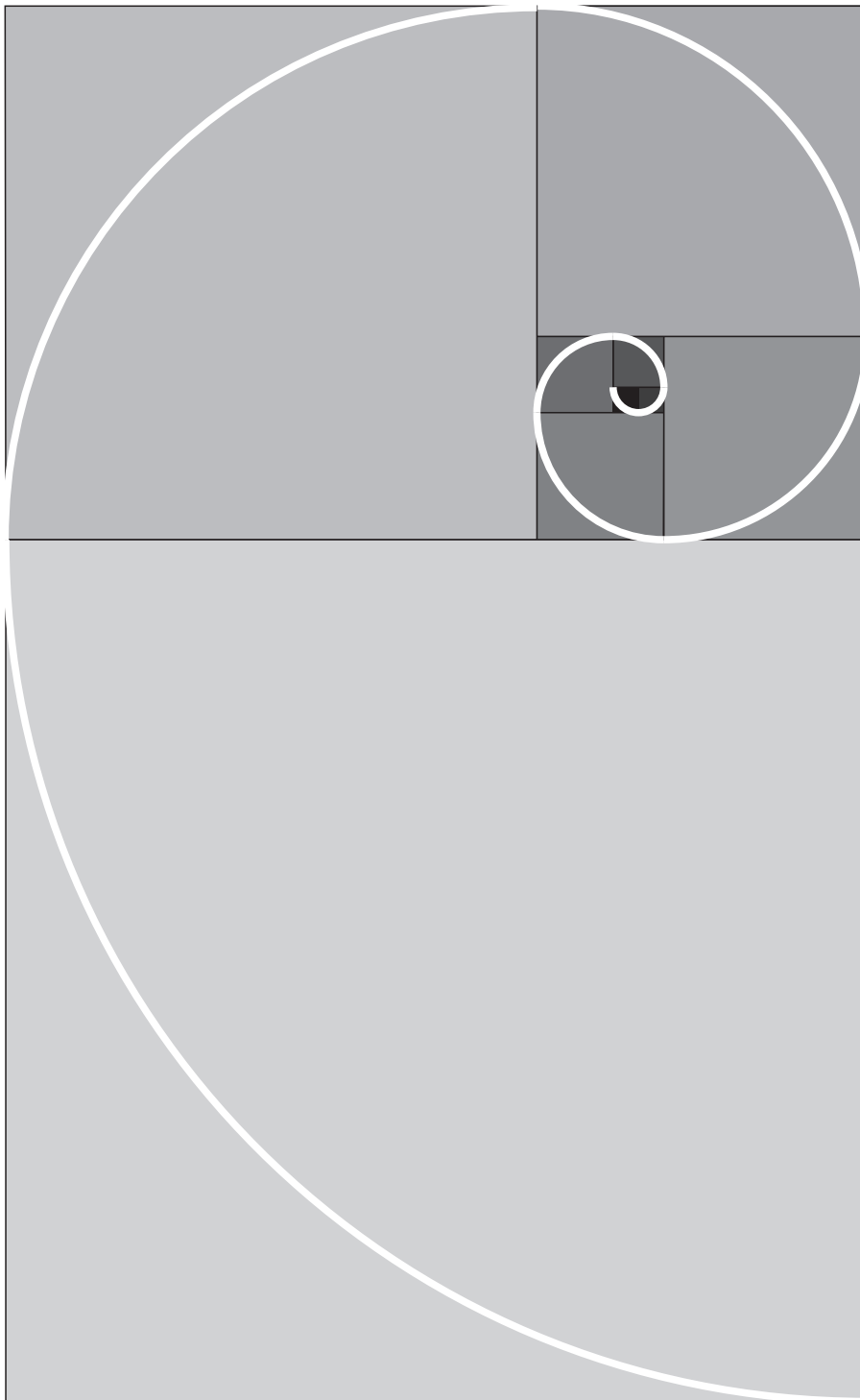
mely téglalapok oldalainak aránya a Fibonacci sorozat egymást követő elemeinek a hányadosa. Mint láttuk ezek a hányadosok az aranymetszés számához tartanak, tehát a téglalapok (az oldalarányukat tekintve) az arany téglalaphoz konvergálnak. Vegyük észre, hogy nincs két hasonló téglalap, így a kitöltéshez tartozó definiáló lépéssorozatot nem tudjuk univerzális forgatva nyújtáshoz igazítani.

Egy rekurzív előállítás történhet a következőképpen: Jelöljük ki a kiindulási négyzet egyik csúcsát, legyen ez O_0 . A második négyzet megfelelő pontja lesz O_1 a harmadik négyzeté O_2 és így tovább. Jelöljük a Fibonacci sor elemeit f_i -vel $i = 0, 1, \dots$. Ha az i -edik négyzetet már elhelyeztük és így O_{i-1} is ismert a következő lépésekkel származtassuk az $i + 1$ -edik négyzetet.

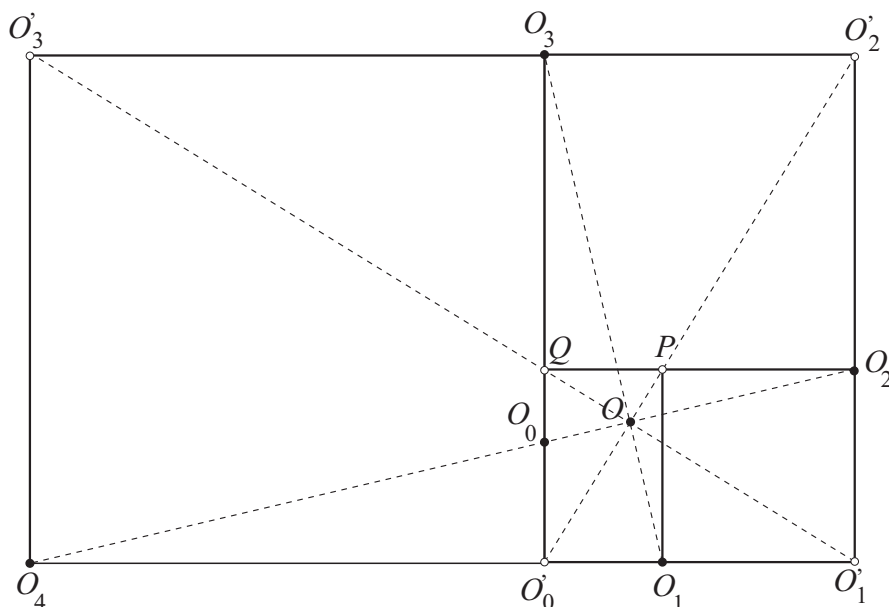
- Forgassuk el az i -edik négyzetet pozitív irányban kilencven fokos szöggel. (O_{i-1} átkerül az O'_{i-1} csúcsba.)
- Toljuk el a négyzetet az $\overrightarrow{O_{i-1}O'_{i-1}}$ vektor, pozitív irányú kilencven fokos elforgatottjával. O_{i-1} képe legyen O_i .
- Nagyítsuk O_i -ből a kapott négyzetet az $\frac{f_i}{f_{i-1}}$ arányban

A 7.15. ábrán a mozgás jellegét jól érzékelhetjük egy körívekből álló „ál”-spirálissal, a pillanatnyi nagyítási centrumokat az O_i pontokat kötöttük össze negyed körívekkel, ahol az ívek sugarai a Fibonacci számok.

Az aranyspirális már egy igazi spirális, azaz a sík egy pontja körüli alkalmas forgatva nyújtással származtathatóak pontjai. A Fibonacci kitöltés szerkezetét megőrizve változtassunk a kiindulási objektumon. Az első négyzetet cseréljük le egy aranytéglalapra, mely hosszabbik oldala mentén érintkezik a második – egységnyi élhosszú – négyzettel. O'_0 -t a téglalap megfelelő csúcsának tekintjük a O_0 pont most a téglalap megfelelő élének aranymetszési pontja, a téglalap további csúcsai legyenek P, Q (lásd a 7.16. ábrát). O_1 legyen a Fibonacci spirális O_1 pontjának megfelelő pont, és alkalmazzuk a fenti rekurziót a fix $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ nyújtási aránnyal, annak második lépésétől. Ekkor minden téglalap aranytéglalap lesz. Mivel a téglalapok hasonlóak, forgatva nyújtással egymásba lehet őket transzformálni. Ennél több is igaz, egy fix forgatva nyújtás hatványai segítségével kapható az elsőből az összes többi. Valóban az első aranytéglalap P, Q, O'_0 csúcsait a második téglalap $Q, O'_0, O'-1$ pontjaiba viszi, ezért a mozgás egy kilencven fokos pozitív forgás (ha a téglalap irányítását megtartjuk) kombinálva egy aranymetszés arányú ugyanazon középpontú nyújtással. A középpontból a PQ, QO'_0 és $O'_0O'_1$ szakaszok egyaránt derékszög alatt látszanak, tehát az egyetlen lehetséges középpont a PO'_0, QO'_1 átlók metszéspontja. Az aranymetszési arány választása miatt ez az O pont valóban a keresett centrum. Azonnal látható hogy ezen transzformáció a második



7.15. ábra. A Fibonacci spirális



7.16. ábra. Az aranyspirális középpontja

aranytéglalapot a harmadikba, a harmadikat a negyedikbe viszi, stb ... így ezen hasonlóság hatványai állítják elő az első aranytéglalapból a többi. Az O pontot egy polárkoordinátákhoz tartozó koordinátarendszer kezdőpontjának az OO_0 félegyenest a kezdőegyenesének kinevezve az O_i pontok távolságai O -tól az

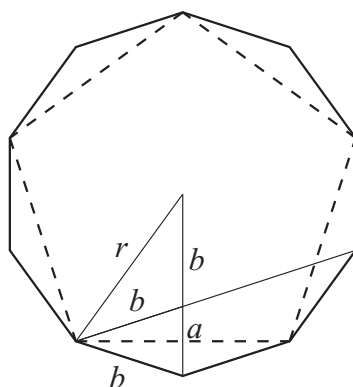
$$|OO_i| = |OO_0| \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^i$$

formulával kaphatók és az OO_i félegyenések pozitív irányú kilencven fokos elforgatottjai egymásnak. Ezért ezen pontok pontjai a sík azon spirálisának, mely egyenlete polárkoordinátás alakban:

$$r(\varphi) = |OO_0| \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^\varphi.$$

Jegyezzük meg, hogy az aranytéglalapok rendszere „befelé” is folytatható, a kiindulási téglalapból levághatunk egy négyzetet (ennek három csúcsa Q_0 , Q'_0 és Q_1). A megmaradt téglalap egy aranytéglalap, melyből megint levághatunk egy négyzetet, és így tovább. A két irányban végtelen téglalapsorozat közös pontja O , a hasonlósági centrum. Az arany spirális „ebből a pontból indul”. Térjünk vissza az aranymetszési arány szerkesztéséhez. Már Euklidész is egyszerű eljárást adott, észrevéve, hogy a 36° -os szárszöggel rendelkező

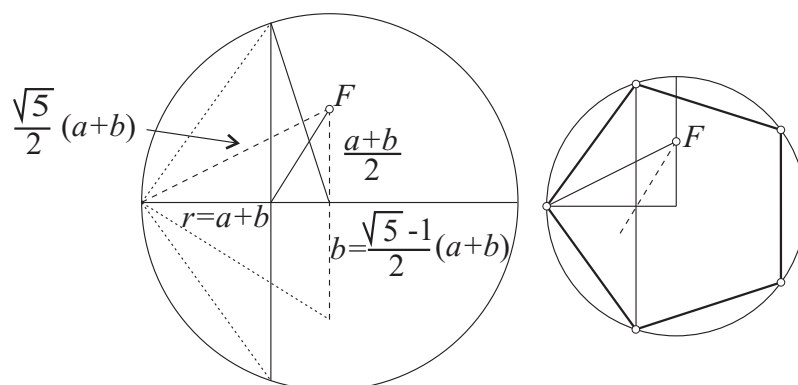
egyenlőszárú háromszög szár és alaphosszainak hányadosa a keresett érték. Ezt ugyanis az egyik alapon fekvő szögfelezője két újabb egyenlőszárú háromszögre bontja, melyek közül az egyik hasonló az eredetihez (lásd 7.17. ábra).



7.17. ábra. Az aranyháromszög

Tíz darab közös csúcsú szabályos tízszöget ad, ebben a másod szomszédos csúcsokat rendre összekötve két szabályos ötszöget kapunk. Egymás melletti két aranyháromszög a közös oldalukra szimmetrikusan helyezkedik el, így rögtön meghatározhatjuk a szabályos ötszög oldalhosszát. A Pitagorasz tétel szerint ez $\sqrt{4b^2 - a^2}$ a 7.17. ábra jelölései mellett. A szabályos ötszög az aranymetszéshez leginkább kapcsolható síkbeli alakzat. Ez annak köszönhető, hogy középponti szöge 72° , így egy oldal és a szemkötti csúcs által meghatározott egyenlőszárú háromszög aranyháromszög, míg a szomszédos csúcsok által meghatározott háromszögek 36° -os szárszöggel rendelkeznek. Így bármely két csúcspárt összekötő egyenespár 36° vagy 72° alatt metszi egymást. Valamennyi kérdezhető arány (pld. az átlók metszése által az átlókon kapott osztási arányok, vagy az oldalak és átlók hosszának aránya) az aranymetszésnek megfelelő arány. Ezen a módon tehát a 36° , 72° a szabályos öt és tízszög szerkesztése az aranymetszés $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ arányának szerkesztésével fonódik össze. Ha a 7.17. ábrán szereplő $r = a + b$ összeget tekintjük kiindulási alapnak a 7.18. ábrán nyomon követhetjük a szabályos öt és tíz szög szerkesztését és az aranymetszés arányának meghatározását.

Az r sugarú körben tekintve két merőleges körátmérőt felezzük meg az egyiket. A kapott derékszögű háromszög átfogója $\frac{\sqrt{5}}{2}(a + b)$ hosszúságú ezért ezt a szakaszt az ábrának megfelelően a felezőpontból felmérve egy a középpontból induló b hosszú szakaszt kapunk. Erről tudjuk, hogy az r sugarú körbe írt szabályos tízszög oldalhossza. Sőt mi több a kör alsó felén létrejött



7.18. ábra. Az aranyháromszög szerkesztése

derékszögű háromszög átfogójának hossza az

$$\sqrt{(a+b)^2 + b^2} = \sqrt{2b^2 + 2a(a+b) - a^2} = \sqrt{4b^2 - a^2}$$

összefüggés alapján az r sugarú körbe írt szabályos ötszög oldalhosszával egyezik meg, így aranyháromszögünk mellé szerkesztettünk még egy egyedi derékszögű háromszöget, ennek oldalai rendre egy adott sugarú körbe írt szabályos öt, hat és tízszög oldalhosszaival rendelkeznek.

Az aranyháromszögre alkalmazva a szinusz tételt azonnal adódik, hogy

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \text{ és így } \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Ezért a 7.18. ábrán megrajzolt ötszögátló a baloldali vízszintes sugarat két olyan darabra osztja melyeknek hossza rendre:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{4}(a + b) = \frac{1}{\sqrt{5} + 1}(a + b) \text{ illetve } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 1}(a + b).$$

Ez az arány megegyezik az ábra felső derékszögű háromszögében az F csúcs-pontjából induló oldalak hosszarányával, azaz az osztáspont az F -beli szögfelező pontja. Megkaptuk tehát a 72° és a körbeli szabályos ötszög szerkesztésének legegyszerűbb módját:

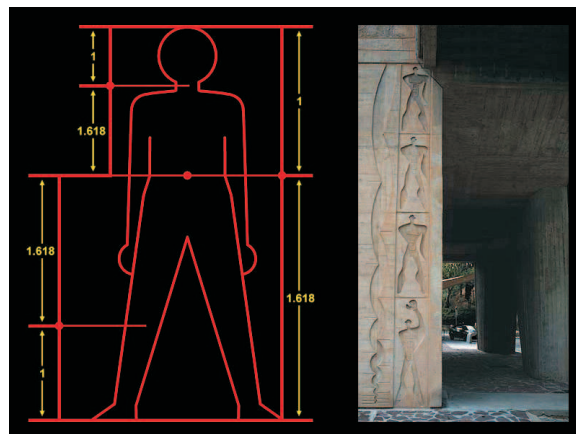
1. Vegyünk a körben két merőleges sugarat.
2. Az egyik felezőpontja a másik sugár végpontja illetve a középpont által meghatározott háromszögben rajzoljuk meg a felezőpontból induló szögfelezőt.

3. A szögfelezőnek a szemközti oldallal alkotott metszéspontjából állítsunk merőlegest a második sugárra, ez a merőleges a körből kimetszi azon szabályos ötszög két csúcspontját, amely egyik csúcsa a második sugár körí pontja.

Az emberi test arányai az aranymetszésnek felelnek meg.



7.19. ábra. Ábra Heinrich Cornelius Agrippa: Libri tres de occulta philosophia c. könyvéből



7.20. ábra. Le Corbusier: Le Modulor

Szabályos ötszög a festészetben.



7.21. ábra. Michelangelo: A szent család



7.22. ábra. Salvador Dalí: Az utolsó vacsora szentsége

Aranymetszés szerinti elrendezések.



7.23. ábra. Joseph Mallord William Turner: Norham Castle at Sunrise



7.24. ábra. Rembrandt: Önarckép

Arany metszés az építészetben



7.25. ábra. A gizei piramis



7.26. ábra. Az atheni Parthenon.



7.27. ábra. A torontói CN Tower

Aranymetszés és katarzis

Ebben az alfejezetben irodalmi és zenei művek aranymetszési pontjaiban található csúcspontokra mutatunk példákat.

- **Dante: Isteni színjáték** című, száz énekből álló műben a hatvankettedik énekben Dante elengedi Vergilius kezét, hogy majdan a Paradicsomon át Beatrice vezesse tovább, a Fény felé ...
- **Kodály Zoltán: Psalmus Hungaricus** című, 395 ütemből álló művének aranymetszési pontja a 245. ütem. Itt található a mű mondanivalója:

Istenben vessed bizalmadat.

- **Bartók Béla: Cantata Profana** című 122 soros csodálatos műve első epikai része 99 soros. Ennek aranymetszési pontja a 61-62.sor itt ezt találjuk:

Kedves gyermekeim,
Gyertek, gyertek haza ...

- **Bartók Béla: Kékszakállú herceg vára** című operájának aranymetszési pontja az 5.ajtó, a zene modulárisan visszatér minden zenék alap hangneméhez a *C*-dúrhoz. A szövegben ezt találjuk:

Kékszakállú:

Lásd ez az én birodalmam,
Messze néző szép könyöklőm.
Ugye, hogy szép nagy ország?

Judit:

Szép és nagy a te országod.

Kékszakállú:

Most már Judit mind a tied.
Itt lakik a hajnal, alkony,
Itt lakik nap, hold és csillag,
S léssen neked játszótársad.

A hegedű felépítése

Pitagorasz felfedezi a rezonancia alaptörvényét, miszerint a hang magassága a rezgő húr hosszának a függvénye. Ennek értelmében a hangközöket a húrhosszak arányaival fejezheti ki, a húrhossz felezése meghatározott mértékben emeli a hangmagasságot, ugyanúgy mint a kétharmados vagy a négyharmados arány használata. Észreveszi, hogy az emberi fül számára kellőképpen szétválasztható magasságok elkülönítésére elegendő, ha a felezéshez tartozó különbséget hét részre osztjuk, így a teljes húrhosszhoz tartozó hangról (azt is számolva) nyolc lépésben érünk el a fél húrhosszhoz tartozó hangmagasságig, és innen minden ismételhető. Ezen két hangot célszerű ugyanúgy nevezni. Mivel a nyolcadik hangról van szó (Pitagorasz nem használja és nem tartja természetes számnak a nullát) azt mondjuk, hogy a fél húrhosszhoz egy oktávval magasabban fekvő, ugyanúgy nevezett hang tartozik, mint a teljeshez. A további beosztáshoz további kézenfekvő húrhossz arányokat tekinthetünk kiindulási pontnak, a két-harmad húrhossz adja az ötödik hangot, a háromnegyed húrhosszhoz tartozzon a negyedik hang és így létre is hoztuk a kvint és kvart hangközöket. Az oktávhoz és a kvinthez tartozó nyolcas és ötös szám használata Pitagorasz és követői számára kézenfekvő volt hiszen remekül beleillett a megfelelő húrhossz arányok sorába, lényegét tekintve ma sem ismerünk tökéletesebb rendszert, annak ellenére, hogy nyilvánvalóan ellentmondásokkal kell szembenéznünk. 12 kvint megtétele után ugyanúgy nevezett hangot kapunk, mintha hét oktávot tennénk meg, hiszen mindkét esetben a negyvenkilencedik hangra érünk. A két fizikai hang között azonban mérhető különbségnek kell lennie, mert a megszólaltatandó húrhosszak nem azonosak, hiszen az

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

számok egyenlőségéből

$$3^{12} = 531441 \text{ illetve } 2^{19} = 524288$$

számok egyenlősége következne. A frekvencia viszony tehát

$$\frac{531441}{524288} = 1,0136433,$$

ami nyolcadhang magasság eltérést jelent a két hang között. Ezt nevezik *pitagoraszí kommának*. A pitagoraszí hangsor keretein belül egyetlen kvint megváltoztatásával az ellentmondás feloldható, de más megoldás is lehetséges. A temperált hangsorok megadásával többen foglalkoztak. Számunkra is érdekes, hogy a Bolyaiak is adtak meg hangsort. A pitagoraszí hangsor

mélyülő hangokkal a húrhosszak következő növelésével kapható:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}, 2$$

míg a Bolyai Farkasé:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2.$$

Nem meglepő, hogy ilyen előzmények mellett a hegedű felépítése sem nélkü-



7.28. ábra. Arany metszés a hegedűn

lőzhetett némi számmisztikát. A pitagoraszai természetes számokhoz igazított világegyetemet, a hegedű kialakításának korára, azonban felváltja az isteni beavatkozást sugalló arany metszés iránti rajongás, a nagy hegedűkészítők által megálmodott tökéletes akusztikájú hangszer minden tényleges arányában az isteni arányt sugallja. Nem tudhatjuk, hogy létezik-e teljesen más méretezés mellett, a hangszerek királynőjénél tökéletesebben működő akusztikus szerkezet, az azonban bizonyos, hogy a mai hangi követelményeket kielégítő hegedű méretezése a gyakorlatban tizedmilliméter pontossáig meghatározott. A szereplő arányokat a szerző által készített hegedű fotóján mutatjuk be. Lényegében az arany metszés arányát lehet felfedezni a

- nyak: korpusz (a 7.28. ábrán a Hajós könyv: hegedű test),
- korpusz felső rész: korpusz maradék része (Hilbert könyv függőleges irányban: Hilbert könyv alsó éle alatti rész),

- korpusz homorú rész: korpusz felső rész (hegedű test középső karcsú része: Hilbert könyv),
- korpusz homorú rész minimális szélessége: felső rész maximális szélessége,
- csiga: nyak többi része
- fogólap korpusz feletti része: nyakhoz ragasztott része

viszonylatában.

7.4.4. Különleges testek

Ebben az alfejezetben olyan testeket írunk le, melyek valamilyen szempontból különlegesnek tekinthetők. Az információ áramlás korunkban az internet révén hihetetlenül felgyorsult. A könyvünk ezen fejezetében szereplő érdekességek zöme teljes részletességgel, remek illusztrációkkal tárgyalva van honlapokon, internetes lexikonokban. Röviden leírjuk azon tulajdonságukat, mely alapján különlegesnek tekinthetők, mellőzve a részletes ismertetést. Mielőtt a megadott forrás alapján keresnénk részletes leírást, próbáljuk magunktól megérteni (kitalálni) szerkezetüket, és azon jelenség okát, melyet illusztrálnak.

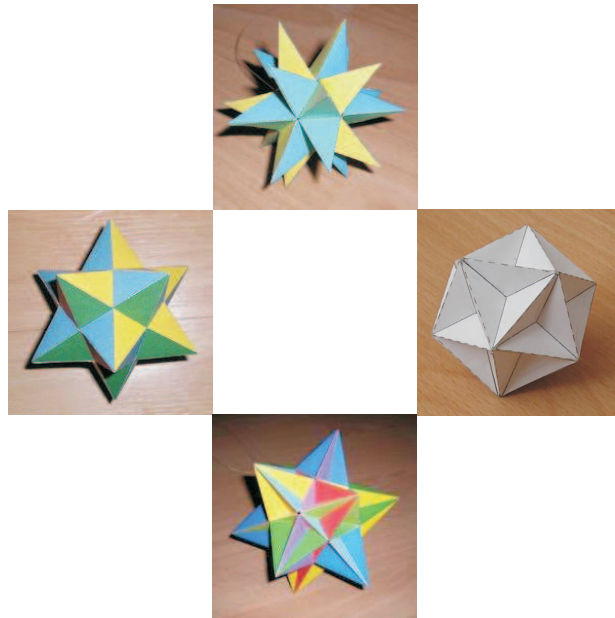
Kepler-Poinset-féle szabályos testek

Ha nem ragaszkodunk a konvexitáshoz a szabályosság definíciójában, a Platóni testeken kívül találunk még négy szabályos testet. Kettőt Kepler a másik kettőt Poinset írja le először, Cauchy igazolja, hogy nincs több.

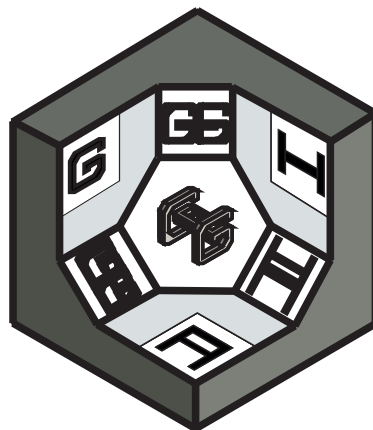
Forrás: <http://www.korthalsaltes.com/cuadros.php?type=k>

Monogramkockák

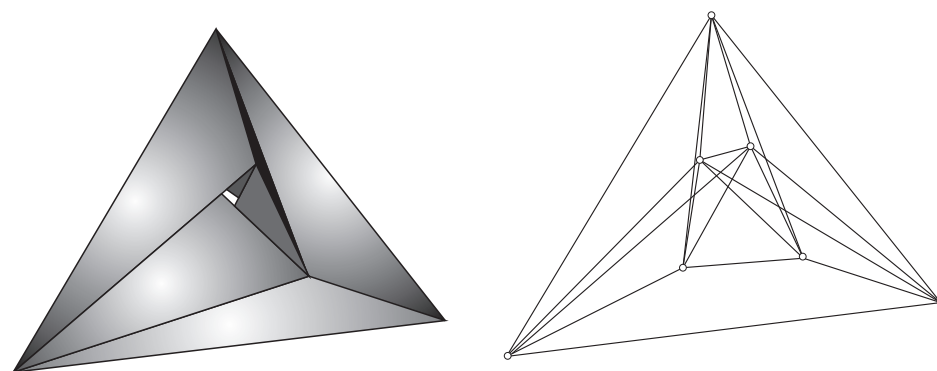
Érdekes kihívás olyan poliédereket (testeket) készíteni, melyek árnyéka különböző irányokban előre adott betűk. Egy ilyen test található Douglas R. Hofstadter: Gödel, Escher, Bach c. könyvének a címlapján. Ennek árnyékai rendre a G,E,B betűket formázzák utalva a látszólag távoli területeken dolgozó intellektusok azonos gyökerére. Analóg módon elkészíthetjük saját „monogramkockánkat”, ahogy azt ábránkon láthatjuk. A testnek a tér hat irányából készítettük el az árnyékát egy kockából kivágott térbeli hatoldalú vetítőfalra.



7.29. ábra. Csillagtestek



7.30. ábra. Monogramkocka



7.31. ábra. A Császár-féle test

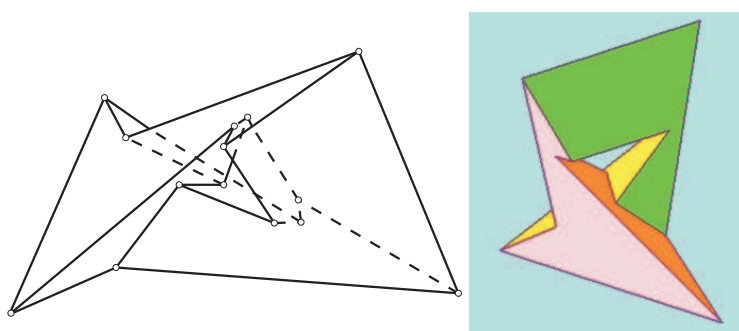
A Császár-féle test

A Császár-féle test egy olyan poliéder, aminek 7 csúcsa 21 éle és 14 háromszöglapja van. Az érdekessége az, hogy átlói nincsenek, tetszőleges két csúcsot él köt össze. Az Euler tételből azonnal következik, hogy ha a tetraédertől különbözik, nem lehet a karakterisztikája 2, így a Császár-féle poliéder „egy lyukat tartalmazó” a tóruzzsal homeomorf 0 karakterisztikájú poliéder. Az élgráfja egy hétpontú teljes gráf, a konstrukciója tengelyes szimmetriával is elképzelhető. Négy különböző lehetőség van az előállítására, ahol a különbséget a folytonos deformációval való átalakíthatóság alapján definiálhatjuk.

Magasabb dimenziókban, a szimplextől különböző (akár konvex), ugyanazzal a tulajdonsággal rendelkező poliédereket a momentum görbe segítségével adhatunk meg, ezeket „szomszédsági” politópoknak nevezik.

Forrás: http://hu.wikipedia.org/wiki/Császár-féle_test

Szilassi poliédere

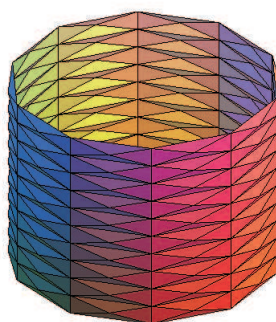


7.32. ábra. A Szilassi-féle test

A Szilassi-poliéder a Császár-féle test duálisa. Konkáv poliéder hét hatszögletű lappal, 21 éllel, 14 csúccsal. A tetraéder mellett az egyetlen olyan poliéder, amire teljesül, hogy bármely két lapjának van közös éle. Természetesen ez is nulla karakterisztikájú test, azaz lyukas mint a tórusz. Ábránkról rekonstruálható a szerkezete, mely kombinatorikusan igen egyszerű.

Forrás: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Szilassi-féletest>

Schwartz-féle lampion



7.33. ábra. Mi a felszín?

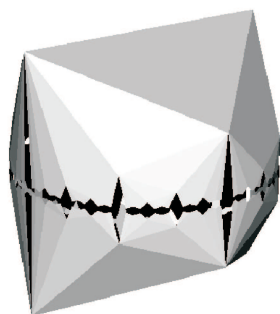
A felszín definiálása a geometria egyik nehéz kérdése. A konvex test térfogata meghatározható a beírt poliéderek térfogatának legkisebb felső határaként. Ugyanez nem mondható el a felszínről. Schwartz lampionja a körhengerbe írt háromszöglapokból álló felület darab, mely az adatainak alkalmas választásával a köré írt körhenger felszínénél nagyobb felszín értéket ad.

Forrás: <http://www.mathcurve.com/polyedres/lampion/lampion.shtml>

Konvex test csúnya árnyékhattárral

A konvex test egy adott irányra vonatkozó árnyékhattára alatt azon felületi pontjainak összességét értjük, amelyekben a testet az iránnyal párhuzamos egyenesek érintik. Az árnyékhattár a legtöbb esetben 1 és 2-dimenziós a felületen elhelyezkedő topologikus sokaságok uniója. Példánkban egy korlátos, zárt és konvex testet láthatunk, mely függőleges irányú árnyékhattára igen csak cikkcakkos, tetszőleges ilyen irányú érintőegyenesén van olyan árnyékhattárhoz tartozó pont, amelynek nincs olyan környezete, melyre megszorítva az árnyékhattárt az topologikus sokaság lenne.

Forrás: <http://www.math.bme.hu/~ghorvath/bisector.htm>



7.34. ábra. Mi az árnyékhatár?



7.35. ábra. Gömböc

A gömböc

A Gömböc egy konvex, homogén anyagú test, amelynek egy stabil és egy instabil egyensúlyi helyzete van vízszintes felületen. A konvexitás fontos kikötés: a konkáv testek nem mindig a felületükön gördülnek, emiatt konkáv Gömböcöt könnyű létrehozni. Az egyetlen stabil helyzettel rendelkező formákat monostatikusnak nevezzük, az egyetlen stabil és egyetlen instabil egyensúllyal rendelkező formákat pedig mono-monostatikusnak. A Gömböc egy homogén mono-monostatikus test.

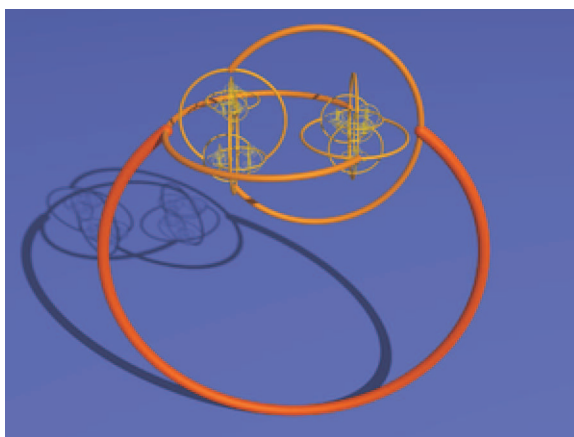
Forrás: <http://www.gomboc.eu/>

Alexander szarvas gömbje

A síkbeli Jordan-Schönflies tétel szerint a topológikus kör a síkot két részre vágja a gömb ezen részek közös határa, sőt mi több a két rész külön-külön homeomorf a metrikus kör által definiált két síkdarabbal. Alexander példája szerint a térben hasonló erősítése a Jordan-Brouwer tételnek nincs. A standard gömb által létrehozott térdarabok egyszeresen összefüggőek, azaz tetszőleges egyszerű zárt görbékük pontra húzható. Alexander példájában ez csak a belső térdarabra igaz, a „szarvas gömb” által létrehozott korlátos térdarab-

s \ i	0	1	2	3	4	
0						
1						
2						
3						
4						
						

7.36. ábra. Egyensúlyi helyzetek száma



7.37. ábra. Alexander gömbje

rab a gömbbel együtt homeomorf egy tömör gömbbel. A nemkorlátos térrész viszont nem egyszeresen összefüggő így nem lehet homeomorf a metrikus gömb által létrehozott nem korlátos térdarabbal.

Forrás: <http://en.wikipedia.org/wiki/Alexanderhornedsphere>

7.5. n -dimenziós szabályos poliéderek

Azt állítom, hogy az említett öt testen kívül nem szerkeszthető más egyenlő oldalú, egyenlő szögű és egymással egyenlő lapok által közrefogott test.

Euklidész: XIII. könyv

Ezen fejezetben a háromdimenziós szabályos poliéder fogalmát általánosítva az n -dimenziós szabályos poliéderek osztályozását adjuk. A fejezetben konvex poliéderekkel foglalkozunk, a szabályos poliéder nálunk definíció szerint konvex. Először a szabályosságot fogalmazzuk meg magasabb dimenzióban is használható módon. A poliéder két csúcsa *szomszédos*, ha éllel vannak összekötve. A poliéder *csúcsalakzata* alatt a továbbiakban az adott csúcs szomszédainak konvex burkát értjük. Világos, hogy n -dimenziós poliéder csúcsalakzata általános esetben egy n -dimenziós konvex poliéder.

7.5.1. Definíció. A P konvex poliéder $\Gamma(P)$ szimmetriacsoportja a tér azon φ egybevágóságait tartalmazó csoport, melyek P -t invariánsan hagyják.

7.5.2. Definíció. A P konvex poliéder egy Z zászlója a P lapjainak egy maximális lánc a P laphálójára nézve. A P zászlóinak halmazát $\mathcal{Z}(P)$ -vel jelöljük.

7.5.3. Definíció. A P konvex poliéder szabályos, ha szimmetriacsoportja $\Gamma(P)$ tranzitívan hat a zászlói halmazán $\mathcal{Z}(P)$ -n, azaz tetszőleges két zászlóhoz van olyan szimmetria, amely az első a másodikba viszi.

A szabályos poliéder alaptulajdonságai a következők:

- Irható körjük gömb.
- A k -dimenziós lapjai, egybevágó szabályos poliéderek.
- A csúcsalakzatai egybevágó $(n - 1)$ -dimenziós poliéderek.

Az első tulajdonság bizonyításához tekintsünk egy koordinátarendszert az Euklidészi térben és jelöljük $\mathbf{v}_i$ -vel a csúcsok helyvektorait, ahol $i = 1 \cdots \sigma$. Az

$$s = \frac{\sum_i \mathbf{v}_i}{\sigma}$$

vektorra alkalmazva $\Gamma(P)$ egy elemét $\varphi = \varphi_0 + t$ -t, ahol φ_0 lineáris t pedig fix vektor, azt tapasztaljuk, hogy

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + t = \varphi_0 \left(\frac{\sum_i \mathbf{v}_i}{\sigma} \right) + t = \frac{\sum_i \varphi_0(\mathbf{v}_i) + t}{\sigma} = s$$

teljesül, következésképpen $\varphi(s - \mathbf{v}_j) = s - \varphi(\mathbf{v}_j) = s - \mathbf{v}_k$ áll fenn a $\mathbf{v}_j$ csúcs $\mathbf{v}_k = \varphi(\mathbf{v}_j)$ képére vonatkozólag. Mivel P szabályos és minden szereplő φ távolságtartó, ezért az s helyvektor végpontjától P valamennyi csúcsa egyenlő távolságra van, tehát s a körülírt gömb középpontja.

A második tulajdonságot csak az $n - 1$ -dimenziós lapok esetére igazoljuk, az általános eset indukcióval könnyen látható. Legyen F_1, F_2 két $n - 1$ -dimenziós lap Z'_1, Z'_2 két tetszőleges zászlójuk. Ezen zászlók kiegészítve P -vel a P két Z_1, Z_2 zászlójának tekinthetők. Van tehát olyan szimmetria, amely Z_1 -t Z_2 -be viszi, ez egyúttal egybevágóság F_1 és F_2 között. Azaz az $n - 1$ -dimenziós poliéderek egybevágó konvex poliéderek. Ezek után tekinthetjük F_1 két zászlóját, melyek szintén kiegészíthetők a P teljes zászlóivá. Alkalmazva a szimmetriacsoport tranzitivitását, majd a kapott egybevágóságot az F_1 affin alterére megszorítva kapjuk, hogy $\Gamma(P)|_{\text{aff } F_1}$ tranzitívan hat F_1 zászlóin. Mivel ezen csoport valamennyi eleme $\Gamma(F_1)$ -nek is eleme, F_1 szabályos poliéder.

A harmadik tulajdonság igazolásához, vegyük észre, hogy a csúcsalakzat $(n - 1)$ -dimenziós konvex poliéder. Legyen C, C' szomszédos csúcspár, O a szabályos poliéder középpontja. Tetszőleges C -t és O -t helyben hagyó egybevágóság C' -t egy C -vel szomszédos másik C'' csúcsba viszi, úgy, hogy a $CC'O_\Delta$ egy vele egybevágó háromszögbe megy át. A két háromszög C' illetve C'' csúcsaihoz tartozó magasságainak a talppontja, ugyanaz, következésképpen a $C'C''$ szakasz merőleges CO egyenesre. Ebből azonnal kapjuk, hogy a C -vel szomszédos csúcsok a C' -n keresztülhaladó OC egyenesre merőleges hipersík pontjai, így konvex burkuk $n - 1$ -dimenziós konvex poliéder. Tekintettel előző állításunkra két különböző csúcshoz tartozó csúcsalakzatok egybevágóak, mert az egyik csúcshalmaz a P egy jól választott szimmetriájával a másik csúcshalmazába vihető. Elég tehát egy csúcsalakzat – például a C csúcshoz tartozó – szabályosságát kimutatni. A továbbiakban jelöljük H -val a csúcsalakzat hipersíkját, magát a csúcsalakzatot Q -val. P és Q laphálójuk között felfedezhetjük a következő kapcsolatot, ha F a P valamely a C -csúcsot tartalmazó k -dimenziós lapja, akkor $F \cap H$ a Q egy $(k - 1)$ -dimenziós lapja és fordítva, tetszőleges Q -beli G $(k - 1)$ -dimenziós laphoz egyértelműen hozzárendelhetjük a P azon k -dimenziós lapját, mely részhalmazként tartalmazza G -t és a C csúcsot is. Ezen lap nem más mint $P \cap \text{aff}(\{G \cup C\})$. Q két zászlója legyen Z'_1, Z'_2 . Előbbi megfeleltetésünk alapján ezekhez rendelhetünk

Z_1, Z_2 zászlókat $\mathcal{Z}(P)$ -ből, melyek tetszőleges lapjainak metszete H -val az ugyanolyan indexű Z'_i eggyel kisebb dimenziós lapja. Ha $\varphi(Z_1) = Z_2$, akkor $\varphi(Z'_1) = Z'_2$ is teljesül, ezért ugyanez áll a $\varphi|_H$ leképezésre is, ami Q affin alterének egybevágósága így Q szimmetriája is. Így állításunkat igazoltuk, Q szintén szabályos poliéder.

A következőkben igazoljuk, hogy a fenti második és harmadik tulajdonsággal rendelkező poliéder szabályos a mi definíciónk értelmében is. Így ezen két tulajdonság segítségével induktív módon lehet definiálni ugyanazt a poliéder halmazt. Történetileg először így definiálták a szabályos poliédert később tértek át az általánosításokhoz jobban elvezető zászlós definícióra. Vegyük észre, hogy a két és háromdimenziós esetek leírása is ezen klasszikus definíció alapján történt.

7.5.1. Tétel. *Ha egy konvex P poliéder $(n - 1)$ -dimenziós lapjai egybevágó $(n - 1)$ -dimenziós szabályos poliéderek, továbbá csúcsalakzatai is $(n - 1)$ -dimenziós egybevágó szabályos poliéderek, akkor a poliéder szabályos.*

Bizonyítás: Tekintsük a poliéder két csúcsát a C illetve D csúcsokat. Az ezekből induló élek egyenlő hosszúak a hiperlapok egybevágó és szabályos volta miatt. Mivel a tekintett végponttól különböző csúcsaik a hozzájuk tartozó csúcsalakzat csúcsait adják, ezek pedig szintén egybevágó szabályos poliéderek, a két gúla, amit a csúcs és a hozzátartozó csúcsalakzat definiál szintén egybevágó egymással. Ezért a gúla élek szakaszfelezőmerőleges síkjai a csúcsot a csúcsalakzat középpontjával összekötő egyenest ugyanabban a pontban metszi, a C csúcs esetében ezen pont O_C a D esetében O_D . Ha most veszünk egy-egy e_C illetve e_D élet C -n illetve D -n keresztül, akkor ezek C_1 illetve D_1 felezőpontjaira a $CC_1O_C\Delta$, $DD_1O_D\Delta$ derékszögű háromszögek egybevágóak. Tovább lépve, vegyünk most a két élünkön keresztül egy-egy 2-dimenziós lapot, és ezek középpontját jelöljük C_2 -vel illetve D_2 -vel. Ekkor a 2-lapok egybevágó és szabályos volta miatt a kapott $CC_1C_2O_C$ orthoszkém egybevágó a $DD_1D_2O_D$ orthoszkémmel. Az eljárást folytathatjuk a csúcsot tartalmazó egy-egy hiperlap C_{n-1} , D_{n-1} középpontjáig. Kapjuk, hogy a $CC_1 \cdots C_{n-1}O_C$ illetve $DD_1 \cdots D_{n-1}O_D$ orthoszkémek egybevágóak. Szomszédos csúcsokból elindulva a közbeeső lapokat $i = 1, \dots, n - 1$ esetén választhatjuk közösnek. Az egybevágóságból ekkor azonnal adódik, hogy $O_C = O_D$ áll fenn. Mivel a konvex poliéder felszíne élösszefüggő, ezért minden C csúcshoz ugyanaz az $O = O_C$ pont tartozik, ami a poliéder köré írható gömbjének a középpontja is egyben. Az első orthoszkém megfeleltetése a másodiknak tekinthető a megfelelő zászlók egybevágósággal való megfeleltetésének. Igazoljuk, hogy az indukált egybevágóság a poliéder szimmetriája is egyben. Ehhez elég látni, hogy minden csúcs képe szintén csúcsa a poliédernek. Ez világos azokra a

csúcsokra, melyek olyan hiperlaphoz tartoznak, mely egyik csúcsa C . Tekintsünk most egy, az ezen hiperlapok egyikével (F -el) szomszédos (azaz $(n-2)$ -lapban csatlakozó) G hiperlapot. A fentiekből rögtön látszik, hogy tetszőleges szomszédos hiperlappár hajlásszöge megegyezik. Mivel az egybevágóságunk F -t és lapját $F \cap G$ -t a D -t tartalmazó egy F' lapba illetve annak valamely $F' \cap G'$ lapjába viszi és F', G' lapok hajlásszöge megegyezik a kérdéses hiperlapszöggel, G képe az egybevágóságnál éppen G' . Ezért a G csúcsai is poliéder csúcsba mennek. Használva a konvex poliéder lapösszefüggőségét lépésről-lépésre kiderül, hogy a poliéder csúcsai rendre poliéder csúcsba mennek, azaz a zászlók megfeleltetését származtató egybevágóság a poliéder szimmetriája is egyben. $\square$

7.5.1. Kombinatorikus típusok

Schläfli svájci matematikus határozta meg a szabályos testek lehetséges kombinatorikus típusait magasabb dimenziókban. Róla nevezték el a szabályos poliéderekhez rendelt szimbólumot, mely a későbbiekben Coxeter majd Dynkin által lett kiterjesztve általánosabb poliéder leírására.

7.5.4. Definíció. Legyen P szabályos n -dimenziós poliéder. A

$$\sigma(P) := \{r_1, r_2, \dots, r_{n-1}\}$$

természetes számokból álló sorozatot indukcióval definiáljuk. Legyen r_1 a P 2-dimenziós lapjainak az oldalszáma, a sorozat fennmaradó része pedig $\sigma(Q)$, ahol Q a P csúcsalakzata. $\sigma(P)$ a P Schläfli diagramja röviden diagramja.

Bevezetünk még egy paramétert, mely a szabályos poliéder gömbölyűségét méri. Legyen

$$\rho(P) := \frac{l^2}{4r^2},$$

ahol r a P köré írt gömb sugara l a poliéder élhossza. Nevezzük $\rho(P)$ -t a P paraméterének. Az osztályozás alapját a következő összefüggés adja:

7.5.1. Lemma. Legyen P n -dimenziós szabályos poliéder, Q a csúcsalakzata, r_1 a P szimbólumának első eleme, ekkor

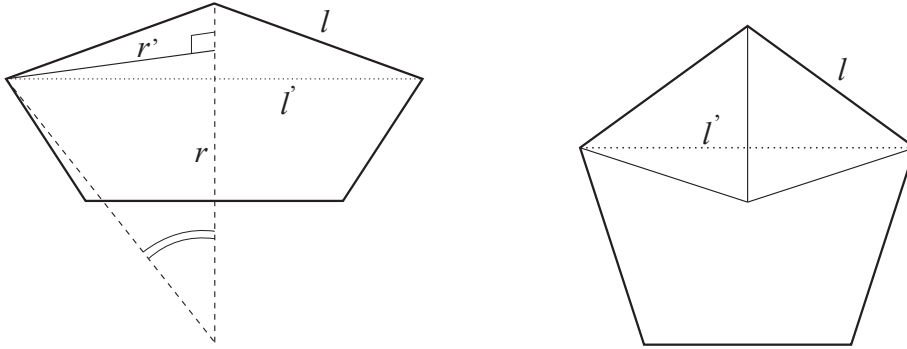
$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(Q)}$$

7.5.1. Megjegyzés. A formulából azonnal levonható egy-két fontos következtetés. Mivel $r_1 \geq 3$ és $\rho(P) > 0$ ezért $\rho(Q) > \frac{1}{4}$ kell, hogy teljesüljön.

Ebből azonnal kapjuk, hogy olyan $(n - 1)$ -dimenziós szabályos test, melynek paramétere nem nagyobb $\frac{1}{4}$ -nél nem lehet n -dimenziós szabályos poliéder csúcsalakzata. Ha ismerjük az $(n - 1)$ -dimenziós szabályos poliédereket, akkor ismerjük azok paraméterét. Ha egy paraméter nem haladja meg az $1/4$ értéket, akkor a szimbólum nem egészíthető ki egy első elemmel n -dimenziós szimbólummá. Ha viszont a paraméter értéke meghaladja az $\frac{1}{4}$ értéket, akkor véges sok lehetőségünk van a szimbólumhoz első r_1 érték ragasztásával n -dimenziós szimbólumot létre hozni, hiszen r_1 növelésével az

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(Q)}$$

érték monoton csökken, negatív pedig nem lehet. Azaz megadhatjuk dimenzió szerinti növekedéssel a lehetséges kombinatorikus típusok előállítását.



7.38. ábra. A lemma ábrái

Bizonyítás: Legyen φ a P poliéder éléhez tartozó középponti szög (a 7.38. ábrán két ívvel jelölt szög), r illetve r' a P illetve Q köré írt gömb sugara l illetve l' a P illetve a Q éleinek hossza. Ekkor láthatóan:

$$\sin \varphi = \frac{r'}{r} \text{ és } \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{l}{2r},$$

ahonnan

$$\rho(P) = \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \left(\frac{l \sin \varphi}{2r'}\right)^2.$$

Ha x a kétdimenziós lapok köré írt kör sugara, akkor

$$l = 2 \sin \frac{2\pi}{2r_1} x \text{ és } l' = 2 \sin \frac{2\pi}{r_1} x,$$

teljesül, ezért

$$\frac{l}{l'} = \frac{\sin \frac{2\pi}{2r_1}}{\sin \frac{2\pi}{r_1}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{r_1}}.$$

Innen

$$\rho(P) = \left(\frac{l' \sin \varphi}{4r' \cos \frac{\pi}{r_1}} \right)^2 = \rho(Q) \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\pi}{r_1}} \right)^2 = \frac{\rho(Q)}{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}} \rho(P) (1 - \rho(P))$$

egyenlőség adódik, aminek egyszerűsített és átrendezett alakja az állításban kimondott egyenlőség. $\square$

Kész vagyunk tehát a lehetséges szimbólumok előállítására. Mivel a kezdő $d = 2$ dimenziós eset megfelelő eredményeit ismerjük a következő táblázathoz juthatunk el:

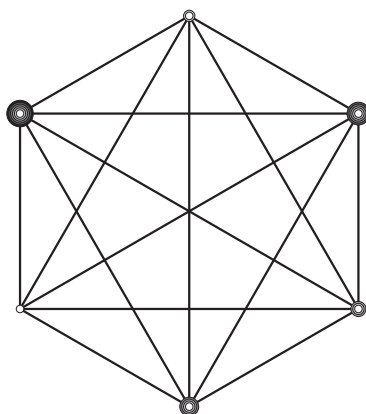
$d = 2$		$d = 3$		$d = 4$		$d \geq 5$	
$\sigma(P)$	$\rho(P)$	$\sigma(P)$	$\rho(P)$	$\sigma(P)$	$\rho(P)$	$\sigma(P)$	$\rho(P)$
{3}	$\frac{3}{4} \Rightarrow$	{3,3}	$\frac{2}{3} \Rightarrow$	{3,3,3}	$\frac{5}{8} \Rightarrow$	{3,3,...,3}	$\frac{d+1}{2d} \Rightarrow$
				{4,3,3}	$\frac{1}{4} \nRightarrow$	{4,3,...,3}	$\frac{1}{d} \nRightarrow$
		{4,3}	$\frac{1}{3} \Rightarrow$	{5,3,3}	$\frac{7-3\sqrt{5}}{16} \nRightarrow$		
				{3,4,3}	$\frac{1}{4} \nRightarrow$		
{4}	$\frac{1}{2} \Rightarrow$	{5,3}	$\frac{3-\sqrt{5}}{6} \nRightarrow$				
{3,4}	$\frac{1}{2} \Rightarrow$	{3,4}	$\frac{1}{2} \Rightarrow$	{3,3,4}	$\frac{1}{2} \Rightarrow$	{3,...,3,4}	$\frac{1}{2} \Rightarrow$
{3,5}	$\frac{5-\sqrt{5}}{8} \Rightarrow$	{3,5}	$\frac{5-\sqrt{5}}{10} \Rightarrow$	{3,3,5}	$\frac{3-\sqrt{5}}{8} \nRightarrow$		
{n ≥ 6}	$\sin^2 \frac{\pi}{n} \nRightarrow$						

7.5.2. Szimplex, kocka, keresztpolitóp

A táblázatból nyomonkövethető, hogy mely szabályos testnek lehet bármely dimenziós realizálása és melyik tekinthető (ha létezik) az adott dimenzió saját szingularitásának. Végül is csak három univerzális szabályos testet találunk, a tetraéder, oktaéder és kocka megfelelőit. Ebben az alfejezetben ezek létezését igazoljuk. Az n -dimenziós kocka definiálása az indukciós definíció alapján igen egyszerű.

n -dimenziós S szabályos szimplex

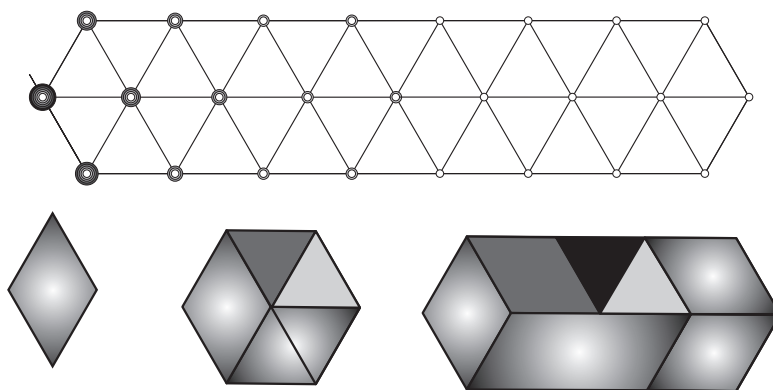
Az S n -dimenziós szabályos szimplexet definiáljuk, mint az $(n+1)$ -dimenziós tér egy derékszögű koordinátarendszere e_i $i = 1, \dots, n+1$ bázis egység helyvektorai konvex burkát. A szabályosság könnyen ellenőrizhető, hiszen minden



7.39. ábra. Szimplexek

zászló kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben van a definiáló helyvektorok egy permutációjával és a koordináták permutációja a tér egybevágóságát indukálja, amely tehát a szimplex szimmetriája is egyben. A teljes szimmetria csoport az S_{n+1} -el jelölt permutáció csoport. Elemszáma $(n+1)!$. A szimplex csúcsalakzata szimplex, ezért a szimbóluma $\sigma(S) = \{3, 3, \dots, 3\}$.

n -dimenziós C kocka

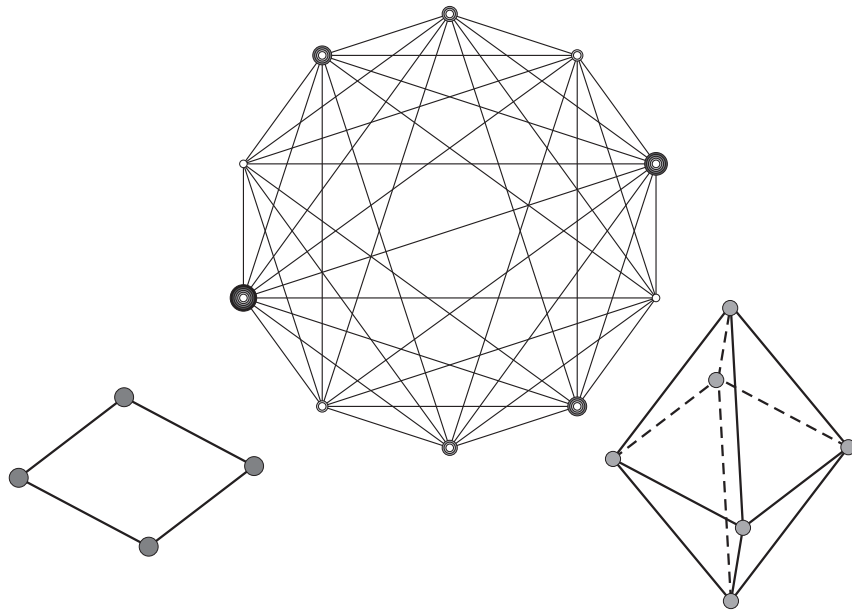


7.40. ábra. Kockák

Az 1-dimenziós kocka a szakasz a 2-dimenziós a négyzet, a 3-dimenziós a kocka. Ezek léteznek, ahogy ezt korábban láttuk. Az indukciós feltevés szerint az $(n-1)$ -dimenziós kocka létezik egy tetszőleges $(n-1)$ -dimenziós hipersíkban. Toljuk el a hipersíkra merőleges irányban az élhosszával, majd tekintsük a kiindulási kocka és az eltolt konvex burkát. A kapott konvex poliéder szabályos, mert a henger konstrukció miatt a két definiáló hiperlapján

kívüli valamennyi hiperlapja szintén ezekkel egybevágó kocka és a csúcsalakzatok a szimplex definíciója alapján $(n - 1)$ -dimenziós egybevágó szabályos szimplexek. A szimbólum tehát $\sigma(C) = \{4, 3, \dots, 3\}$. A szimmetria csoportot a közéhipersíkokra mint koordinátahipersíkokra vonatkozó tükrözések és a koordináta-permutációk generálják. A csoportot B_n -el jelöljük, elemszáma: $2^n n!$.

n -dimenziós K keresztpoliéder



7.41. ábra. Keresztpoliéderek

Az n -dimenziós koordináta-egységvektorok $2n$ végpontjának a konvex burka. Definíció szerint valamennyi hiperlapja $(n - 1)$ -dimenziós szabályos szimplex. (Természetesen egybevágóak.) Csúcsalakzatai indukció szerint $(n - 1)$ -dimenziós szabályos egybevágó keresztpoliéderek, azaz maga is szabályos poliéder. A háromdimenziós példánya az oktaéder, ennek csúcsalakzata négyzet, ezért a szimbóluma $\sigma(C) = \{3, 3, \dots, 4\}$. Szimmetria csoportja ugyanaz mint a neki megfelelő kockáé B_n . A kocka és a keresztpoliéder duális testek, azaz minden kombinatorikai adatvektoruk, a szimbólumuk, a lapvektoraik egymás fordított sorrendben való leírásával kaphatók. Geometriailag a kocka hiperlap-középpontjainak konvex burka keresztpoliéder és fordítva is ez teljesül. A definíciónknak megfelelő kockából a kétszer alkalmazott „vegyük a lapközéppontok konvex burkát” előírás egy $\frac{1}{n}$ arányú középpontosan hasonló kockát állít elő.

7.5.3. Négydimenziós szabályos poliéderek

Mint minden kettő-hatvány dimenziójú térnek, a 4-dimenziósnak is rendkívüli tulajdonságai vannak. Ennek egyik kiemelkedő példája a szimmetria gazdagság, ami hat szabályos testet is eredményez. Ebben a fejezetben igazoljuk, hogy a lehetséges kombinatorikus típusok realizálhatóak is.

Mivel 4-dimenzióban is van szimplex (pentachoron), kocka (octachoron), keresztpoliéder (hexadecachoron), már csak a további lehetőségek létezését kell kimutatnunk. A hiperlapszáma ezen poliédereknek is különböző, ezért a szokásnak megfelelően ezen szám adja nálunk is az elnevezésüket. (A standard esetek egy elnevezése, ezen elv alapján: 5-cella, 8-cella illetve 16-cella.) Az új lehetőségek pedig rendre: 24-cella, 120-cella illetve 600-cella.

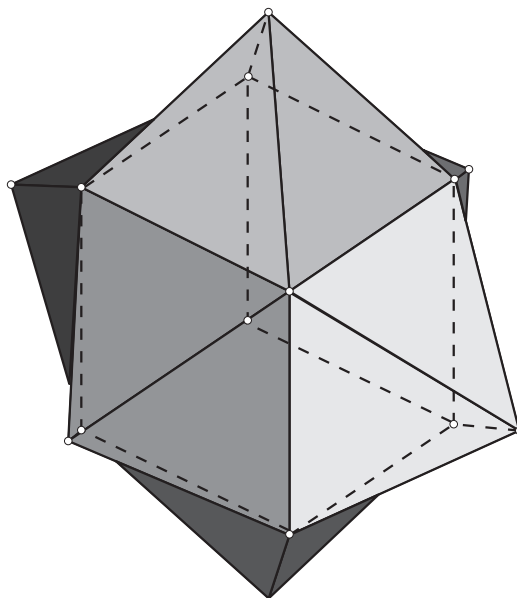
A duális szabályos testek egyesítésének gondolata három dimenzióban is fontos testekhez vezet. Próbáljunk meg ötvözni két szabályos testet, melyek egymás duálisai, azaz azonos a szimmetriacsoportjuk. 3-dimenziós közös terünkben erre két lehetőség adódik; kocka-oktaéder, dodekaéder-ikozaéder. Az elhelyezésük olyan kell, hogy legyen, hogy a szimmetriacsoportjuk ugyanazon egybevágóságokat tartalmazzák, ez határozza meg a duális pozíciót, azaz az oktaéder legyen középpontosan hasonló a kocka lapközéppontjai által meghatározott oktaéderrel, az ikozaéder a dodekaéder lapközéppontjai által meghatározott ikozaéderrel. Célunk megválasztani a hasonlóság arányát olyannak, hogy a két test csúcsainak uniója mint csúcshalmaz által, egyenlő hosszú élekkel rendelkező testet származtathassunk. A duális pozíció szerint az első test minden lapját ilyen alapú szabályos gúlával szeretnénk helyettesíteni. Erre akkor van lehetőségünk, ha a lap középpontja kisebb távolságra van a csúcsaitól, mint a lap élhossza. Mivel szabályos test lapja legfeljebb ötszög, ez a feltétel teljesül. Ezen a módon háromszöglapokkal határolt poliédereket kapunk, ahol a lapok hajlásszögei determináltak, ezért előfordulhat, hogy a háromszöglapok „összeállnak” egy nagyobb oldalszámú sokszöglappá.

Tekintsük először a kocka-oktaéder párost. Ha kocka lapokhoz adjunk újabb csúcsokat, ezeket a lapközéppontok felett fél lapátlónyi távolságra kell elhelyezni ahhoz, hogy az új háromszögek szabályosságát garantálhassuk. A szabályos gúla alaplapon fekvő lapszöge ekkor

$$\tan^{-1} \sqrt{2} > \frac{\pi}{4}$$

azaz konkáv testet kapunk. A csúcsai két osztályba sorolhatóak; a volt kocka csúcsokban 6 él fut össze, ezek definíciónk szerinti csúcsalakzata egy 8 háromszöglap által határolt konvex poliéder (két szabályos háromszög lap 1 illetve $a = \sqrt{2 \frac{(1+\sqrt{2})^2}{4}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}$ élhosszakkal, három-három egyenlőszárú háromszög a fenti élhosszak két típusának megfelelően); az oktaéder csú-

csokban 4-él fut össze a csúcsalakzat négyzet. Ez tehát igen messze van a szabályostól.



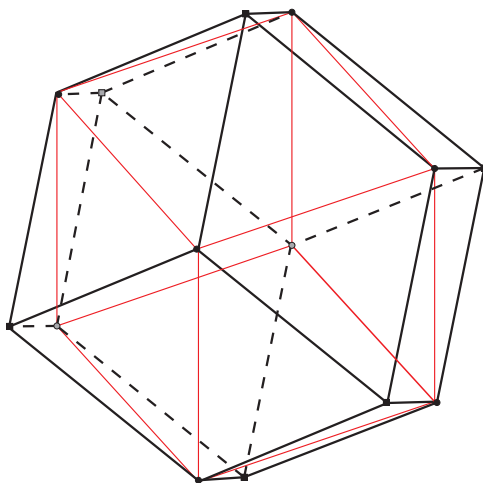
7.42. ábra. Kockára írt szabályos gúlák

Megválaszthatjuk a hasonlóság arányát úgyis, hogy az eredeti kocka élek ne legyenek élei az új poliédernek. Ekkor az élegyenlőség feltételét lecserélve arra a feltételre, hogy a kocka élek mentén egysíkú szomszédos lapokat kapjunk, a kocka lapok feletti pontokat fél-él magasságban kell elhelyezni. A kapott test minden éle $\frac{\sqrt{3}}{2}$ hosszúságú lesz, lapjai azonban nem lesznek szabályosak, hiszen rombuszok (1 illetve $\sqrt{2}$ hosszú átlókkal). Kétféle csúcsa van, az egyik típus szabályos háromszög, a másik négyzet csúcsalakzattal rendelkezik. 12-lapú test a dodekaéderhez hasonló felépítéssel a neve *romb-dodekaéder*.

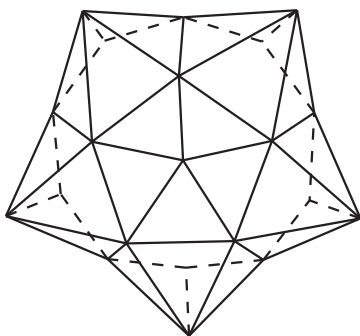
Végül tekinthetjük az oktaédert első testnek és ekkor egy nevezetes testhez a Kepler által „stella octangulá”-nak hívott csillagtesthez jutunk. Ezt két közös középponttal rendelkező szabályos tetraéder uniójaként is származtathattuk volna.

A dodekaéder-ikozaéder pár is érdekes testeket szolgáltat. Ha a dodekaéder lapjaira szabályos ötoldalú gúlákat emelünk, a kapott test dodekaéder-élnél létrejövő lapszöge:

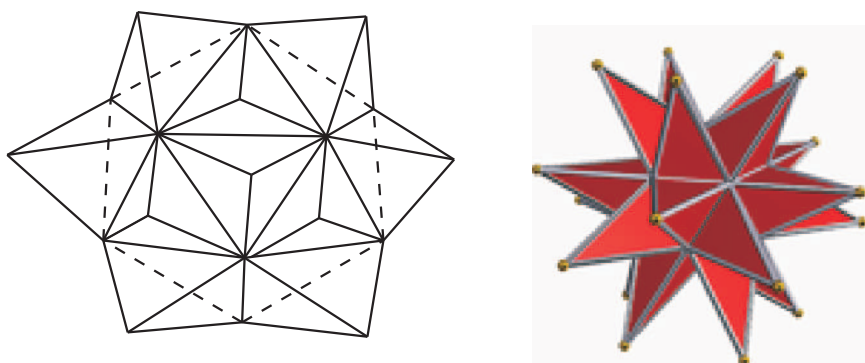
$$\alpha + 2\beta > 139^\circ + 2 \cos^{-1} \frac{1}{\frac{2 \tan 36^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = 139^\circ + 2 \cos^{-1} \frac{1}{\tan 36^\circ \sqrt{3}} = 138^\circ + 74^\circ > \pi,$$



7.43. ábra. Rombdodekaéder

7.44. ábra. Stella Octangula (<http://www.korthalsaltes.com>)7.45. ábra. Egyenlőoldalú, dodekaéder szimmetriájú testek
(http://en.wikipedia.org/wiki/Small_stellated_dodecahedron)

konkáv, így a test egyenlő-élű konkáv test, persze nem szabályos, de közeli rokonságban van a Kepler-Poinset féle kis csillagosított dodekaéderrel. Ezen utóbbit úgy kapjuk testünkéből, hogy szabályos ötoldalú gúla helyett olyan szabályos ötszög alapú egyenlőszárú gúlákat építünk, melyek oldallapjai a dodekaéder lapsíkjaiba esnek. (59° -os lapszögekről van szó 37° -osak helyett.) Ilyenkor a gúla lapok összeállnak pentagrammákká, melyek szabályos csillag ötszögek.

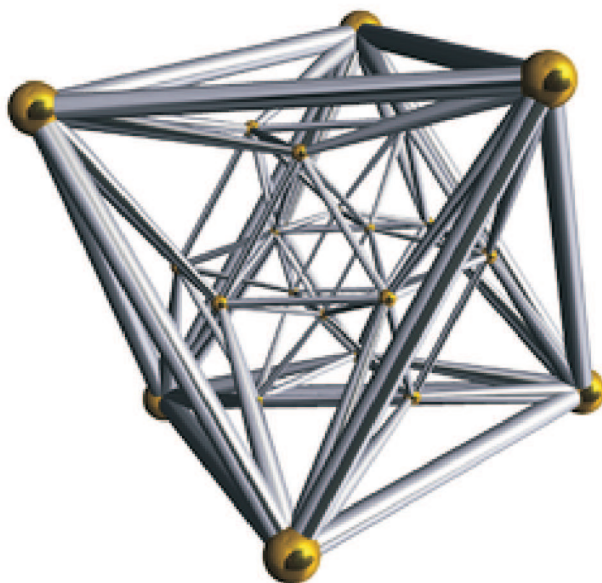


7.46. ábra. Egyenlőoldalú, ikozaéder szimmetriájú testek
(http://en.wikipedia.org/wiki/Great_stellated_dodecahedron)

Az ikozaéderre épített egyenlőoldalú ikozaéder szimmetriájú test hasonlóan az előző esethez szintén Kepler-Poinset-féle testbe deformálható, ha a szabályos tetraédereket megint úgy nyújtjuk, hogy a lapok síkjai szabályos pentagrammákká álljanak össze. Ekkor kapjuk a nagy csillagosított dodekaédert. 7.46 ábránkon ezt a poliédert párt látjuk.

A 24-cella (icositetrachoron)

A 4-dimenziós térben a fentiekben vizsgált konstrukció újabb szabályos testet eredményez. Mivel minden dimenzióban rendelkezésünkre áll a kockakereszt-poliéder duális szabályos testpár, ezért megpróbálkozhatunk ezen testekből egy tőlük különböző szabályos testet létrehozni. Induljunk ki a kockából és a hiperlapközepponatok felett vegyük fel egy kereszt-poliéder csúcsait, úgy, hogy az új pontoknak a kockacsúcsoktól mért távolsága a kocka élhosszával legyen egyenlő. Ez megtehető, hiszen a 3-dimenziós egységkocka fél-testátlója $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ hosszúságú, így keresett pontok hiperlap-középponttól mért távolságait $\frac{1}{2}$ -nek választva éppen ilyen pontokhoz jutunk. A kapott négydimenziós gúlák oldallapjai, négyzet fölé emelt szabályos négyoldalú 3-dimenziós gúlák, melyek hipersíkjai a 4-dimenziós gúla alaplapjával bezárt szöge $\frac{\pi}{4}$. Tetszőleges 2-dimenziós négyzetlaphoz, pontosan 2 darab 3-

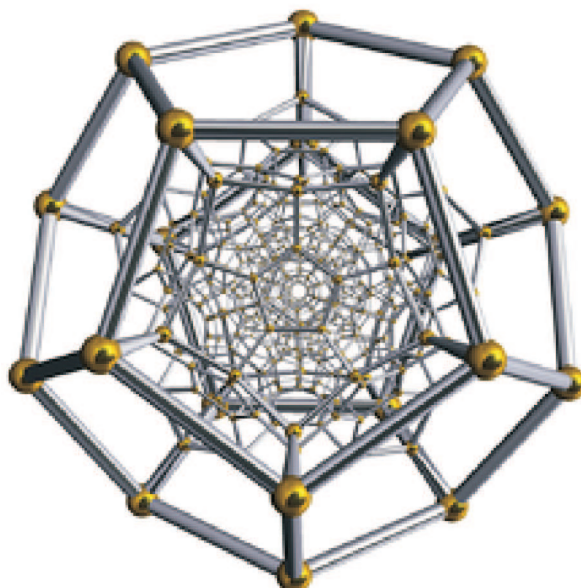


7.47. ábra. A 24-cella 3-dimenziós Schlegel diagramja
 (<http://en.wikipedia.org/wiki/24-cell>)

dimenziós kocka lap illeszkedik, kiindulási kockánkban, ezért az új testben két ilyen szabályos négyoldalú 3-dimenziós gúla illeszkedik egymáshoz, ezen közös négyzetlap mentén. Azonban a $\frac{\pi}{4}$ hajlásszögekre tekintettel, ezen 3-dimenziós gúlák, közös 3-dimenziós hipersíkba esnek, azaz egy szabályos oktaédert alkotnak. Így a 3-dimenziós rombdodekaéder esetével állunk szemben, a 4-dimenziós gúlák hiperlapjai kettesével 3-dimenziós szabályos oktaédereket alkotnak. Ezen oktaéderek mindegyike a kocka egy négyzetlapját tartalmazza, ezért 24 ilyen lapot találunk (a kocka 8 3-dimenziós lapja mindegyikén van 6 négyzetlap, melyek mindegyike pontosan 2 darab 3-dimenziós lap lapja). A 24 oktaéder mindegyike tartalmaz 8 szabályos háromszöglapot, melyek mindegyike éppen 2 oktaéder közös lapja, azaz testünknek van 96 darab szabályos háromszöglapja. A csúcsok száma a kocka csúcsai és lapjai számának összege, ezért szintén 24. Végül az élek számát megkapjuk, ha a kocka éleinek számához, (ami éppen 32) hozzáadjuk az általunk létrehozott 8 új csúcsból induló $8 \cdot 8 = 64$ új élet, így ez is 96. A test nyilvánvalóan konvex, így a szabályosságának igazolásához elegendő csúcsalakzatait megvizsgálni. A 8 új csúcs csúcsalakzata 3-dimenziós kocka, tekintsünk tehát egy eredeti kocka csúcsot. Ebből –mint a többiből is– éppen 8 él indul ki, 4 darab a csúcsot tartalmazó 4 kocka hiperlaphoz adjungált új csúcsba, 4 pedig a csúcsot tartalmazó 4 kockaélhez tartozó szomszédos kockacsúcsba. A nyolc pont konvex burkaként kapott testet könnyen megvizsgálhatjuk, ha a csúcsokat alkalmas koordináta-

rendszerben felírjuk. Kiindulási kockánk csúcspontjai legyenek a $\frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)^T$ koordinátákkal megadott pontok az új pontok ekkor $\pm e_i$ helyvektorú pontok. Az $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$ csúcs szomszédai ekkor az $(1, 0, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1, 0)^T$, $(0, 0, 0, 1)^T$ új csúcsok mellett a $\frac{1}{2}(-1, 1, 1, 1)$, $\frac{1}{2}(1, -1, 1, 1)$, $\frac{1}{2}(1, 1, -1, 1)$, $\frac{1}{2}(1, 1, 1, -1)$ eredeti kocka csúcsok. Most már könnyen ellenőrizhetjük, hogy ezen pontok szintén egy 3-dimenziós egységkocka csúcspontjai, melynek középpontja az $\frac{1}{4}(1, 1, 1, 1)$ pont, lapjait pedig két-két új illetve régi csúcs alkot, mint egy négyzet átlóinak két-két végpontja. (Például az $(1, 0, 0, 0)^T$, $\frac{1}{2}(1, 1, -1, 1)$, $(0, 1, 0, 0)^T$, $\frac{1}{2}(1, 1, 1, -1)$ pontnégyes egy négyzetlap négy csúcsa.) Látjuk tehát, hogy a szimbóluma $\{3, 4, 3\}$. Dirichlet-Voronoi cellaként is fellép, a 4-dimenziós lapcentrált kockarács Dirichlet-Voronoi cellája, és mint ilyen érdekes extrémális tulajdonságokkal rendelkezik.

A 120-cella (hecatonicosachoron)



7.48. ábra. A 120-cella 3-dimenziós Schlegel diagramja
(<http://en.wikipedia.org/wiki/120-cell>)

Ahogy a dodekaédert fel lehet építeni szabályos ötszögekből használva az ötszög szimmetriáit, úgy a 120-cellát is fel lehet építeni dodekaéderekből, használva a dodekaéder szimmetriáit. Mivel a háromdimenziós tér egy szabályos tetraéder középpontjából kiinduló félegyenesek által négy egybevágó végtelen háromoldalú gúlára bontható, ahol a gúla élek hajlásszögei $2 \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 109,4^\circ > 108^\circ$ ezért egy ötödik, a tetraéder 3-dimenziós terére

merőleges egyenes irányában a tetraéder középpontja felett van olyan pont, melyből a tetraéder valamennyi éle 108° alatt látszik. A szabályos tetraéder csúcsait az $(1,0,0,0)^T$, $(0,1,0,0)^T$, $(0,0,1,0)^T$, $(0,0,0,1)^T$, koordinátákkal ellátva az említett P pont koordinátái (t, t, t, t) alakban kereshetők, és így a

$$\cos 108^\circ = \frac{2t(t-1) + 2t^2}{(1-t)^2 + 3t^2} = \frac{4t^2 - 2t}{4t^2 - 2t + 1}$$

összefüggés alapján $0 = 4(1 - \cos 108^\circ)t^2 - 2(1 - \cos 108^\circ)t - \cos 108^\circ$ összefüggés adódik t -re. Innen

$$\begin{aligned} t &= \frac{2(1 - \cos 108^\circ) + \sqrt{4(1 - \cos 108^\circ)^2 + 16(1 - \cos 108^\circ) \cos 108^\circ}}{8(1 - \cos 108^\circ)} = \\ &= \frac{(1 - \cos 108^\circ) + \sqrt{1 + 2 \cos 108^\circ - 3 \cos^2 108^\circ}}{4(1 - \cos 108^\circ)} \end{aligned}$$

Mivel $\cos 108^\circ = -\cos 72^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, ezért $(1 - \cos 108^\circ) = \frac{\sqrt{5}+3}{4}$ és

$$t = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

A P pontból a tetraéder csúcsokba mutató félegyenések irányvektorai az

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}, -\frac{3 - \sqrt{5}}{4}, -\frac{3 - \sqrt{5}}{4}, -\frac{3 - \sqrt{5}}{4} \right)^T, \\ &\left(-\frac{3 - \sqrt{5}}{4}, \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, -\frac{3 - \sqrt{5}}{4}, -\frac{3 - \sqrt{5}}{4} \right)^T, \\ &\left(-\frac{3 - \sqrt{5}}{4}, -\frac{3 - \sqrt{5}}{4}, \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, -\frac{3 - \sqrt{5}}{4} \right)^T, \\ &\left(-\frac{3 - \sqrt{5}}{4}, -\frac{3 - \sqrt{5}}{4}, -\frac{3 - \sqrt{5}}{4}, \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^T \end{aligned}$$

vektorok. Ezekből kiszámolhatjuk a 3-dimenziós hipersíkok normálvektorait, melyek rendre

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{5}, 1, 1, 1 \right)^T, \left(1, \sqrt{5}, 1, 1 \right)^T \\ &\left(1, 1, \sqrt{5}, 1 \right)^T, \left(1, 1, 1, \sqrt{5} \right)^T. \end{aligned}$$

A normálvektorok hajlásszöge ekkor a

$$\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

összefüggés alapján 36° .

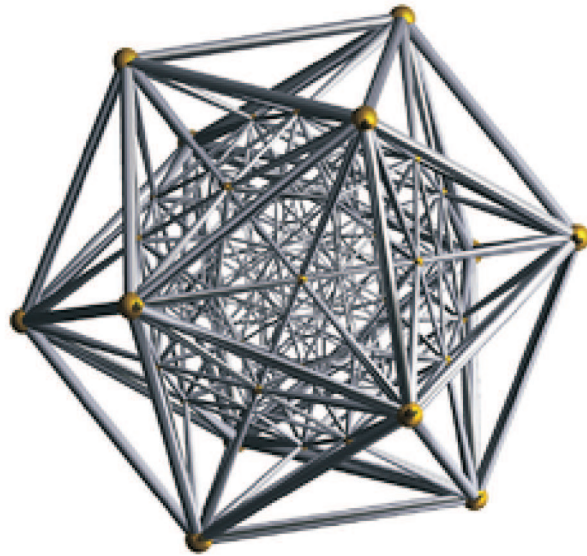
Bármely három félegyenes, ami az említett pontból indul és tetraéder csúcson halad át egy dodekaéder szögletet határoz meg saját 3-dimenziós terében, ahonnan láthatjuk, hogy a 4-dimenziós térben összeilleszthető 4 páronként 36° -os szöget bezáró dodekaéder úgy, hogy egy közös csúcsuk van, bármely kettő közös lappal rendelkezik és a közös csúcsból kiinduló élek pontosan 3 dodekaéderhez tartoznak. Azaz a 4-dimenziós tér egy 3-dimenziós poliedrikus felület darabját alkotják. A szomszédos hiperlapok síkjainak hajlásszögét a következőképpen számolhatjuk ki. A dodekaéderek középpontjából a hipersíkjukra állított merőlegesek a rendszer tengelyén metszik egymást, mely a közös csúcsot a tetraéder középpontjával összekötő egyenes. Ettől a ponttól a dodekaéder csúcsok, élfelező pontok, lapok középpontjai, testközéppontok rendre egyenlő távolságra vannak. Rögzítsük kiindulási poliédernak az egyik dodekaédert és vegyünk a 4-dimenziós tér egy olyan egybevágóságát, mely a dodekaéder hipersíkjára merőleges irányban identitás a dodekaéder hipersíkjában viszont a dodekaéder egy szimmetriája. Ezen egybevágóság a már meglévő 3 másik poliédert a kiindulási dodekaéder újabb szomszédjaiba viszi oly módon, hogy tetszőleges 4 közös csúccsal rendelkező poliéder az eredetivel egybevágó dodekaéder négyesnek felel meg. A dodekaéder teljes szimmetriacsoportjának alkalmazása után egy olyan 4-dimenziós „hamutálcát” kapunk, mely központi poliédere a kiindulási dodekaéder, és azt körülveszi 12 újabb dodekaéder, melyek hipersíkjai a kiindulási dodekaéder hipersíkjával a 4 dodekaéder konstrukciónknak megfelelő hipersík hajlásszögeket zárják be. Folytassuk konstrukciónkat a 12 szomszéd szomszédainak a megkeresésével. Mindegyik szomszédnak van 12 szomszédja melyek közül 6-t már felvettünk. A maradék hatból öt három dodekaédernél is fellép szomszédként, egy viszont – amelyik az érintkezési ötszög átellenes ötszögében érint – csak a választott szomszéd szomszédja. Ezért a második szomszédok száma $\frac{12 \cdot 5}{3} + 12 = 32$. Hamutálcánk most 45 dodekaéderből áll melyek közül 13-nak az összes szomszédja megvan, 20 darabnak 3 szomszédja 12-darabnak 6 szomszédja hiányzik. Ahogy azt megmutattuk, 2-dimenziós lap mentén való csatlakozás során a két egymást követő dodekaéder síkja 36° -os szöget zár be egymással. A kiindulási dodekaéder egy átellenes lappárjához csatlakozó poliédereknek tekintsük azon szomszédait, mely az érintkezési lappal átellenes lap mentén fellépő második szomszédja az eredetinek. Ezen öt poliéder egy olyan láncot alkot a felületünkön, melyben az egymást követő dodekaéderek hipersíkjai rendre 36° -ot zárnak be, és a dodekaéderek centrumai illeszkednek egy

2-dimenziós affin altérre, mely merőleges a párhuzamos csatlakozási alterekre és átmegy a hamutálca középpontján. Ezen középpont körül a 2-dimenziós altéren belüli 4 darab 36° -os elforgatás az egyik szélső (eredetileg második szomszéd) dodekaéder középpontját átviszi a másik szélső dodekaéder (ez szintén eredetileg második szomszéd) középpontjába, így a lánc folytatása során kapott hatodik dodekaéder (ami harmadik szomszéd lesz) középpontja éppen 180° -os elforgatottja az eredetinek. Ez azt jelenti, hogy ilyen lánc mentén elhelyezkedő harmadik szomszéd előáll, mint a lánc első dodekaéderének a hamutálca középpontjára való tükröke. A hamutálcát a középpontjára tükrözve az eredetihez csatlakozó újabb 45 db dodekaéderből álló összefüggő komplexust kapunk ezt 12 ötszög lap kapcsolja az eredetihez, mely a két hamutálca egy-egy dodekaéderének közös lapja. Egy ilyen összekapcsoló ötszög élei mellé egy-egy dodekaédert ragasztva, egyszerre megkonstruálhatjuk a két félen elhelyezkedő két-két dodekaéder teljes szomszédtságát. Ezen harmadik szomszédok mindegyike két ilyen ötszög egy-egy élét kapcsolja össze, ezért a számuk 30.

A kapott zárt poliedrikus felület, szabályossága a konstrukcióból azonnal következik, mivel 120 cellája van 120-cellának hívjuk. A szimbóluma: $\{5,3,3\}$. Az analitikusan bizonyítás történhet a 600 csúcs koordinátáinak konkrét megadásával.

A 600-cella (hexacosichoron)

Az utolsó 4-dimenziós szabályos test a 120-cella duálisa. Ennek származtatása történhet a 120-cella középpontjainak konvex burkaként. Minden csúcspanaszban 20 szabályos tetraéder találkozik, melyek mindegyikét 4 csúcspanasz számoljuk így $\frac{20 \cdot 120}{4} = 600$ tetraéder alkotja a test határát, a csúcsalakzatai kétszeres nyújtással kaphatóak a 120-cella egy cellája lapközéppontjai által meghatározott ikozaéderből, tehát egybevágó ikozaéderek. Egy további szintetikus előállítás lehetséges a következő igen plauzibilis módon: Tekintsük egy 24-cella csúcshalmazát (az egységkocka (2 élhosszú) és egy kétszeres méretű (4 átlóhosszú) keresztpoliéder csúcshalmazának unióját) és helyezzünk el az aranymetszés arányának $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ -nek megfelelő magasságban a koordináta hipersíkokkal párhuzamos síkokat (8 darabot minden pozitív és negatív tengelyfélegyenest). Ezen hipersíkokban tekintsünk a koordináta hipersíkokkal párhuzamos lapú egység élhosszú kockákban a felszínén elhelyezett szakaszrendszer által indukált ikozaédereket. A lehetőségek közül válasszunk egy rögzített koherens másik hetet, azaz koordináta permutációval a csúcshalmazok legyenek egymásnak megfeleltethetők. A kapott pontrendszer $24 + 8 \cdot 12 = 120$ pontból áll. A szabályos 600-cella nem más mint ezen pontrendszer konvex burka. A szimbóluma $\{3,3,5\}$ és a fent leírt csúcspontrendszer



7.49. ábra. A 600-cella 3-dimenziós Schlegel diagramja
(<http://en.wikipedia.org/wiki/600-cell>)

szintén könnyen megadható koordinátákkal.



7.50. ábra. Leonhard Euler

7.6. Euler

Leonhard Euler egy német hercegnőnek számos filozófiai tartalmú levelet írt, melyek összegyűjtve angol fordításban és kiadásban 1837-ben jelentek meg. Ezek közül idézzük az egyik levelet.

L. EULER: CXV. LEVÉL

AZ EMBERI ISMERETEK IGAZI ALAPJAI. AZ IGAZSÁG FORRÁSA ÉS A
BELŐLE SZÁRMAZÓ INFORMÁCIÓK OSZTÁLYAI.

Bátorkodom kifejteni Ön előtt a véleményemet az emberi tudás legfontosabb fejezetére vonatkozóan, és azzal hízelgek magamnak, hogy el fogom oszlatni azon kétségeket, amelyek természetes módon merülnek fel a szellem szabadsága fogalmának kérdésében.

Engem ér a megtiszteltetés hogy felhívjam az Ön figyelmét minden ismeretünk igazi alapjára, az igazság bizonyosságának jelentésére és a bizonyosságra abban, amit tudunk. Nagyon messze állunk attól, hogy mindig bizonyosak legyünk azon véleményeink igazságában, amik hamisságát később felfedezzük; néha túlságosan elkápráztat minket a látszat, néha túlságosan elhanyagoljuk azt. Eképpen folytonosan az a veszély fenyeget bennünket, hogy becsapjuk magunkat, egy

gondolkodó ember köteles minden erejét használni a hiba elkerüléséhez, bár nem lehet mindig olyan boldog mintha sikert érne el. Amit most itt fővonalakban áttekintünk, az azon bizonyítások megbízhatósága, amelyeket magunk meggyőzésére találunk bárminek valamilyen igazságáról; feltétlenül szükséges olyan állapotot elérnünk, hogy meg tudjuk ítélni, hogy ezek elegendőek-e a meggyőzésünkre, avagy sem. Ebben az értelemben először is megjegyzem, hogy minden a mi hatáskörünkbe eső igazság besorolható három osztályba, amelyek lényegükben különböznek egymástól.

Az első tartalmazza az érzékelés igazságait; a második, a megértését, és a harmadik, a hitét. Mindegyik osztály a benne található igazságoknak sajátos bizonyításait igényli, és ebbe a három osztályba minden emberi ismeret bennfoglaltatik. Az első osztály bizonyításai az érzékelésre vezethetők vissza és ezért eképpen fejezhetők ki:

Ez igaz, mert láttam, vagy meggyőződtem róla az érzékelésem bizonyossága által.

Ily módon tudom, hogy a mágnes vonzza a vasat, mert láttam, és ez kétségbenvonhatatlan bizonyítékot szolgáltatott nekem erre a tényre. Ennek az osztálynak az igazságait érzékelhetőnek nevezzük, mert az érzékeken alapul, vagy a tapasztalaton.

A második osztály bizonyításai a szellem képességein alapulnak:

Ez igaz, mert igazolni tudom az okfejtés elveivel, vagy helyes szillogizmussal.

Ehhez az osztályhoz alapvető logika szükséges, amely leírja a konzekvens okfejtés szabályait. Eképpen tudjuk, hogy egy háromszög szögösszege két derékszöggel egyenlő. Ebben az esetben én nem mondom, hogy ezt láttam, vagy az érzékeim meggyőztek erről; de egy okfejtés alapján ennek az igazságáról meg vagyok győződve. Az igazságok ezen osztályát *intellektuális* igazságnak nevezzük; és ide kell sorolnunk a geometria igazságait, és más tudományokéit, amennyiben ezek bizonyítással alátámasztottak. Érzékelheti, hogy ezek az igazságok teljesen különböznek az első csoport igazságaitól, amelyek támogatására nincs más bizonyításunk mint az érzékeink, vagy a tapasztalat, amelyek biztosítják, hogy ez a tény, mégha nem is tudjuk az okát. A mágnes példájában, nem tudjuk hogy a vasra gyakorolt vonzás szükségszerű hatása-e a vas és a mágnes természetének; de legkevésbé sem kételkedünk a tény igazságában. Az első osztály igazságai eképpen ugyanolyan bizonyosak mint a második osztályé, habár a bizonyítások alapvetően különböznek.

Továbblépve a harmadik osztály igazságaira, a hitvallás igazságaira, amelyeket azért hiszünk mert hitelre méltó személy mondja őket; vagy, amikor azt mondjuk:

Ez igaz, mert számos hiteles ember biztosított minket róla.

Ez az osztály tartalmazza az összes *történelmi igazságot*. Kétségtelen, hogy azt gondolja, hogy volt korábban Makedóniának egy Nagy Sándornak nevezett kirá-

lya, aki meghódította Perzsiát, habár sohasem látta őt, és nem tudja geometriai módon bizonyítani, hogy egy ilyen személy valaha is élt. De mi elhisszük azon szerzők tekintélye alapján, akik megírták a történetét, és mi nem kételkedünk a történetük hűségében. Miért ne lenne lehetséges, hogy ezek a szerzők összebeszélve becsaptak minket? Minden okunk meg van elvetni egy ilyen gyanúsítást; és ezért meg vagyunk győződve ezen tények igazságáról, legalább olyan nagy részükben, mint az első vagy a második osztály igazságai esetében.

Ezen három osztály igazságai szélsőségesen különböznek; de ha szilárdak, mindegyik fajta esetén, egyenlő mértékben meggyőzőek. Nem tud abban kételkedni, hogy oroszok és osztrákok is vannak Berlinben, habár sohasem látta őket: ezt, tehát a harmadik osztály igazságának tartja, és ezt elhiszi mások beszámolója alapján; ugyanakkor nekem ez az első osztályba tartozik, mert láttam Őket, és beszélgettem velük; és sokan mások is biztosak voltak jelenlétükben az érzékeik útján. Önnek, azonban, ugyanolyan teljes bizonyossága lehet a tényről mint nekünk.

1761 *Március* 31



7.51. ábra. Raffaello Santi: Az athéni iskola

7.7. Euklidész: Elemek XII. és XIII. könyvei

Mi az analízis és mi a szintézis? Analízis az, ha az állítást bizonyítottnak véve abból következtetünk, míg valamely elfogadott igazsághoz jutunk.

Szintézis az, ha ebből az elfogadott igazságból következtetünk, míg az állítás teljességéhez vagy megragadásához jutunk.

Euklidész: Elemek

Könyvünkben Euklidész örök művének az Elemeknek az első könyvét idéztük először, befejező idézetünk, ugyanezen mű két záró könyve a XII. illetve a XIII. könyv. Ezen könyvek területtel, térfogattal, poliéderekkel kapcsolatos állításokat tartalmaz, melyek bizonyításához Lemmákat is használ a szerző. Most csak a tételeket idézzük kimondások sorrendjében.

EUKLIDÉSZ: ELEMÉK

XII.KÖNYV

TÉTELEK:

1. A körökbe írt hasonló sokszögek úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmérők négyzetei.

2. A körök (területei) úgy aránylanak egymáshoz, mint átmérőik négyzetei.
3. Minden háromszög alapú gúla szétesik két egyenlő, egymáshoz és a teljes gúlához hasonló háromszög alapú gúlára és két egyenlő hasábra. A két hasáb összege nagyobb a teljes gúla felénél.
4. Ha van két azonos magasságú háromszög alapú gúla, és mindegyiket fölbontjuk két, egymással egyenlő és a teljes gúlához hasonló gúlára és két egyenlő hasábra [és a keletkezett gúlákat ugyanígy és így tovább], akkor az egyik gúlában levő valahány hasáb összege a másik gúlában levő ugyanannyi hasáb összegéhez hasonló.
5. Az azonos magasságú háromszög alapú gúlának úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjuk.
6. Az azonos magasságú sokszög alapú gúlának úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjuk.
7. Minden háromszög alapú hasáb szétesik három, egymással egyenlő háromszög alapú gúlára.
8. Hasonló háromszög alapú gúlának a megfelelő éleikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak.
9. Az egyenlő háromszög alapú gúlának fordítva arányos az alapjuk a magassággal; s amely háromszög alapú gúlának fordítva arányosak az alapjaik a magassággal, azok egyenlők.
10. Minden kúp harmadrésze az egyenlő magasságú és ugyanazon alapon fekvő hengernek.
11. Az azonos magasságú kúpok és hengerek úgy aránylanak egymáshoz mint az alapjuk.
12. Hasonló kúpok és hengerek egymással az alapjaik átmérőihöz viszonyítva háromszoros arányban állnak.
13. Ha egy hengert a szemközti lapokkal párhuzamos síkkal metszünk, akkor a nyert hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint a tengelyeik.
14. Az egyenlő alapokon fekvő kúpok és hengerek úgy aránylanak egymáshoz, mint a magasságaik.
15. Az egyenlő kúpoknak és hengereknek fordítva arányos az alapjuk a magassággal; s amely kúpoknak és hengereknek fordítva arányos az alapja a magassággal, azok egyenlők.

16. Írjunk két koncentrikus kör nagyobbikába egy olyan páros oldalszámú, egyenlő oldalú sokszöget, mely diszjunkt a kisebb körtől!
17. Írjunk két koncentrikus gömb nagyobbikába olyan poliédert, mely diszjunkt a kisebb gömb felületétől.
18. A gömbök az átmérőikhez viszonyítva háromszoros arányban állnak egymással.

A következő tételekben szereplő "folytonos arány"-ban való osztás az aranymetszés arányában való osztást jelenti, azaz "a kisebb úgy aránylik a nagyobbhoz mint a nagyobb az egészhez". Az "apotomé" a nagyobb darab és a "minor" a kisebb elnevezése.

EUKLIDÉSZ: ELEMÉK

XIII.KÖNYV

TÉTELEK:

1. Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a nagyobb darab és a teljes szakasz fele összegének a négyzetértéke ötszöröse a fél szakasz négyzetének.
2. Ha egy szakasz négyzetértéke ötszöröse valamely darabjének, akkor a mondott darab kétszeresét folytonos arányban osztva a nagyobb darab épp az eredeti szakasz másik része.
3. Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a kisebb darab és a nagyobb darab fele összegének a négyzetértéke ötszöröse a nagyobb szakasz fele négyzetének.
4. Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor a teljes szakasz és a kisebb darab négyzetösszege háromszorosa a nagyobb darab négyzetének.
5. Ha egy szakaszt folytonos arányban osztunk és hozzáadunk egy, a nagyobb darabbal egyenlő szakaszt, akkor a teljes szakasz folytonos arányban osztatik, mégpedig az eredeti szakasz a nagyobb darabja.
6. Ha egy racionális szakaszt folytonos arányban osztunk, akkor mind a két darab irracionális, úgynevezett apotomé.
7. Ha egy egyenlő oldalú ötszög három akár egymás melletti, akár nem egymás melletti szöge egyenlő, akkor az ötszög egyenlő szögű.

8. Ha egy egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszög két szomszédos szöggel szemközti átlóit meghúzzuk, akkor azok folytonos arányban osztják egymást, és a nagyobb darabjaik egyenlők az ötszög oldalával.
9. Ha az ugyanabba a körbe írt hatszög és tízszeres oldalát összeadjuk, akkor a teljes szakasz folytonos arányban osztott, és a nagyobb darabja a hatszög oldala.
10. Ha egy körbe egyenlő oldalú ötszöget írunk, akkor az ötszög oldala négyzetértékben egyenlő az ugyanabba a körbe írt hatszög és tízszeres oldalának összegével.
11. Ha egy racionális átmérőjű körbe egyenlő oldalú ötszöget írunk, akkor az ötszög oldala irracionális, úgynevezett minor.
12. Ha egy körbe egyenlő oldalú háromszöget írunk, akkor a háromszög oldala négyzetértékben háromszorosa a kör sugarának.
13. Szerkesszünk (szabályos háromoldalú) gúlát, vegyük körül adott gömbbel, és mutassuk meg, hogy a gömb átmérője négyzetértékben másfélszerese a gúla élének.
14. Szerkesszünk kockát, vegyük körül a gömbbel, amellyel a gúlát is, és mutassuk meg, hogy a gömb átmérője négyzetértékben háromszorosa a kocka élének.
15. Szerkesszünk (szabályos) oktaédert, vegyük körül a gömbbel, amellyel az előző testeket is, és mutassuk meg, hogy a gömb átmérője négyzetértékben kétszerese az oktaéder élének.
16. Szerkesszünk (szabályos) ikozaédert, vegyük körül a gömbbel, amellyel a fent említett testeket is, és mutassuk meg, hogy az ikozaéder éle irracionális, úgynevezett minor.
17. Szerkesszünk (szabályos) dodekaédert, vegyük körül a gömbbel, amellyel a fent említett testeket is, és mutassuk meg, hogy a dodekaéder éle irracionális, úgynevezett apotomé.
18. Állítsuk elő az öt test élet, és hasonlítsuk össze egymással.

Azt állítom, hogy az említett öt testen kívül nem szerkeszthető más egyenlő oldalú, egyenlő szögű és egymással egyenlő lapok által közrefogott test.

Két háromszögből vagy egyáltalán lapból nem szerkeszthető ugyanis térszög. Három háromszögből a gúla, négyből az oktaéder, ötből pedig az ikozaéder térszöge szerkeszthető. Hat, egy ponthoz (mint közös csúcshoz) szerkesztett egyenlő oldalú és egyenlő szögű háromszögből nem lesz térszög, hiszen mivel az egyenlő oldalú háromszög egy szöge kétharmad derékszög, a hat négy derékszöggel egyenlő, ami nem lehetséges, mert valamennyi térszöget összegben négy derékszögnél kisebb szögek fognak közre. Ugyanígy hatnál több (ilyen) síkszögből sem szerkeszthető térszög. Három négyzet a kocka térszögét fogja közre. Négyből nem lehet, mert ismét négy derékszög az összeg. Az egyenlő oldalú és egyenlő szögű ötszögekből: háromból a dodekaéder térszöge szerkeszthető, négyből viszont nem lehet, hiszen mivel az egyenlő oldalú ötszög egy szöge egy egész egyötöd derékszög, a négy nagyobb négy derékszögnél, ami nem lehetséges. Ugyanezen ellentmondás miatt más sokszögek sem fognak közre térszöget. Éppen ezt kellett megmutatni.

Tóth Árpád : Isten oltó kése

Pénzt, egészséget és sikert
Másoknak, Uram, többet adtál,
Nem kezdek érte mégse pert,
És nem mondom, hogy adósom maradtál.

Nem én vagyok az első mostohád;
Bordáim közt próbáid éles kését
Megáldom, s mosolygom az ostobák
Dühödt jaját és hiú mellverését.

Tudom és érzem, hogy szeretsz:
Próbáid áldott oltó-kése bennem
Téged szolgál, mert míg szívembe metsz,
Új szépséget teremni sebez engem.

Összeszorítom ajkam, ha nehéz
A kín, mert tudom, tied az én harcom,
És győztes távolokba néz
Könnyekkel szépült, orcád-fényü arcom.

A függelék

A téridő

A geometria alapvető tárgya a minket körülvevő tér, egyik legfontosabb fogalma a pontpárok távolsága, legfontosabb kérdései közé tartoznak bizonyos pontpárok távolságának konkrét meghatározása. Nem tudjuk magunkat kivonni ugyanakkor az idő hatása alól, bármit, amit vizsgálunk kénytelenek vagyunk egy adott időtartam alatt tenni. Lorentz, Einstein, Minkowski munkássága fényt derített az igazi kapcsolatra távolság és idő között, ezek nem önálló külön fogalmak csak „árnyékai” vetületei egy alkalmas, matematikailag jól definiált struktúrára vonatkozó fogalomnak, a világ-pontpárok távolságának. Az idő és távolság mérése közös általános elvnek felel meg, egy beágyazó struktúrára a világra vonatkozóan. Jelen fejezetben, egy olyan általános felépítést adunk, mely elvezet az ismert „konstans görbületű” terek egy általánosításához is, például, a hiperbolikus geometria egy általánosításához.

A.1. A skalárisszorzat általánosításai

Az euklidészi terek jellemző fogalma a skaláris szorzat. A skaláris szorzat helyett gyengébb szorzat fogalmat használva euklidészi tereknél általánosabb terekhez jutunk. G. Lumer ¹ vezeti be a fél-skalárszorzat fogalmát az elmúlt évszázad közepén.

A.1.1. Fél-skalárisszorzat

A.1.1. Definíció. Egy V komplex vektortéren értelmezett $[x, y] : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex függvényt fél-skalárisszorzatnak (röviden s.i.p.) nevezünk, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

s1. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z],$

¹ Lumer, G.: *Semi-inner product spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 29-43.

s2. : $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$,

s3. : $[x, x] > 0$ ha $x \neq 0$,

s4. : $|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]$,

Ha s V vektortéren értelmezett egy s.i.p. akkor a $(V, [\cdot, \cdot])$ párt fél-skaláris-szorozatos térnek nevezzük.

Ha tekintjük az $\|x\| = \sqrt{[x, x]}$ definícióval adott függvényt, akkor a vektortér ezzel normált térré válik. Fordítva, minden normált tér tekinthető fél-skaláris-szorozatos térnek. Tekintsünk ugyanis egy adott y vektort majd ehhez keressünk egy f_y lineáris funkcionált, mely az y egydimenziós alterén értelmezett és $f_y(y) = \|y\|^2$ teljesül rá. Ilyen nyilván van és a normája $\|f_y\| = \|y\|$. A Banach-Hahn tétel szerint ezen lineáris funkcionál kiterjeszthető a vektortérre a norma megtartásával, tehát feltehető, hogy lineáris funkcionálunk a teljes V -n értelmezett. Minden konkrét y vektorhoz van egy ilyen egyértelműen választott f_y lineáris funkcionál, tehát definiálhatunk egy szorzást a következő szabállyal:

$$[x, y] := f_y(x).$$

Ez automatikusan lineáris az első változóban teljesíti **s3** axiómát és az

$$[x, y] = \frac{f_y(x)}{\|x\|} \|x\| \leq \|f_y\| \|x\| = \|y\| \|x\|$$

összefüggés miatt teljesül rá **s4** is.

J. R. Giles ² veszi észre, hogy mindig lehet a s.i.p.-t választani úgy, hogy teljesüljön a második argumentum homogenitása is azaz fennálljon:

s5. : $[x, \lambda y] = \bar{\lambda}[x, y]$ $\lambda \in \mathbb{C}$

tulajdonság is. Valóban a fenti f_y funkcionált az $\|y\| = 1$ feltételnek megfelelő y vektorokra az $f_y(y) = 1$ értékkel megadva, majd az $f_{\lambda y} = \bar{\lambda}f_y$ szabálynak megfelelő kiterjesztéssel az $y \mapsto f_y$ leképezés konjugáltan lineárisává válik mutatván, hogy $[\cdot, \cdot]$ komplex értelemben homogén a második változójában.

Szintén Giles vezeti be a *follytonos s.i.p* fogalmát a következő módon:

s6. : Tetszőleges $x, y \in S$, egységvektor esetén valós $\lambda \rightarrow 0$ mellett teljesüljön $\Re\{[y, x + \lambda y]\} \rightarrow \Re\{[y, x]\}$.

² Giles, J. R.: *Classes of semi-inner-product spaces*. Trans. Amer. Math.Soc. **129**/3 (1967), 436–446.

A teret *egyenletesen folytonosnak* nevezzük, ha ezen határátmenet az egységömbön egyenletesen fennáll.

Egy normált tér esetén többféle differenciálhatósági tulajdonsággal is rendelkezünk. Felmerül a kérdés ezeknek mi a kapcsolata a most bevezetett fogalmakkal.

A.1.2. Definíció. *Egy normált tér Gâteaux-értelemben differenciálható, ha tetszőleges x, y egységvektor párra minden valós λ esetén, a*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda}$$

határérték létezik. A normált tér egyenletesen Fréchet értelemben differenciálható ha az egységömb pontpárjaira a fenti határátmenet egyenletesen áll fenn.

A.1.1. Tétel. *Egy s.i.p. tér akkor és csak akkor folytonos (egyenletesen folytonos) ha a megfelelő normált tér Gâteaux (egyenletesen Fréchet) differenciálható.*

Ezen tétel bizonyítása (egyszerűbb körülmények között) a definíciók alapján hasonlóképpen elvégezhető mint egy általunk a következőkben igazolt tétel ezért a bizonyítást elhagyjuk.

A fenti gondolatmenetet folytassuk a s.i.p. tér differenciálhatóságára vonatkozó definícióval:

A.1.3. Definíció. *A differenciálható s.i.p. tér egy olyan folytonos s.i.p. tér, amelyben a következő feltétel is teljesül:*

s6': *Tetszőleges három x, y, z vektor és valós λ esetén, létezzen a*

$$[x, \cdot]'_z(y) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Re\{[x, y + \lambda z]\} - \Re\{[x, y]\}}{\lambda}$$

határérték. Azt mondjuk, hogy a tér folytonosan differenciálható, ha a fenti határátmenet mint y függvénye folytonos.

Jegyezzük meg, hogy az $\Im\{[x, y]\} = \Re\{[-ix, y]\}$ egyenlőség a fenti feltétellel együtt garantálja a:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{[x, y + \lambda z] - [x, y]}{\lambda}$$

határérték létezését és folytonosságát. A következő tétel összekapcsolja a s.i.p és a norma differenciálhatóságára vonatkozó feltételeket.

A.1.2. Tétel. *Egy s.i.p. tér akkor és csak akkor (folytonosan) differenciálható ha a norma függvény kétszer (folytonosan) differenciálható Gâteaux értelemben.*

Az x irányban vett y pontbeli Gâteaux deriváltja a normának legyen:

$$\|\cdot\|'_x(y) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|y + \lambda x\| - \|y\|}{\lambda}.$$

Hasonlóképpen legyen

$$\|\cdot\|''_{x,z}(y) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\|\cdot\|'_x(y + \lambda z) - \|\cdot\|'_x(y)}{\lambda},$$

a norma második deriváltja az y pontban az x majd z irányokra vonatkozóan.

Ekkor teljesül a következő McShane-től ³származó lemma.

A.1.1. Lemma. *Ha E egy s.i.p. tér $x, y \in E$, akkor*

$$\|y\|(\|\cdot\|'_x(y))^- \leq \Re\{[x, y]\} \leq \|y\|(\|\cdot\|'_x(y))^+$$

áll fenn, ahol $(\|\cdot\|'_x(y))^-$ and $(\|\cdot\|'_x(y))^+$ jelöli a bal- illetve jobb-oldali λ szerinti deriváltakat. Speciálisan, ha a norma differenciálható, akkor

$$[x, y] = \|y\|\{(\|\cdot\|'_x(y)) + \|\cdot\|'_{-ix}(y)\}.$$

A lemma segítségével igazolhatjuk tételünket.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a norma kétszer differenciálható. Ekkor a lemma szerint

$$\begin{aligned} \frac{\Re\{[x, y + \lambda z]\} - \Re\{[x, y]\}}{\lambda} &= \frac{\|y + \lambda z\|(\|\cdot\|'_x(y + \lambda z)) - \|y\|(\|\cdot\|'_x(y))}{\lambda} = \\ &= \frac{\|y\|\|y + \lambda z\|(\|\cdot\|'_x(y + \lambda z)) - \|y\|^2(\|\cdot\|'_x(y))}{\lambda\|y\|} \geq \\ &\geq \frac{[y + \lambda z, y](\|\cdot\|'_x(y + \lambda z)) - \|y\|^2(\|\cdot\|'_x(y))}{\lambda\|y\|}, \end{aligned}$$

ahol úgy választottuk az $\frac{\|\cdot\|'_x(y + \lambda z)}{\lambda}$ kifejezés előjelét, hogy az pozitív legyen. Mivel a norma deriváltja folytonos, a feltételekből következik, hogy $\|\cdot\|'_x(y)/\lambda$ is pozitív. Ezen feltételt tekintve, kapjuk, hogy

$$\frac{\Re\{[x, y + \lambda z]\} - \Re\{[x, y]\}}{\lambda} \geq$$

³ McShane, E. J.: *Linear functionals on certain Banach spaces*. Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 1 (1950), 402–408.

$$\geq \|y\|^2 \frac{\|\cdot\|'_x(y + \lambda z) - (\|\cdot\|'_x(y))}{\lambda \|y\|} + \frac{\Re[z, y]}{\|y\|} \|\cdot\|'_x(y + \lambda z).$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} & \frac{\|y + \lambda z\|(\|\cdot\|'_x(y + \lambda z)) - \|y\|(\|\cdot\|'_x(y))}{\lambda} \leq \\ & \leq \frac{\|y + \lambda z\|^2(\|\cdot\|'_x(y + \lambda z)) - \|y, y + \lambda z\|(\|\cdot\|'_x(y))}{\lambda \|y + \lambda z\|} = \\ & = \frac{\|y + \lambda z\|^2(\|\cdot\|'_x(y + \lambda z)) - (\|\cdot\|'_x(y))}{\lambda \|y + \lambda z\|} + \lambda \Re[z, y + \lambda z] \frac{(\|\cdot\|'_x(y))}{\lambda \|y + \lambda z\|}. \end{aligned}$$

Hasonlóképpen ha $\|\cdot\|'_x(y)/\lambda$ negatív, akkor az egyenlőtlenségek iránya megfordul, és azt kapjuk, hogy a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Re\{[x, y + \lambda z]\} - \Re\{[x, y]\}}{\lambda}$$

határérték létezik, és egyenlő az

$$\|y\|(\|\cdot\|''_{x,z}(y)) + \frac{\Re[x, y]\Re[z, y]}{\|y\|^2}$$

értékkel. Jegyezzük meg, hogy az $\|\cdot\|'_x(y)/\lambda = 0$ esetben létezik egy környezet, amelyben a $\|\cdot\|'_x(y + \lambda z)/\lambda$ függvény előjele konstans. Ezért ezt az esetet nem kell külön vizsgálni.

A másik irány bizonyításához, tekintsük a következő törtet

$$\|y\| \frac{\|\cdot\|'_x(y + \lambda z) - (\|\cdot\|'_x(y))}{\lambda}.$$

Feltéve, hogy a s.i.p. differenciálható, definíció szerint folytonos is. Azaz a norma differenciálható az első tétel szerint. Használva a lemmát és feltéve, hogy $\frac{\Re[x, y]}{\lambda} > 0$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \|y\| \frac{\|\cdot\|'_x(y + \lambda z) - (\|\cdot\|'_x(y))}{\lambda} = \frac{\Re[x, y + \lambda z]\|y\| - \Re[x, y]\|y + \lambda z\|}{\lambda \|y + \lambda z\|} = \\ & = \frac{\Re[x, y + \lambda z]\|y\|^2 - \Re[x, y]\|y + \lambda z\|\|y\|}{\lambda \|y\|\|y + \lambda z\|} \leq \\ & = \frac{\Re[x, y + \lambda z]\|y\|^2 - \Re[x, y]\|y + \lambda z, y\|}{\lambda \|y\|\|y + \lambda z\|} = \\ & = \frac{\Re\{[x, y + \lambda z]\} - \Re\{[x, y]\}}{\lambda} \frac{\|y\|}{\|y + \lambda z\|} - \frac{\Re[x, y]\Re[z, y]}{\|y\|\|y + \lambda z\|}. \end{aligned}$$

Ugyanakkor azonban használva a s.i.p. folytonosságát és a $\frac{\Re[x,y]}{\lambda} > 0$ feltételt, a következő egyenlőtlenség is adódik:

$$\|y\| \frac{\|\cdot\|'_x(y + \lambda z) - (\|\cdot\|'_x(y))}{\lambda} \geq \frac{\Re\{[x, y + \lambda z]\} - \Re\{[x, y]\}}{\lambda} - \frac{\Re[x, y + \lambda z]\Re[z, y + \lambda z]}{\|y + \lambda z\|^2}.$$

Ha megfordítjuk a feltétel előjelét, akkor az egyenlőtlenségek iránya is megfordul. A határátmenet mutatja, hogy az első differenciál függvény differenciálható és a deriváltak között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\|y\|(\|\cdot\|''_{x,z}(y)) = [x, \cdot]'_z(y) - \frac{\Re[x, y]\Re[z, y]}{\|y\|^2}.$$

□

B. Nath⁴ észreveszi, hogy a s.i.p fogalmát általánosabban is meg lehet adni, ha a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenséget a Hölder egyenlőtlenséggel helyettesítjük. Igazolja, hogy a $\|x\| = [x, x]^{\frac{1}{p}}$ $1 \leq p \leq \infty$ definíció szintén normát eredményez és minden normált tér ellátható egy ilyen általánosabb s.i.p. szorzattal. (A $p = 2$ esetén a tétele visszaadja Lumer megfelelő tételét.) Azonban a fenti általánosítás nem lehet lényegi, inkább csak formális, hiszen a két s.i.p. tér közötti kapcsolat egyszerű. Minden p esetén a Giles-Lumer-féle $[x, y]$ szorzat definiál egy p -hez tartozó Nath-féle s.i.p-t a következő egyenlőség alapján:

$$\widehat{[x, y]} = [y, y]^{\frac{p-2}{2}} [x, y].$$

A Giles-féle homogenitás pontosan akkor teljesül, ha a Nath-féle s.i.p. kielégít egy $(p - 1)$ -homogenitási tulajdonságot, azaz minden komplex λ -ra fennáll az:

s5". :

$$\widehat{[x, \lambda y]} = \bar{\lambda} |\lambda|^{p-2} \widehat{[x, y]}$$

egyenlőség. Ezért az eredeti definíció pontosan ugyanolyan általános mint a Nath-féle.

A normált tereket geometriai szemüvegen keresztül is vizsgálhatjuk, hiszen az n -dimenziós Euklideszi $\mathbb{R}^n$ tér egy origóra szimmetrikus centrálszimmetrikus konvex teste definiál egy normát, aminek az egységgömbje maga a

⁴Nath, B.: *On a generalization of semi-inner product spaces*. Math. J. Okayama Univ. **15/1** (1971), 1–6.

test. Egy ilyen teret a geometriában feltalálója után Minkowski térnek nevezünk. Fontos alaperedmények ezen végesdimenziós valós normált terekről, különféle összefoglaló cikkekben találhatók, melyek közül egyet különösen is ajánlunk, ezt Horst Martini és társai írták.^{5 6}

Ez a tér – definíciója szerint – egy beágyazó n -dimenziós valós Euklidészi térrel rendelkezik, azon mérjük másképp a pontok távolságát. Ez is tekinthető a Lumer-Giles elmélet szerinti s.i.p. térnek, ha a komplex fogalmakat a megfelelő valós fogalmakra cseréljük.

A.1.2. Indefinit-skalárisszorzat

Minkowski egy másik talán még fontosabb térfogalmat is létrehoz ezt az elméleti fizikában szokták Minkowski-térnek nevezni. Lorentz és Einstein nyomán észreveszi, hogy a világ jelenségeinek vizsgálatára alkalmas, az időt negyedik dimenzióként tartalmazó beágyazó négydimenziós euklidészi tér pontjainak a távolságait, alkalmas módon mérve az idő illetve térszerű koordináták azonos módon kezelhetők. Ezzel elindítja a pseudo-euklidészi terek vizsgálatát, mely nem más mint egy valós vagy komplex véges-dimenziós vektortér ellátva egy olyan szorzással, mely nem pozitív definit. Az ilyen szorzást *indefinit-skalárisszorzásnak* nevezzük.⁷

Pontosabban

A.1.4. Definíció. Egy V komplex vektortér indefinit-skalárisszorzata (*i.i.p.*) egy olyan komplex $[x, y] : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ függvény, amely a következő tulajdonságokat teljesíti:

- i1. : $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$,
- i2. : $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$,
- i3. : $[x, y] = \overline{[y, x]}$ minden $x, y \in V$,
- i4. : $[x, y] = 0$ minden $y \in V$ then $x = 0$.

Egy V vektortér egy *i.i.p.*-vel egy úgynevezett *i.i.p.* tér.

⁵ Martini, H., Swanepoel, K., Weiss, G.: *The geometry of Minkowski spaces - a survey. Part I.* Expositiones Mathematicae **19** (2001), 97-142.

⁶ Martini, H., Swanepoel, K.: *The Geometry of Minkowski Spaces - a survey. Part II.* Expositiones Mathematicae **22(2)** (2004), 93-144.

⁷ Gohberg, I., Lancaster, P., Rodman, L.: *Indefinite Linear Algebra and Applications.* Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 2005.

Be lehet vezetni a pozitív (nem-negatív) illetve negatív (nem-pozitív) alterek fogalmát, melyekben a nem nulla vektorok pozitív (nem-negatív) vagy negatív (nem-pozitív) skalárnégyzettel rendelkeznek. Speciális jelenség, hogy i.i.p. térben találhatunk olyan altereket, melyben minden vektor skalárnégyzete nulla. A V i.i.p. tér N altere *neutralis* ha $[v, v] = 0$ minden $v \in N$ esetén. Az

$$[x, y] = \frac{1}{4}\{[x + y, x + y] + i[x + iy, x + iy] - [x - y, x - y] - i[x - iy, x - iy]\},$$

összefüggés alapján az N altér akkor és csak neutrális ha $[u, v] = 0$ teljesül minden $u, v \in N$ vektorpárra. Egy ilyen altér nem-negatív és nem-pozitív egyszerre és szükségszerűen degenerált altér. Igazolható a következő állítás:

A.1.3. Tétel. *Egy nem-negatív (illetve nem-pozitív) altér direkt összege egy pozitív (illetve negatív) és egy neutrális altérnek.*

Jegyezzük meg továbbá, hogy ez a felbontás nem egyértelmű, de a szereplő komponensek dimenziói igen.

A.1.3. Fél-indefinit skaláriszorozatos tér

Az egyszerűbb kommunikáció miatt nevezzük el a s.i.p. illetve i.i.p. tér definiáló axiómáit a következőképpen:

s1. az *első argumentum additivitási tulajdonsága*,

s2. az *első argumentum homogenitási tulajdonsága*,

s3. a *pozitív definités* tulajdonsága,

s4. a *Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség*,

s5. a *második argumentum homogenitása*

i3. az *antiszimetria tulajdonsága*,

i4. a *nem-elfajulás tulajdonsága*.

Ekkor **i1=s1**, **i2=s2**. Könnyen láthatjuk, hogy **s1**, **s2**, **s3**, **s5** együttes fennállása maga után vonja a szorzat nem-elfajuló voltát, és minden nem-negatív (illetve nem-pozitív) N altéren teljesül a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség. Próbáljuk meg ötvözni a két axióma-rendszert valamilyen értelmes módon.

A.1.5. Definíció. Egy komplex V vektortér fél-indefinit skalárisszorzatának (s.i.i.p-nek) nevezünk egy $[x, y] : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex függvényt, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$ (additivitás az első változóban),
2. $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ (homogenitás az első argumentumban),
3. $[x, \lambda y] = \overline{\lambda}[x, y]$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$ (homogenitás a második argumentumban),
4. $[x, x] \in \mathbb{R}$ minden $x \in V$ (valós értékűség tulajdonsága),
5. ha vagy $[x, y] = 0$ teljesül, minden $y \in V$ vagy $[y, x] = 0$ teljesül, minden $y \in V$, akkor $x = 0$ (nem-elfajulás tulajdonsága),
6. $|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]$ nem-negatív, és nem pozitív alterekhez tartozó x, y vektorpárra, (a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség teljesüljön nem-pozitív és nem-negatív altereken).

Egy V vektorteret, melyen értelmezett egy s.i.i.p. fél-indefinit skalárisszorzos térnek (s.i.i.p. térnek) nevezünk.

A következőkben illusztráljuk, hogy a s.i.i.p. tér fogalma nem csak triviális példákat tartalmaz.

1. Példa: Egy s.i.i.p. tér pontosan akkor homogén s.i.p. ha pozitív definit az s.i.i.p. Egy s.i.i.p. tér pontosan akkor i.i.p. tér, ha az s.i.i.p. antiszimmetrikus is. Valóban $[x, x] = \overline{[x, x]}$ egyenlőségből következik a nem-elfajulás tulajdonsága. A második argumentumban való linearitás is teljesül, hiszen:

$$[x, \lambda y + \mu z] = \overline{[\lambda y + \mu z, x]} = \overline{\lambda[y, x] + \mu[z, x]} = \overline{\lambda}[y, x] + \overline{\mu}[z, x] = \overline{\lambda}[x, y] + \overline{\mu}[x, z].$$

Az is világos, hogy minden – akár geometriai, akár fizikai – Minkowski tér reprezentálható s.i.i.p. térként.

2. Példa: Legyen $V = \langle \{e_1, e_2, e_3\} \rangle$ egy három-dimenziós vektortér és C a következő szabályos oktaéder felszíne:

$$C = \cup \{ \text{conv} \{ \varepsilon_i e_i \mid i = 1, 2, 3 \} \}, \text{ ahol minden } i\text{-re } \varepsilon_i \in \{ \pm 1 \} \}.$$

Világos, hogy egy valós $v \in C$ helyvektorhoz létezik legalább egy és kiválaszhatunk pontosan egy v^* lineáris funkcionált, a következő tulajdonsággal, legyen $v^*(v) = (-1)^k$, ahol k a kombinatorikus dimenziója annak a C -beli F_v lapnak, amelyiknek v a relatív belsejébe esik. (Nyilvánvaló, hogy $k + 1$ a v előállításában szereplő nem nulla koordináták száma.) Legyen $\lambda v \in V$, ahol

$v \in C$, és minden valós λ -hoz válasszunk egy $(\lambda v)^* = \lambda v^*$ lineáris funkcionált. Az így adott V -ből a duális térbe V^* -ba menő leképezés generál egy

$$[u, v] = v^*(u)$$

szorzatot, amely teljesíti az **1-4** tulajdonságokat. Az **5** tulajdonság azért teljesül, mert nincs olyan v vektor, amire $v^*(v) = 0$ volna. Végül minden két-dimenziós altér tartalmaz olyan v illetve w vektorokat, amelyekre $v^*(v) > 0$ illetve $w^*(w) < 0$ teljesül, ezért nincs nem-negatív, vagy nem-pozitív altér mutatva, hogy az utolsó **6** feltételnek is teljesülnie kell.

3.Példa: Tetszőleges V komplex normált térhez definiálni tudunk számos s.i.p.-t melyek közül egy a normához tartozó valamelyik s.i.p.. Legyen C a V tér egységszférája. A Banach-Hahn tétel szerint van legalább egy és ezért mi kiválaszthatunk pontosan egy folytonos lineáris funkcionált, melyre $\|\tilde{v}^* \star\| = 1$ teljesül és $\tilde{v}^*(v) = 1$ is fennáll. Tekintsünk egy $\varepsilon([v])$ előjel függvényt, ± 1 értékekkel a C komplex projektivizáltján $C/\sim$ -en, ahol $C/\sim$ jelenti a C -nek az alábbi ekvivalencia reláció

$$x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y \text{ ha } \lambda \neq 0$$

szerinti faktorizáltját. Ha $\varepsilon([v]) = 1$ legyen $v^* = \tilde{v}^*$, ha viszont $\varepsilon([v]) = -1$ definiáljuk v^* -t az $v^* = -\tilde{v}^*$ egyenlőséggel. Végül terjesszük ki homogén módon V -re a dualitás leképezést az $(\lambda v)^* = \overline{\lambda} v^*$ szabállyal. A dualitás leképezés kép lineáris funkcionáljai teljesítik a $v^*(v) := \varepsilon([v])\|v\|^2$ és $\|v\| = \|v^*\|$ feltételeket. Az

$$[u, v] = v^*(u)$$

definícióval kapott szorzás kielégíti az **1-5** feltételeket. Ha U nem-negatív altér, akkor pozitív is és tetszőleges $u, v \in U$ esetén, az

$$|[u, v]| = |v^*(u)| = \frac{|v^*(u)|}{\|u\|} \|u\| \leq \|v^*\| \|u\| = \|v\| \|u\|,$$

egyenlőtlenség bizonyítja **6**-t.

A.2. Általánosított tér-idő modell

Célunk a Lorentz, Einstein, Minkowski által kidolgozott tér-idő modell általánosabb szituációban való végig gondolása. Kiindulási ötletünk, hogy az előző fejezetben kidolgozott általános szorzatfogalom a s.i.p. is felhasználható egy tér-idő modell felépítéséhez. Először megteremtjük az elvi alapokat.

A.2.1. A modell definiálása

Első lépésben a két (geometria és fizikai) Minkowski tér kombinálását végezve, megadjuk az általánosított Minkowski tér fogalmát ⁸. Második lépésben ezt specializálva jutunk el az általánosított tér-idő modell fogalmához.

A továbblépéshez szükségünk lesz egy fontos segédételre.

A.2.1. Lemma. *Legyenek $(S, [\cdot, \cdot]_S)$ illetve $(T, -[\cdot, \cdot]_T)$ két s.i.p. tér. Ekkor az $S + T$ direktösszeg vektortéren az*

$$[s_1 + t_1, s_2 + t_2]^- := [s_1, s_2] - [t_1, t_2]$$

szabállyal értelmezett $[\cdot, \cdot]^- : (S + T) \times (S + T) \longrightarrow \mathbb{C}$ függvény szintén egy s.i.p..

Bizonyítás: A $[\cdot, \cdot]^-$ függvény nem-negatív. Az első argumentumban való linearitás a következőképpen igazolható:

$$\begin{aligned} [\lambda'(s' + t') + \lambda''(s'' + t''), s + t]^- &= [\lambda's' + \lambda''s'', s]_S - [\lambda't' + \lambda''t'', t]_T = \\ &= \lambda'[s', s]_S + \lambda''[s'', s]_S - \lambda'[t', t]_T - \lambda''[t'', t]_T = \\ &= \lambda'[s' + t', s + t]^- + \lambda''[s'' + t'', s + t]^- . \end{aligned}$$

A második argumentum homogenitása is teljesül, hiszen

$$[s' + t', \lambda(s + t)]^- = [s', \lambda s]_S - [t', \lambda t]_T = \bar{\lambda}[s' + t', s + t]^- .$$

Végül hátra van a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség igazolása.

$$\begin{aligned} |[s_1 + t_1, s_2 + t_2]^-|^2 &= [s_1 + t_1, s_2 + t_2]^- \overline{[s_1 + t_1, s_2 + t_2]^-} = \\ &= ([s_1, s_2]_S - [t_1, t_2]_T)(\overline{[s_1, s_2]_S} - \overline{[t_1, t_2]_T}) = \\ &= [s_1, s_2]_S \overline{[s_1, s_2]_S} + [t_1, t_2]_T \overline{[t_1, t_2]_T} + [s_1, s_2]_S (-\overline{[t_1, t_2]_T}) + (-[t_1, t_2]_T) \overline{[s_1, s_2]_S} \leq \\ &\leq [s_1, s_1]_S [s_2, s_2]_S + [t_1, t_1]_T [t_2, t_2]_T + 2\Re\{[s_1, s_2]_S (-\overline{[t_1, t_2]_T})\} \leq \\ &\leq [s_1, s_1]_S [s_2, s_2]_S + [t_1, t_1]_T [t_2, t_2]_T + 2|[s_1, s_2]_S| |[t_1, t_2]_T| \leq \\ &\leq [s_1, s_1]_S [s_2, s_2]_S + [t_1, t_1]_T [t_2, t_2]_T + 2\sqrt{[s_1, s_1]_S [s_2, s_2]_S [t_1, t_1]_T [t_2, t_2]_T} , \end{aligned}$$

és így a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt fennáll

$$[s_1, s_1]_S [s_2, s_2]_S + [t_1, t_1]_T [t_2, t_2]_T + 2\sqrt{[s_1, s_1]_S [s_2, s_2]_S [t_1, t_1]_T [t_2, t_2]_T} \leq ,$$

⁸ Á.G.Horváth: Semi-indefinite inner product and generalized Minkowski spaces. *Journal of Geometry and Physics* **60** (2010) 1190-1208.

$$\begin{aligned} &\leq [s_1, s_1]_S [s_2, s_2]_S + [t_1, t_1]_T [t_2, t_2]_T + [s_1, s_1]_S (-[t_2, t_2]_T + (-[t_1, t_1]_T) [s_2, s_2]_S = \\ &= ([s_1, s_1]_S - [t_1, t_1]_T) ([s_2, s_2]_S - [t_2, t_2]_T) = [s_1 + t_1, s_1 + t_1]^- [s_2 + t_2, s_2 + t_2]^- . \end{aligned}$$

□

Elképzelhető, hogy egy V s.i.i.p. tér egy pozitív és egy negatív alterének direkt összegeként áll elő. Ekkor két további struktúrával ruházhatjuk fel, az egyik egy s.i.p. tér struktúra a másikat pedig Minkowski struktúrának fogjuk nevezni. Pontosabban:

A.2.1. Definíció. Legyen $(V, [\cdot, \cdot])$ egy s.i.i.p. tér. Tegyük fel, hogy $S, T \leq V$ pozitív illetve negatív alterek, melyek egymás direkt kiegészítő alterei V -re nézve, S pozitív, T negatív. Defináljunk egy szorzást V -n az

$$[u, v]^+ = [s_1 + t_1, s_2 + t_2]^+ = [s_1, s_2] + [t_1, t_2]$$

egyenlőséggel, ahol $s_i \in S$ és $t_i \in T$. Ekkor azt mondjuk, hogy a $(V, [\cdot, \cdot]^+)$ pár általánosított Minkowski tér a $[\cdot, \cdot]^+$ Minkowski szorzással. Szintén használjuk V -re a valós általánosított Minkowski tér elnevezést, ha V valós vektortér és a s.i.i.p. egy valós-értékű függvény.

A következőkben a definícióhoz kapcsolódó észrevételeket teszünk.

A.2.1. Megjegyzés. A Minkowski szorzat fogalma nyilván teljesíti a s.i.i.p. 1-5 tulajdonságait. Azonban 6 tipikusan nem teljesül. Az alábbi példában ezt jól láthatjuk.

Tekintsünk egy S 2-dimenziós l^∞ síkot a beágyazó E^3 euklidészi térben. Válasszunk egy $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormált bázisát E^3 -nek úgy, hogy $e_1, e_2 \in S$ teljesüljön. Először reprezentáljuk a sík l^∞ normáját egy s.i.p.-vel. Legyen

$$\begin{aligned} &[x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2]_S := \\ &= x_1 y_1 \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^p\right)^{\frac{p-2}{p}}} + x_2 y_2 \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^p\right)^{\frac{p-2}{p}}} . \end{aligned}$$

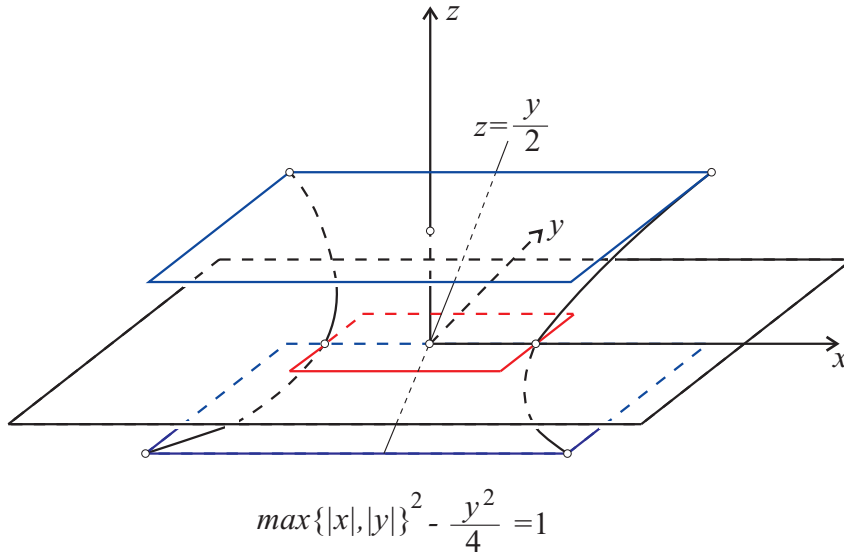
Lemmánk szerint

$$[x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3]^- := [x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2]_S + x_3 y_3$$

egy s.i.p. a teljes E^3 téren, ami a

$$\sqrt{[x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3]^-} := \sqrt{\max\{|x_1|, |x_2|\}^2 + x_3^2}$$

normát reprezentálja. A 3. Példánk módszere szerint, tekinthetünk egy $\varepsilon(v)$ előjel függvényt, mely 1-el egyenlő ha v a vizsgált sík egységszférájának a



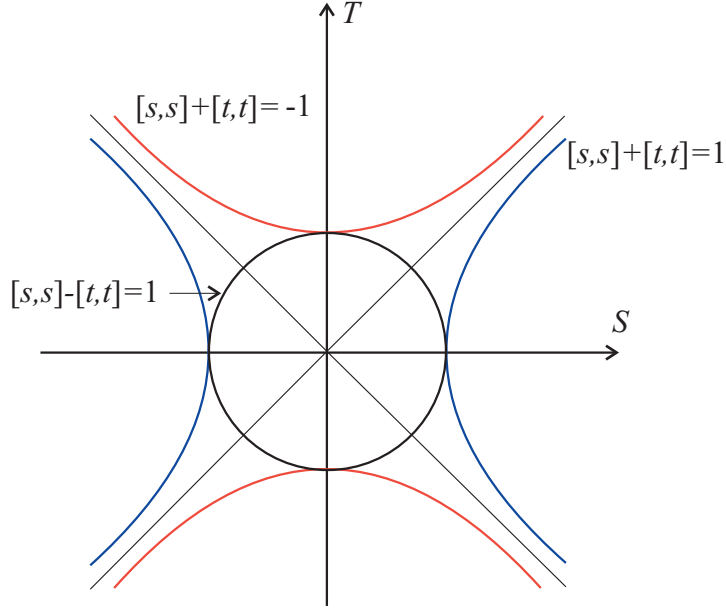
A.1. ábra. Az A.2.1. Megjegyzés példája

pontja azaz $S \cap C$ -hez tartozik, és -1 -el egyenlő ha $v = e_3$. Az előjel függvény további értékeit, válasszuk meg, a $\max\{|x_1|, |x_2|\}^2 - x_3^2$ kifejezés előjelének a $v = (x_1, x_2, x_3)^T$ vektorhoz való rendelésével. Ez az előjel függvény meghatároz egy $[\cdot, \cdot]$ s.i.i.p. szorzatot és a két választott S illetve T altérre vonatkozóan egy $[\cdot, \cdot]^+$ Minkowski szorzatot, melyre vonatkozó hosszakat a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\begin{aligned} f(v) &:= \sqrt{[x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3]^+} = \\ &= \sqrt{\max\{|x_1|, |x_2|\}^2 - x_3^2}. \end{aligned}$$

Tekintsük most az $x_3 = \alpha x_2$ síkot valamely $0 < \alpha < 1$ esetén. Ez pozitív altér az s.i.i.p és a Minkowski szorzat tekintetében is, és habár a s.i.i.p. szorzat tekintetében teljesül rajta a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség a Minkowski szorzat tekintetében nem, mivel $f(v)$ olyan homogén függvény aminek az egység gömbje a vizsgált síkon konkáv ezért nem lehet szubadditív. Azonban a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenségből a szubadditivitás következik, így nem teljesülhet a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség sem a vizsgált síkon.

A.2.2. Megjegyzés. Az A.2.1 Lemma szerint a $\sqrt{[v, v]}^-$ egy norma függvény a V vektortéren, amit az általánosított Minkowski tér beágyazó normált tere normájának nevezünk. A helyzet teljes analógiát mutat a pseudo-Euklidészi tér és az őt beágyazó Euklidészi tér kapcsolatával. Az A.2. ábra ezt a kapcsolatot mutatja az egységgömbökön keresztül.



A.2. ábra. Egységömbök két-dimenzióban.

A továbbiakban véges dimenziós, valós általánosított Minkowski tereket fogunk vizsgálni. Alapvető különválasztani azon vektorokat, melyek skalárnégyzete pozitív így térszerűen viselkednek, azoktól, melyek skalárnégyzete negatív, tehát időszerűen.

A.2.2. Definíció. Legyen V egy általánosított Minkowski tér az S, T kiindulási pozitív illetve negatív alterei által meghatározva. Nevezzük egy vektorát térszerűnek, fényyszerűnek, vagy időszerűnek, aszerint, hogy a skalárnégyzete pozitív, zérus vagy negatív. Legyen $\mathcal{S} \supset S$, $\mathcal{L}$ and $\mathcal{T} \supset T$ a térszerű, fényyszerű illetve időszerű vektorok halmaza. Ha a tér véges dimenziós, valós és $\dim T = 1$, akkor a teret általánosított tér-idő modellnek nevezzük.

Általánosított téridő modellben $\mathcal{T}$ két darabjának az uniója, azaz

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-,$$

ahol

$$\mathcal{T}^+ = \{s + t \in \mathcal{T} \mid \text{ahol } t = \lambda e_n \text{ valamilyen } \lambda \geq 0\} \text{ és}$$

$$\mathcal{T}^- = \{s + t \in \mathcal{T} \mid \text{ahol } t = \lambda e_n \text{ valamilyen } \lambda \leq 0\}.$$

A következő tétel alapján beszélhetünk fénykúpokról, melynek belsejében találhatóak az időszerű vektorok, külsejében pedig a térszerűek. Mint ezen könyv későbbi oldalain (Minkowski előadásában) olvashatjuk, a fizikában szokásos indefinit szorzás a mienk -1 -szerese, ezért az időszerű vektorok halmaza

tartalmazza a világ pontjainak világ-vonalait, melyek határhelyzetben a fénykúp alkotói mentén éppen fénysebességgel haladnak, minden létező sebesség vektor ennél kisebb abszolútértékkel rendelkezik.

A.2.1. Tétel. *Legyen most V egy általánosított tér-idő modell. $\mathcal{T}$ egy nyílt kettős kúp, melynek a határa éppen $\mathcal{L}$. A pozitív része $\mathcal{T}^+$ (ugyanúgy mint a negatív része $\mathcal{T}^-$) konvex.*

Bizonyítás: A kúpszerűség tulajdonsága azonnal következik a

$$[\lambda v, \lambda v]^+ = \lambda \bar{\lambda} [v, v]^+ = |\lambda|^2 [v, v]^+$$

egyenlőségből. Tekintsük a tér $(n-1)$ -dimenziós valamely $U = S + t$, alakú affin alterét, ahol $t \in T$ tetszőleges, de nem nulla. Ekkor a $\mathcal{T} \cap U$ egy elemére, kapjuk, hogy

$$0 \geq [s + t, s + t]^+ = [s, s] + [t, t],$$

azaz $[s, s] \leq -[t, t]$. Mivel t fix, ebből rögtön következik, hogy a vizsgált metszet vektorainak S -beli komponensei az S $(n-1)$ -dimenziós valós vektortér azon konvex testét alkotják, amely a s.i.i.p. által S -en is indukál norma egységgömbjének számszorosa. Azaz $\mathcal{T}$ tényleg egy kettős kúp, amelynek pozitív illetve negatív darabjai konvexek. A határ pontjaira az egyenlőtlenség egyenlőséggé válik, azaz éppen a fényszerű vektorokat kapjuk így meg. Mivel a tér többi vektora térszerű, utolsó állításunk is adódik. $\square$

A.2.2. Differenciálgeometria általánosított téridő modellben

A továbbiakban általánosított tér-idő modellben végzünk differenciálgeometriai vizsgálatokat. Első lépésként definiáljuk a hiperfelület fogalmát és a hozzá kapcsolható görbületi fogalmakat.

Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ egy valós értékű az S altéren értelmezett függvény. Ha e az S egy egységvektora, akkor definiáljuk az e irányban tekintett iránymenti deriváltat a szokásos módon a:

$$f'_e(s) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(s + \lambda e) - f(s)}{\lambda}$$

határérték létezésével. Tekintsük a téridő modell egy $\{e_1, \dots, e_n\}$ bázisát, ahol az első $n-1$ vektor S bázisát adja e_n pedig T -hez tartozik -1 skalárnégyzettel.

A.2.3. Definíció. Az

$$F := \{(s + f(s)e_n) \in V, s \in S\}$$

helyvektorok végpontjainak halmazát hiperfelületnek nevezzük. Az F hiperfelület érintővektorai a p pontban az iránymenti deriváltak által a szokásos módon meghatározott V -beli vektorok. Azaz u egy érintővektora az F hiperfelületnek annak $v = (s + f(s)e_n)$ pontjában, ha

$$u = \alpha(e + f'_e(s)e_n) \text{ ahol } \alpha \text{ valós és } e \in S \text{ egységvektor.}$$

Az érintő vektorok s -kezdőpontú példányai alkotják az F s -beli érintőterét. Ha az érintőtér $n - 1$ -dimenziós affin altér, akkor érintő hipersíknak nevezzük.

A következő speciális függvény vizsgálata szoros kapcsolatban van az általánosított téridő modell egységömbjeinek vizsgálatával. A függvény általánosított Minkowski tér esetében értelmes a deriváltjait a komplex esetben határozzuk meg.

A.2.2. Lemma. *V most egy általánosított Minkowski teret jelent, ahol az S -tér szorzata van $[\cdot, \cdot]_S$ -el jelölve. Tegyük fel a szorzat folytonosságát is. (Azaz a megfelelő s.i.p. térben teljesüljön **s6**.) Ekkor a megfelelő iránymenti deriváltjai a*

$$\mathfrak{h} : s \mapsto \sqrt{1 + [s, s]}$$

függvénynek a

$$\mathfrak{h}'_e(s) = \frac{\Re[e, s]}{\sqrt{1 + [s, s]}}.$$

képlettel írhatók le.

Bizonyítás: A definíció szerint

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{h}(s + \lambda e) - \mathfrak{h}(s)}{\lambda} &= \frac{\sqrt{1 + [s + \lambda e, s + \lambda e]} - \sqrt{1 + [s, s]}}{\lambda} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + [s + \lambda e, s + \lambda e]}\sqrt{1 + [s, s]} - (1 + [s, s])}{\lambda\sqrt{1 + [s, s]}}. \end{aligned}$$

Mivel $s + \lambda e, s \in S$, és S pozitív altér, ezért

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\sqrt{[s + \lambda e, s + \lambda e]} - \sqrt{[s, s]})^2 = \\ &= [s + \lambda e, s + \lambda e] - 2\sqrt{[s + \lambda e, s + \lambda e]}\sqrt{[s, s]} + [s, s], \end{aligned}$$

és így

$$[s + \lambda e, s + \lambda e] + [s, s] \geq 2\sqrt{[s + \lambda e, s + \lambda e]}\sqrt{[s, s]} \geq 2|[s + \lambda e, s]|,$$

alapján következik, hogy

$$[s + \lambda e, s + \lambda e] + [s, s] \geq 2|[s, s + \lambda e]|.$$

Ezen egyenlőtlenségeket használva, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{h}(s + \lambda e) - \mathfrak{h}(s)}{\lambda} &\geq \frac{\sqrt{1 + 2|[s + \lambda e, s]| + |[s + \lambda e, s]|^2} - (1 + [s, s])}{\lambda\sqrt{1 + [s, s]}} = \\ &= \frac{1 + |[s + \lambda e, s]| - 1 - [s, s]}{\lambda\sqrt{1 + [s, s]}} \geq \frac{\Re\{[s, s] + \lambda[e, s]\} - [s, s]}{\lambda\sqrt{1 + [s, s]}} = \frac{\Re[e, s]}{\sqrt{1 + [s, s]}}. \end{aligned}$$

De úgyszintén teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{h}(s + \lambda e) - \mathfrak{h}(s)}{\lambda} &= \\ &= \frac{(1 + [s + \lambda e, s + \lambda e]) - \sqrt{1 + [s, s]}\sqrt{(1 + [s + \lambda e, s + \lambda e])}}{\lambda\sqrt{1 + [s + \lambda e, s + \lambda e]}} \leq \\ &\leq \frac{(1 + [s + \lambda e, s + \lambda e]) - 1 - |[s, s + \lambda e]|}{\lambda\sqrt{1 + [s + \lambda e, s + \lambda e]}} = \\ &= \frac{\Re\{[s + \lambda e, s + \lambda e]\} - |[s, s + \lambda e]|}{\lambda\sqrt{1 + [s + \lambda e, s + \lambda e]}} = \\ &= \frac{\Re\{[s, s + \lambda e] + \lambda[e, s + \lambda e]\} - |[s, s + \lambda e]|}{\lambda\sqrt{1 + [s + \lambda e, s + \lambda e]}} \leq \\ &\leq \frac{|[s, s + \lambda e]| + \Re\{\lambda[e, s + \lambda e]\} - |[s, s + \lambda e]|}{\lambda\sqrt{1 + [s + \lambda e, s + \lambda e]}} = \\ &= \frac{\Re\{[e, s + \lambda e]\}}{\sqrt{1 + [s + \lambda e, s + \lambda e]}}. \end{aligned}$$

A folytonosságról szóló **s6** tulajdonság alapján a vizsgált határérték létezik és a derivált értéke

$$\frac{\Re[e, s]}{\sqrt{1 + [s, s]}},$$

ahogy állítottuk. □

Fontos következmények adódnak a fenti számításból.

A.2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az S tér $[\cdot, \cdot]$ s.i.p.-je differenciálható. (Azaz teljesül **s6'** is.) Ekkor tetszőleges x, z S -beli vektorpárra:*

$$[x, \cdot]'_z(x) = 2\Re[z, x] - [z, x],$$

és

$$\|\cdot\|''_{x,z}(x) = \frac{\Re[z, x] - [z, x]}{\|x\|}.$$

Ha a s.i.p.-ről a folytonos differenciálhatóságot is feltesszük (azaz a megfelelő norma egy C^2 függvény), akkor még egy összefüggést ismerünk

$$[x, \cdot]'_x(y) = [x, x],$$

ami alapján adódik, hogy

$$\|\cdot\|''_{x,x}(y) = \|x\|^2 - \frac{\Re[x, y]^2}{\|y\|^2}.$$

Bizonyítás: Mivel

$$\frac{1}{\lambda} ([x + \lambda z, x + \lambda z] - [x, x]) = \frac{1}{\lambda} ([x, x + \lambda z] - [x, x]) + \frac{1}{\lambda} [\lambda z, x + \lambda z],$$

ezért ha λ tart nullához a jobb oldal a $[x, \cdot]'_z(x) + [z, x]$ kifejezéshez tart. A baloldal egyenlő a

$$\frac{\left(\sqrt{1 + [x + \lambda z, x + \lambda z]} - \sqrt{1 + [x, x]}\right) \left(\sqrt{1 + [x + \lambda z, x + \lambda z]} + \sqrt{1 + [x, x]}\right)}{\lambda},$$

kifejezéssel, ezért az előző állítás szerint tart a

$$\frac{\Re[z, x]}{\sqrt{1 + [x, x]}} 2\sqrt{1 + [x, x]}$$

kifejezéshez. Ebből adódik az első egyenlőség

$$[x, \cdot]'_z(x) = 2\Re[z, x] - [z, x].$$

Használva a második deriváltról szóló tételünket, kapjuk, hogy

$$\|x\|(\|\cdot\|''_{x,z}(x)) = [x, \cdot]'_z(x) - \frac{\Re[x, x]\Re[z, x]}{\|x\|^2},$$

ami éppen a második állítás.

Feltéve a norma C^2 voltát a szorzat második argumentumának első deriváltja argumentumainak folytonos függvénye. Ezért azon $A(y) : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyet az

$$A(y) = [x, \cdot]'_x(y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} ([x, y + \lambda x] - [x, y])$$

formula definiál, szintén folytonos $y = 0$ -ban. Ugyanakkor nem-nulla $t \in \mathbb{R}$ esetén használva a $t\lambda' = \lambda$ jelölést kapjuk, hogy

$$A(ty) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} ([x, ty + \lambda x] - [x, y]) = \lim_{\lambda' \rightarrow 0} \frac{t}{t\lambda'} ([x, y + \lambda' x] - [x, y]) = A(y).$$

Ebből azonnal adódik, hogy

$$[x, \cdot]'_x(y) = A(y) = A(0) = [x, x]$$

teljesül y -től függetlenül. Az utolsó állítás, megint a bevezetőben levezetett azon formulánk következménye, mely összekapcsolja a norma és a s.i.p. deriváltak értékeit. $\square$

Legyen S folytonosan differenciálható s.i.p. tér, V egy általánosított tér-idő modell, F egy hiperfelület. Azt mondjuk, hogy F *térszerű hiperfelület* ha a Minkowski szorzat az érintő hipersíkjaiban pozitív. A következőkben a felületek differenciálgeometriájának alap fogalmait definiáljuk általánosított tér-idő modellben. Többek között előkerül a konvexitás kérdése, az alapformák, és görbületek definiálásának kérdései, az ívhossz és a geodetikus fogalma. A megfelelő fogalmak pszeudo-Euklidészi⁹ illetve semi-Riemann¹⁰ terekben már definiáltak, a mintát az ezen területeken található definíciók szolgáltatják.

A.2.4. Definíció. *Egy hiperfelület konvex ha minden érintőhipersíkjának az egyik oldalán fekszik. Szigorúan konvex ha konvex és minden érintőhipersíkon pontosan egy pontja van a hiperfelületnek.*

Egy Euklidészi térben az *első alapforma* egy pozitív definit kvadratikusan alak, melyet az érintőtér skaláriszorzata indukál.

Az általánosított tér-idő modellben az első alapformát az érintőtér vektoraibanak, Minkowski szorzatra vonatkozó skalárnégyzet függvényével szeretnénk definiálni.

⁹ M. W. Dawis, G. Moussong: Notes on Nonpositively Curved Polyhedra, Bolyai Society Mathematical Studies, 8, Budapest, 1999.

¹⁰ B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov: Modern Geometry- Methods and Applications, Part I. The geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields. Second Edition, Springer-Verlag, 1992.

Tekintsünk egy $f : S \longrightarrow V$ leképezést és bontsuk fel térszerű illetve időszzerű komponensek összegére a természetes módon. Ekkor

$$f = f_S + f_T,$$

$f_S : S \longrightarrow S$ illetve $f_T : S \longrightarrow T$. A beágyazó normált térre vonatkozóan a totális (Frechet) deriváltja:

$$Df = \begin{bmatrix} Df_S \\ Df_T \end{bmatrix}$$

amiből következik, hogy

$$Df(s) = Df_S(s) + Df_T(s).$$

Legyen most $f_1, f_2 : S \longrightarrow V$ két C^2 leképezés és $c : \mathbb{R} \longrightarrow S$ egy tetszőleges C^2 görbe. Tömörítő szándékkal vezessük be a következő jelölést a Minkowski szorzat második argumentumának deriválásához:

$$\begin{aligned} & [(f_1 \circ c)(t)), \cdot]_{D(f_2 \circ c)(t)}^{+'}(f_2(c(t))) := \\ & := ([(f_1)_S(c(t)), \cdot]_{D((f_2)_S \circ c)(t)}^{+}((f_2)_S(c(t))) - (f_1)_T(c(t))((f_2)_T \circ c)'(t)). \end{aligned}$$

Ekkor teljesül a következő:

A.2.3. Lemma. *Ha $f_1, f_2 : S \longrightarrow V$ két C^2 leképezés és $c : \mathbb{R} \longrightarrow S$ tetszőleges C^2 görbe, akkor*

$$\begin{aligned} & ([(f_1 \circ c)(t)), (f_2 \circ c)(t))]^{+'} = \\ & = [D(f_1 \circ c)(t), (f_2 \circ c)(t)]^{+} + [(f_1 \circ c)(t)), \cdot]_{D(f_2 \circ c)(t)}^{+'}((f_2 \circ c)(t)). \end{aligned}$$

Bizonyítás: Definíció szerint

$$\begin{aligned} & ([f_1 \circ c, f_2 \circ c]^{+})'|_t := \\ & := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} ([f_1(c(t+\lambda)), f_2(c(t+\lambda))]^{+} - [f_1(c(t)), f_2(c(t))]^{+}) \\ & = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} ([(f_1)_S(c(t+\lambda)), (f_2)_S(c(t+\lambda))] - [(f_1)_S(c(t)), (f_2)_S(c(t))]) + \\ & \quad + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} ([(f_1)_T(c(t+\lambda)), (f_2)_T(c(t+\lambda))] - [(f_1)_T(c(t)), (f_2)_T(c(t))]). \end{aligned}$$

Igazoljuk, hogy az első összeadandóra fennáll:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} ([(f_1)_S(c(t+\lambda)) - (f_1)_S(c(t)), (f_2)_S(c(t+\lambda))] +$$

$$+[(f_1)_S(c(t)), (f_2)_S(c(t+\lambda))] - [(f_1)_S(c(t)), (f_2)_S(c(t))] = \\ = [D((f_1)_S \circ c)|_t, (f_2)_S(c(t))] + [(f_1)_S(c(t)), \cdot]'_{D((f_2)_S \circ c)(t)}((f_2)_S(c(t))).$$

Ehhez tekintsünk egy $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ S -beli koordinátarendszert és a megfelelő koordinátákkal való reprezentációját $(f_2)_S \circ c$ -nek.

$$(f_2)_S \circ c = \sum_{i=1}^{n-1} ((f_2)_S \circ c)_i e_i$$

Használva Taylor tételét a koordináta függvényekre, adódik, hogy vannak valós $t_i \in (t, t+\lambda)$ paraméterek úgy, hogy

$$((f_2)_S \circ c)(t+\lambda) = ((f_2)_S \circ c)(t) + \lambda D((f_2)_S \circ c)(t) + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i=1}^{n-1} ((f_2)_S \circ c)_i''(t_i) e_i.$$

Eképpen kapjuk, hogy

$$[(f_1)_S(c(t)), (f_2)_S(c(t+\lambda))] - [(f_1)_S(c(t)), (f_2)_S(c(t))] = \\ = [(f_1)_S(c(t)), (f_2)_S(c(t)) + D((f_2)_S \circ c)(t)\lambda + \\ + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i=1}^{n-1} ((f_2)_S \circ c)_i''(t_i) e_i] - [(f_1)_S(c(t)), (f_2)_S(c(t))] = \\ = [(f_1)_S(c(t)), (f_2)_S(c(t)) + D((f_2)_S \circ c)(t)\lambda] - [(f_1)_S(c(t)), (f_2)_S(c(t))] + \\ + [(f_1)_S(c(t)), (f_2)_S(c(t)) + D((f_2)_S \circ c)(t)\lambda + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i=1}^{n-1} ((f_2)_S \circ c)_i''(t_i) e_i] - \\ - [(f_1)_S(c(t)), (f_2)_S(c(t)) + D((f_2)_S \circ c)(t)\lambda].$$

A szorzat második argumentumában, elegendően kicsi λ -kra teljesül a Lipschitz feltétel, valamely K konstanssal, így kapjuk, hogy az utolsó két tag különbségének abszolút értéke kisebb vagy egyenlő mint

$$K \left[(f_1)_S(c(t)), \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_{i=1}^{n-1} ((f_2)_S \circ c)_i''(t_i) e_i \right].$$

Alkalmazva a határátmenetet $\lambda \rightarrow 0$ mellett a kívánt egyenlőséghez jutunk.

A második tagban szereplő $(f_1)_T$ illetve $(f_2)_T$ függvények valós-valós függvények, így

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [(f_1)_T(c(t+\lambda)), (f_2)_T(c(t+\lambda))] - [(f_1)_T(c(t)), (f_2)_T(c(t))] =$$

$$= -((f_1)_T \circ c)'(t)(f_2)_T(c(t)) - (f_1)_T(c(t))((f_2)_T \circ c)'(t).$$

Eképpen

$$\begin{aligned} & ([(f_1 \circ c)(t), (f_2 \circ c)(t)]^+)' = \\ & = [D((f_1)_S \circ c)(t), ((f_2)_S \circ c)(t))] + [(f_1)_S(c(t)), \cdot]'_{D((f_2)_S \circ c)(t)}(((f_2)_S \circ c)(t)) - \\ & \quad - ((f_1)_T \circ c)'(t)(f_2)_T(c(t)) - (f_1)_T(c(t))((f_2)_T \circ c)'(t) = \\ & \quad = [D(f_1 \circ c)(t), f_2(c(t))]^+ + \\ & \quad + ([(f_1)_S(c(t)), \cdot]'_{D((f_2)_S \circ c)(t)}((f_2)_S(c(t))) - (f_1)_T(c(t))((f_2)_T \circ c)'(t)), \end{aligned}$$

adódik és az állítást így igazoltuk. $\square$

Ezen előkészítő lemma után, legyen most F egy hiperfelület, amit az

$$f : S \longrightarrow V$$

függvény definiál. Ekkor

$$f(s) = s + \mathfrak{f}(s)e_n$$

jelöléssel adhatjuk meg F pontjait. Ha $c : \mathbb{R} \longrightarrow S$ egy S -beli görbe, akkor ez egy F -hez tartozó *felületi görbét* is indukál. Tegyük fel, hogy c egy C^2 -görbe. Most már mondhatjuk:

A.2.5. Definíció. Az F hiperfelület $(f(c(t)))$ pontjában vett első alapforma az $(f(c(t)))$ ponton keresztülhaladó változó felületi c görbékre vonatkozó

$$I_{f(c(t))} := [D(f \circ c)(t), D(f \circ c)(t)]^+$$

kifejezés.

Ahogy a definícióból világos a változója egy érintő vektor, amely a változó c felületi görbe érintője az $(f(c(t)))$ pontban. Világos, hogy az első alapforma a két változójában homogén, de (általában) nincs bilineáris reprezentációja. Valóban, az f definíciója alapján, egy $\{e_i : i = 1 \cdots n - 1\}$ S -beli bázisra vonatkoztatva:

$$\begin{aligned} I_{f(c(t))} &= [\dot{c}(t) + (\mathfrak{f} \circ c)'(t)e_n, \dot{c}(t) + (\mathfrak{f} \circ c)'(t)e_n]^+ = \\ &= [\dot{c}(t), \dot{c}(t)] - [(\mathfrak{f} \circ c)'(t)]^2 = [\dot{c}(t), \dot{c}(t)] - \sum_{i,j=1}^{n-1} \dot{c}_i(t)\dot{c}_j(t)\mathfrak{f}'_{e_i}(c(t))\mathfrak{f}'_{e_j}(c(t)) = \\ &= [\dot{c}(t), \dot{c}(t)] - \dot{c}(t)^T \left[\mathfrak{f}'_{e_i}(c(t))\mathfrak{f}'_{e_j}(c(t)) \right]_{i,j=1}^{n-1} \dot{c}(t) \end{aligned}$$

mutatja, hogy az első alapforma pontosan akkor tekinthető kvadratikus alaknak, ha a

$$[\dot{c}(t), \dot{c}(t)] - \dot{c}(t)^T \dot{c}(t) = [\dot{c}(t), \dot{c}(t)] - \sum_{i=1}^{n-1} \dot{c}_i^2(t)$$

mennyiség eltűnik. Ha a Minkowski szorzat skaláriszorzat a közönséges értelemben, akkor $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ tekinthető S ortonormált bázisának és az említett különbség eltűnik, továbbá $c_i(t) = \langle e_i, c(t) \rangle = \langle c(t), e_i \rangle$ és $\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \dot{c}_i(t) e_i$. Így

$$I_{f(c(t))} = \dot{c}(t)^T \left(\text{Id} - \left[\mathbf{f}'_{e_i}(c(t)) \mathbf{f}'_{e_j}(c(t)) \right]_{i,j=1}^{n-1} \right) \dot{c}(t),$$

ami visszaadja az első alapforma klasszikus lokális előállítását. Ha $c_i(t) = 0$ teljesül $i \geq 3$ esetén, akkor

$$\det I = 1 - (\mathbf{f}'_{e_1}(c(t)))^2 - (\mathbf{f}'_{e_2}(c(t)))^2.$$

A második alapforma is értelmezhető, annak ellenére, hogy az érintőhipersíkon vett szorzatunk nem szimmetrikus és nem bilineáris. Ha v egy érintővektor és n a hiperfelület normálvektora az $f(c(t))$ pontban, akkor

$$0 = [v, n]^+ = [D(f \circ c)(t), (f \circ c)(t)]^+.$$

Használva lemmánkat és az előtte szereplő jelölést kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= ([D(f \circ c)(t), (n \circ c)(t)]^+)' = \\ &= [D^2(f \circ c), n(c(t))]^+ + [D(f \circ c)(t), \cdot]^{+'}_{D(n \circ c)(t)}(n(c(t))). \end{aligned}$$

Vezessük be az egységnormálvektorok n^0 mezőjét a

$$n^0(c(t)) := \begin{cases} n(c(t)) & \text{ha } n \text{ fényszerű vektor} \\ \frac{n(c(t))}{\sqrt{|[n(c(t)), n(c(t))]^+|}} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

definícióval. Most már mondhatjuk, hogy

A.2.6. Definíció. A második alapforma az $f(c(t))$ pontban az alábbi ekvivalens formulákkal definiálható:

$$II := [D^2(f \circ c)(t), (n^0 \circ c)(t)]^+_{(f \circ c)(t)} = -[D(f \circ c)(t), \cdot]^{+'}_{D(n^0 \circ c)(t)}((n^0 \circ c)(t)).$$

Feltéve, hogy $n(s) = s + \mathbf{n}(s)e_n$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \Pi &= [D^2(f \circ c)(t), (n^0 \circ c)(t)]^+_{(f \circ c)(t)} = \\
 &= \left[D(\dot{c}(t) + D(\mathbf{f} \circ c)(t)e_n), \frac{c(t) + (\mathbf{n} \circ c)(t)e_n}{\sqrt{[c(t), c(t)] - (\mathbf{n}(c(t)))^2}} \right]^+ = \\
 &= \frac{\left[\ddot{c}(t) + \left(\dot{c}(t)^T \left[\mathbf{f}''_{e_i, e_j} |_{c(t)} \right] \dot{c}(t) + [\mathbf{f}'_{e_i} |_{c(t)}] \ddot{c}(t) \right) e_n, c(t) + \mathbf{n}(c(t))e_n \right]^+}{\sqrt{[c(t), c(t)] - (\mathbf{n}(c(t)))^2}} = \\
 &= \frac{\left[\ddot{c}(t) + [\mathbf{f}'_{e_i} |_{c(t)}] \ddot{c}(t)e_n, (n \circ c)(t) \right]^+ - \left(\dot{c}(t)^T \left[\mathbf{f}''_{e_i, e_j} |_{c(t)} \right] \dot{c}(t) \right) (\mathbf{n}(c(t)))}{\sqrt{[c(t), c(t)] - (\mathbf{n}(c(t)))^2}} = \\
 &= \frac{\left[D(f)|_{c(t)} \ddot{c}(t), (n \circ c)(t) \right]^+ - \left(\dot{c}(t)^T \left[\mathbf{f}''_{e_i, e_j} |_{c(t)} \right] \dot{c}(t) \right) (\mathbf{n}(c(t)))}{\sqrt{[c(t), c(t)] - (\mathbf{n}(c(t)))^2}} = \\
 &= - \left(\dot{c}(t)^T \left[\frac{\mathbf{f}''_{e_i, e_j} |_{c(t)} \mathbf{n}(c(t))}{\sqrt{[c(t), c(t)] - (\mathbf{n}(c(t)))^2}} \right]_{i,j=1}^{n-1} \dot{c}(t) \right).
 \end{aligned}$$

Ezen formula alapján a második alapformához rendelhetünk egy determinánst, a fenti kvadratikus alak determinánsát::

$$\det \Pi := \det \left(\left[\frac{\mathbf{f}''_{e_i, e_j} |_{c(t)} \mathbf{n}(c(t))}{\sqrt{[c(t), c(t)] - (\mathbf{n}(c(t)))^2}} \right]_{i,j=1}^{n-1} \right).$$

Az érintő hipersík egy két-dimenziós síkját tekintve, ehhez tartozik az S térben a Df lineáris leképezésre vonatkozó két-dimenziós őskép. Ez a sík egy normált sík, amiben vehetünk egy $\{e_1, e_2\}$ Auerbach bázist.¹¹ Most megfordítjuk a szekcionális görbület illetve főgörbületek szokásos definiálási sorrendjét.

A.2.7. Definíció. Az $\{u = Df(e_1)$ illetve $v = Df(e_2)\}$ érintővektorok két-dimenziós síkjában vett, a $D(f \circ c)$ változóra vonatkozó szélsőértékeit a

$$\rho(D(f \circ c)) := \frac{\Pi_{f \circ c(t)}}{\mathbf{I}_{f \circ c(t)}}$$

¹¹ Tekinthejtük az egységvektor párok által kifeszített maximális területű paralelogramma élvektorainak a bázis elemeit. Pontos definíciót találhatunk a következő cikkben: Martini, H., Swanepoel, K., Weiss, G.: *The geometry of Minkowski spaces - a survey. Part I.* Expositiones Mathematicae **19** (2001), 97-142.

függvénynek, szekcionális főgörbületeknek nevezzük. Jelölje ezen értékeket $\rho(u, v)_{\max}$ illetve $\rho(u, v)_{\min}$. A vizsgált $c(t)$ pontban fellépő szekcionális (Gauss) görbület $\kappa(u, v)$ legyen a következő szorzat:

$$\kappa(u, v) := [n^0(c(t)), n^0(c(t))]^+ \rho(u, v)_{\max} \rho(u, v)_{\min}.$$

A szimmetrikus, bilineáris esetben, mindkét alapforma kvadratikus és a szekcionális főgörbületek merőleges irányokban lépnek fel. Nem mások mint a sajátértékei a $\Pi_{f \circ c(t)}$, $I_{f \circ c(t)}$ kvadratikus alak párnak. Azaz $\rho(u, v)_{\max}$ illetve $\rho(u, v)_{\min}$ a

$$0 = \det (\Pi_{f \circ c(t)} - \lambda I_{f \circ c(t)}) = \det (I_{f \circ c(t)}) \det ((I_{f \circ c(t)})^{-1} \Pi_{f \circ c(t)} - \lambda \text{Id})$$

egyenlőség megoldásai, mutatván, hogy

$$\begin{aligned} \kappa(u, v) &:= [n^0(c(t)), n^0(c(t))]^+ \rho(u, v)_{\max} \rho(u, v)_{\min} = \\ &= [n^0(c(t)), n^0(c(t))]^+ \det \left(I_{f \circ c(t)}^{-1} \Pi_{f \circ c(t)} \right) = [n(c(t)), n(c(t))]^+ \frac{\det \Pi_{f \circ c(t)}}{\det I_{f \circ c(t)}} = \\ &= [n^0(c(t)), n^0(c(t))]^+ \frac{\left(\mathfrak{f}_{e_1, e_1}''|_{c(t)} \mathfrak{f}_{e_2, e_2}''|_{c(t)} - (\mathfrak{f}_{e_1, e_2}''|_{c(t)})^2 \right) (\mathbf{n}(c(t)))^2}{(1 - (\mathfrak{f}_{e_1}'(c(t)))^2 - (\mathfrak{f}_{e_2}'(c(t)))^2) |[c(t), c(t)] - (\mathbf{n}(c(t)))^2|}. \end{aligned}$$

De az n függvényt választhatjuk az

$$n(c(t)) := \mathfrak{f}_{e_1}'(c(t))e_1 + \mathfrak{f}_{e_2}'(c(t))e_2 + e_n$$

alakban a $\mathbf{n}(c(t)) = 1$ feltétel mellett és az érintő hipersík egy olyan síkjában, amelyben csak térszerű vektorok találhatók, és időszzerű

$$[n(c(t)), n(c(t))]^+ = \sqrt{1 - (\mathfrak{f}_{e_1}'(c(t)))^2 - (\mathfrak{f}_{e_2}'(c(t)))^2}$$

hossznégyszetű normál vektora van, kapjuk az ismert ¹² formulát:

$$\kappa(u, v) = \frac{-\mathfrak{f}_{e_1, e_1}''|_{c(t)} \mathfrak{f}_{e_2, e_2}''|_{c(t)} + (\mathfrak{f}_{e_1, e_2}''|_{c(t)})^2}{(1 - (\mathfrak{f}_{e_1}'(c(t)))^2 - (\mathfrak{f}_{e_2}'(c(t)))^2)^2}.$$

A Riemann hiperfelületek Ricci görbülete a felület egy $p = (f \circ c)(t)$ pontjában a $v = D(f \circ c)$ rögzített irányra vonatkozóan nem más mint a szekcionális görbületek összege mindazon kétdimenziós síkokra vonatkozóan,

¹² 95. oldal B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov: Modern Geometry- Methods and Applications, Part I. The geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields. Second Edition, Springer-Verlag, 1992.

melyek kifeszítő vektorainak egyike v , másika pedig az érintőhipersíkban v ortokomplementumaként előálló altér valamelyik rögzített ortonormált bázisának valamelyik u_i vektora. Ez az érték független a bázis választásától. Ha egyenletes eloszlás mellett véletlenül választjuk az ortonormált bázist a kapott $\kappa(u_i, v)$ valószínűségi változók értékei várható értékei megegyeznek, ezek összege megint egy valószínűségi változó, amely várható értéke megfelel a p pontban és v irányban fellépő Ricci görbületnek. Ezért ezen érték nem más mint az $n - 2$ -szerese a v -n keresztülhaladó síkokban fellépő szekcionális görbületek közös várható értékének. Ezen okfejtés motiválja a következő definíciót:

A.2.8. Definíció. *Az $f(c(t))$ pontban a v érintővektor irányában fellépő $\text{Ric}(v)$ Ricci görbület nem más mint:*

$$\text{Ric}(v)_{f(c(t))} := (n - 2) \cdot E(\kappa_{f(c(t))}(u, v)),$$

ahol $\kappa_{f(c(t))}(u, v)$ jelöli az érintő hipersík v vektora és valamely véletlenszerűen választott az $[u, v]^+ = 0$ feltételnek eleget tevő másik érintővektor által kifeszített síkon fellépő szekcionális görbület várható értékét. Hasonlóan vezetjük be az $f(c(t))$ pontbeli skalár görbületet is a

$$\Gamma_{f(c(t))} := \binom{n-1}{2} \cdot E(\kappa_{f(c(t))}(u, v))$$

definícióval.

Emlékeztetünk rá, hogy a skalár görbület nem más, mint az érintő hipersík egy ortonormált bázisának v_i elemeire vonatkoztatott Ricci görbületek összege, így várható értéke a fentihez hasonlóan a $\kappa_{f(c(t))}(u, v)$ valószínűségi változó várhatóértékének az $\binom{n-1}{2}$ -szerese.

A.3. Négy fontos hiperfelület

A.3.1. A H képzetes egységgömb

Általánosított téridő modellünkben az időszerű vektorok egységgömbjét definiáljuk először¹³.

A.3.1. Definíció. A

$$H := \{v \in V \mid [v, v]^+ = -1\},$$

halmazt *képzetes egységgömbnek* nevezzük.

¹³ A fejezet eredményei a következő cikkben találhatók: Á.G.Horváth, Premanifolds, Note di Matematica **31/2** (2011) 17–51.

A beágyazó $(V, [\cdot, \cdot]^-)$ normált térben H -nak egy kétköpenyű hiperboloid felel meg egy-egy köpeny található az időszerű vektorok $\mathcal{T}$ kettős körkúpjának egy-egy kúpjában. Mindkét köpeny pontjai előállíthatók hiperfelületként, a meghatározó függvények egymás negatívjai. Igazoljuk, hogy az érintőterek érintőhipersíkok, világos, hogy elegendő csak az egyik köpeny pontjaira koncentrálni. Legyen $v \in H$ tetszőleges. Jelölje T_v a $v + v^\perp$ halmazt, ahol $v^\perp$ a v ortogonális komplementere a beágyazó s.i.i.p. térre vonatkozólag. Ez altér.

A.3.1. Tétel. *A $v = s + t \in H$ pontnak megfelelő T_v altér a $(V, [\cdot, \cdot]^+)$ általánosított téridő modell egy pozitív, $(n-1)$ -dimenziós affine altere.*

Bizonyítás: A H definíciója szerint a t komponense v -nek nem nulla. Ahogy azt korábban igazoltuk¹⁴, ha $[v, v] \neq 0$, akkor $v^\perp$ egy $(n-1)$ -dimenziós altér V -ben. Legyen $w \in T_v - v$ tetszőleges. Igazolnunk kell, hogy ha $[v, v] = -1$ és w merőleges v -re, akkor $[w, w] > 0$. Legyen $w = s' + t'$ és tegyük fel, hogy $[t', t'] = 0$. Ekkor T definíciója szerint, $t' = 0$ és így $[w, w] = [s, s] > 0$ is teljesül. Feltehetjük, tehát, hogy $[t', t'] \neq 0$, és így $t' = \lambda t$. Ugyanakkor tudjuk, hogy

$$0 = [w, v]^+ = [s', s] + [t', t].$$

A Cauchy-Schwartz egyenlőtlenséget használva a térszerű komponensben, adódik, hogy

$$[s, s][s', s'] \geq |[s', s]|^2 = |- [t', t]|^2 = |\lambda|^2 | - [t, t]|^2 = |\lambda|^2 [t, t]^2.$$

Mivel

$$[s, s][t', t'] = \lambda \bar{\lambda} [s, s][t, t] = |\lambda|^2 [s, s][t, t],$$

kapjuk a következő egyenlőtlenséget

$$[s, s][w, w]^+ = [s, s]([s', s'] + [t', t']) \geq |\lambda|^2 ([t, t]^2 + [s, s][t, t]).$$

A H definíciója szerint

$$-1 = [v, v]^+ = [s, s] + [t, t]$$

is igaz, és

$$[s, s][w, w]^+ \geq |\lambda|^2 ([t, t]^2 + (-1 - [t, t])[t, t]) = -|\lambda|^2 [t, t] > 0.$$

Következésképpen, ha s nem zérus, akkor $[w, w] > 0$, ahogy állítottuk.

¹⁴ Megjegyzés Theorem 7 után az Á.G.Horváth: Semi-indefinite inner product and generalized Minkowski spaces. *Journal of Geometry and Physics* **60** (2010) 1190-1208 munkában.

Ha $[s, s] = 0$ akkor $[t, t] = -1$, és a

$$0 = [s' + t', t] = [s', t] + [t', t] = [t', t]$$

egyenlőségből következik, hogy $t' = 0$ és $w \in S$. Ezzel az állítást igazoltuk. $\square$

Az eddigiek során nem kellett használnunk differenciálgeometriai fogalmakat, ezért a H illetve H^+ -hoz tartozó $\mathfrak{h}(s) = \sqrt{1 + [s, s]}$ függvény felírására sem volt szükségünk. Legyen most

$$\mathfrak{h} : s \mapsto \sqrt{1 + [s, s]}$$

a H^+ -t mint hiperfelületet definiáló függvény. Ekkor persze $-\mathfrak{h}(s) = -\sqrt{1 + [s, s]}$ adja meg a másik H^- köpeny analitikus leírását. Teljesül ekkor a következő állítás:

A.3.1. Lemma. *Legyen H^+ az általánosított tér-idő modell imaginárius egy-séggömbjének felső köpenye. Ekkor H^+ -nak a*

$$v = h(s) = s + \mathfrak{h}(s)e_n = s + \sqrt{1 + [s, s]}e_n$$

pontjában fellépő érintővektorai alkotják a v $v^\perp$ ortogonális direkt kiegészítő-jét.

Bizonyítás: Az érintővektorok általános alakja

$$u = \alpha(e + \mathfrak{h}'_e(s)e_n),$$

ahol korábbi lemmánk szerint

$$\mathfrak{h}'_e(s) = \frac{\Re[e, s]}{\sqrt{1 + [s, s]}} = \frac{[e, s]}{\sqrt{1 + [s, s]}}.$$

Ezért

$$\begin{aligned} & \left[\alpha \left(e + \frac{[e, s]}{\sqrt{1 + [s, s]}} e_n \right), s + t \right]^+ = \\ & = \alpha[e, s] + \alpha \left[\frac{[e, s]}{\sqrt{1 + [s, s]}} e_n, \sqrt{1 + [s, s]} e_n \right] = \alpha([e, s] - [e, s]) = 0. \end{aligned}$$

Így az érintő vektorok merőlegesek a v vektorra. Fordítva, ha egy

$$u = s' + t' = s' + \lambda e_n$$

vektorra

$$0 = [u, v] = [s', s] + [t', t]$$

teljesül, akkor

$$[s', s] = -[\lambda e_n, t] = \lambda \sqrt{1 + [s, s]},$$

mivel $-[t, t] = 1 + [s, s]$ teljesül H^+ definíciója folytán. Vezessük be az

$$e = \frac{s'}{\sqrt{[s', s']}}$$

jelölést, ekkor kapjuk, hogy

$$[e, s] = \left[\frac{s'}{\sqrt{[s', s']}}, s \right] = \frac{\lambda}{\sqrt{[s', s']}} \sqrt{1 + [s, s]},$$

amiből

$$\frac{\lambda}{\sqrt{[s', s']}} = \frac{[e, s]}{\sqrt{1 + [s, s]}} = \mathfrak{h}'_e(s)$$

adódik. Eképpen

$$u = \sqrt{[s', s']} \left(\frac{s'}{\sqrt{[s', s']}} + \frac{\lambda}{\sqrt{[s', s']}} e_n \right) = \alpha(e + \mathfrak{h}'_e(s)e_n).$$

Azaz az ortogonális komplementum egy vektora érintővektor is, ahogy állítottuk. $\square$

A továbbiakban megvizsgáljuk H^+ -t differenciálgeometriai szempontok szerint. Mint láttuk minden pontjában van érintő hipersík és a Minkowski szorzatra az érintővektorok halmaza egy pozitív altér. Először a konvexitást vizsgáljuk.

A.3.2. Tétel. H^+ konvex hiperfelület. Akkor és csak akkor szigorúan konvex, ha S az.

Bizonyítás: Legyen $w = s' + t'$ a H^+ egy pontja és tekintsük a

$$[w - v, v]^+ = [s' - s, s] + [t' - t, t] = [s', s] - [s, s] - (\lambda' - \lambda)\lambda = [s', s] - \lambda'\lambda + 1$$

szorzatot, ahol $t' = \lambda' e_n$, $t = \lambda e_n$ és $s', s \in S$. (λ' és λ pozitívak.) Mivel

$$\sqrt{1 + [s', s']} = \lambda' \text{ és } \sqrt{1 + [s, s]} = \lambda$$

eképpen

$$[w - v, v]^+ = [s', s] - \sqrt{1 + [s', s']} \sqrt{1 + [s, s]} + 1 \leq$$

$$\leq \sqrt{[s', s'] [s, s]} - \sqrt{1 + [s', s']} \sqrt{1 + [s, s]} + 1 \leq 0,$$

tekintettel a

$$[s', s'] [s, s] + 2\sqrt{[s', s'] [s, s]} + 1 \leq [s', s'] [s, s] + ([s', s'] + [s, s]) + 1$$

relációra. (Itt használtuk a pozitív számokra vonatkozó számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenséget.)

Jegyezzük meg, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az s' és s normája megegyezik azaz $\lambda' = \lambda$ is fennáll. Így adódik, hogy

$$[s', s] - [s, s] = 0,$$

avagy

$$[s', s] = \sqrt{[s', s'] [s, s]}.$$

A szigorú konvexitás ismert karakterizációja s.i.p. térben az, hogy ezen utóbbi összefüggés teljesülése csak lineárisan összefüggő vektorokra lehetséges, ¹⁵ azaz a szigorú konvexitás és, hogy T_v és H^+ közös pontja csak v , egyszerre teljesülnek. $\square$

Számoljuk ki az alapformákat.

$$\begin{aligned} \text{I} &= [\dot{c}(t) + (\mathfrak{h} \circ c)'(t)e_n, \dot{c}(t) + (\mathfrak{h} \circ c)'(t)e_n]^+ = \\ &= [\dot{c}(t), \dot{c}(t)] - [(\mathfrak{h} \circ c)'(t)]^2, \end{aligned}$$

ahol $\dot{c}(t)$ jelenti a c görbe S -beli érintővektorát a $c(t)$ pontban. A korábbiak alapján

$$\text{I} = [\dot{c}, \dot{c}] - \frac{\left([\dot{c}(t), c(t)] + [c(t), \cdot]'_{\dot{c}(t)}(c(t))\right)^2}{4(1 + [c(t), c(t)])} = [\dot{c}, \dot{c}] - \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{1 + [c(t), c(t)]}.$$

Jegyezzük meg, hogy ebből a formulából és a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenségből új bizonyítást kaphatunk a megszorított Minkowski szorzat pozitívitására.

H^+ második alapformája:

$$\text{II} := [\ddot{c}(t) + (\mathfrak{h} \circ c)''(t)e_n, c(t) + (\mathfrak{h} \circ c)'(t)e_n]_{(\mathfrak{h} \circ c)'(t)}^+ = [\ddot{c}(t), c(t)] - (\mathfrak{h} \circ c)''(t)\mathfrak{h}(c(t)),$$

mivel

$$n \circ c = h \circ c = c(t) + (\mathfrak{h} \circ c)'(t)e_n.$$

¹⁵ lásd.: Berkson, E.: *Some types of Banach spaces, Hermitian operators and Bade functionals*. Trans. Amer. Math. Soc. **116** (1965), 376–385.

Először határozzuk meg a

$$(\mathfrak{h} \circ c)'(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvény deriváltját a t pontban. Használva korábbi formuláinkat

$$\begin{aligned} (\mathfrak{h} \circ c)''(t) &= ((\mathfrak{h} \circ c)')'(t) = \left(\frac{[\dot{c}(t), c(t)]}{\sqrt{1 + [c(t), c(t)]}} \right)' = \\ &= \frac{[\dot{c}(t), c(t)]'}{\sqrt{1 + [c(t), c(t)]}} - \frac{\frac{[\dot{c}(t), c(t)]}{\sqrt{1 + [c(t), c(t)]}} [\dot{c}(t), c(t)]}{(1 + [c(t), c(t)])} \end{aligned}$$

adódik és ezért

$$\begin{aligned} (\mathfrak{h} \circ c)''(t) \mathfrak{h}(c(t)) &= [\dot{c}(t), c(t)]' - \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{1 + [c(t), c(t)]} = \\ &= ([\ddot{c}(t), c(t)] + [\dot{c}(t), \cdot]_{\dot{c}(t)}'(c(t))) - \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{1 + [c(t), c(t)]}. \end{aligned}$$

Így a második alapforma

$$\text{II} = -[\dot{c}(t), \cdot]_{\dot{c}(t)}'(c(t)) + \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{1 + [c(t), c(t)]},$$

vagy használva az

$$\|y\| \cdot \|y\|'' = [x, \cdot]'_z(y) - \frac{\Re[x, y] \Re[z, y]}{\|y\|^2},$$

egyenlőséget a vele ekvivalens

$$\text{II} = -\|c(t)\| \cdot \|c(t)\|'' - \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{\|c(t)\|^2(1 + \|c(t)\|^2)}$$

kissé bonyolultabb alakú képlettel adható meg. Tegyük fel a norma C^2 -függvény tulajdonságát is. Ekkor használhatjuk korábbi eredményeinket megint és kapjuk, hogy

$$\text{II} = -[\dot{c}(t), \dot{c}(t)] + \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{1 + [c(t), c(t)]} = -\text{I}.$$

Mivel az első alap forma pozitív H^+ -n a második negatív definit és a szekcionális főgörbületek értékei

$$\rho(u, v)_{\max} = \rho(u, v)_{\min} = -1.$$

Azaz minden szekcionális görbület -1 , a Ricci és skalár-görbületek pedig minden pontban és minden irányban $-(n-2)$ illetve $-\binom{n-1}{2}$. Ezzel a következő tételt bizonyítottuk:

A.3.3. Tétel. *Ha S folytonosan differenciálható s.i.p. tér akkor az általánosított tér-idő modell képzetes egységgömbje konstans negatív görbületű hiperfelület.*

Észrevehetjük, hogy valamennyi definíciónk és állításunk – olyan Minkowski szorzat esetén, mely indefinit-skalárisszorzat is egyben – a semi-Riemann terekben szokásos definíciókba és ismert állításokba transzformálódik,¹⁶ ezért H^+ a hiperbolikus tér természetes általánosításának tekinthető. H -t ezért konstans negatív görbületű *elő-sokaságnak* nevezzük H^+ -ra pedig találó az *elő-hiperbolikus tér* elnevezés.

A.3.2. A de Sitter gömb

Ebben az alfejezetben azon pontok G halmazát vizsgáljuk, melyeken az általánosított téridő modell Minkowski szorzata 1 skalárnégyszetet ad. Az érintőhipersíkokon a szorzat nem lesz pozitív definit. Mint látni fogjuk ezek pszeudo-euklidészi terek a skaláris szorzatos esetben, és így beágyazó pszeudo-euklidészi tér esetén ezen G halmazt *de Sitter gömb*-nek nevezik. A teljes G halmaz nem hiperfelület ezért megint megszorítjuk magunkat az idő-tengely szerinti pozitív rész vizsgálatára. Vezessük be a

$$G^+ = \{s + t \in G : t = \lambda e_n \text{ where } \lambda > 0\}$$

jelölést. A G illetve G^+ lokális geometriái megegyeznek és G^+ már egy hiperfelület, amit a

$$g(s) = s + \mathfrak{g}(s)e_n$$

leképezés definiál, az $[s, s] > 1$ -re értelmezett

$$\mathfrak{g}(s) = \sqrt{-1 + [s, s]} \text{ for}$$

függvény segítségével. Kiszámoljuk a

$$\mathfrak{g} : s \mapsto \sqrt{-1 + [s, s]}$$

függvény iránymenti deriváltjait az adott

$$u = \alpha(e + \mathfrak{g}'_e(s)e_n)$$

¹⁶ M. W. Dawis, G. Moussong: Notes on Nonpositively Curved Polyhedra, Bolyai Society Mathematical Studies, 8, Budapest, 1999.

G. O'Neill: Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New-York, 1983.

S. Verpoort: The Geometry of the Second Fundamental Form: Curvature Properties and Variational Aspects, Katholieke Universiteit Leuven, Dissertation 2008.

vektorra vonatkozóan. Mivel a $\mathbf{g}$ és az $\mathbf{f} : s \mapsto \sqrt{1 + [s, s]}$ függvények között fennáll a

$$\mathbf{f}^2(s) + \mathbf{g}^2(s) = 2[s, s]$$

kapcsolat, a $\mathbf{g}$ deriváltját az $e \in S$ egységvektor irányában kiszámolhatjuk a

$$2\mathbf{f}(s)\mathbf{f}'_e(s) + 2\mathbf{g}(s)\mathbf{g}'_e(s) = 4\|s\| \cdot \|'_e(s) = 4[e, s]$$

egyenlőségből. Eképpen

$$\mathbf{g}'_e(s) = \frac{[e, s]}{\mathbf{g}(s)} = \frac{[e, s]}{\sqrt{-1 + [s, s]}}$$

ahonnan

$$[u, u]^+ = \alpha^2 \left(1 - \frac{[e, s]^2}{(-1 + [s, s])} \right) = \alpha^2 \frac{-1 + [s, s] - [e, s]^2}{-1 + [s, s]}.$$

Ebből közvetlenül látszik, hogy

$$\begin{aligned} [u, u]^+ &> 0 && \text{ha } -1 + [s, s] > [e, s]^2 \\ [u, u]^+ &= 0 && \text{ha } -1 + [s, s] = [e, s]^2 \\ [u, u]^+ &< 0 && \text{ha } -1 + [s, s] < [e, s]^2. \end{aligned}$$

Azaz egy s' vektora azon $(n-2)$ -altérnek, mely S -re nézve s ortogonális komplementeréhez tartozik; az érintő-hipersíknak térszerű vektorát adja és az s -hez tartozó érintővektor pedig időszerű vektor lesz.

Megszeretnénk határozni az érintő-hipersík fényszerű vektorait. Ehhez tekintsük az $e \in S$ egységvektort a következő alakban:

$$e = \frac{\pm \sqrt{-1 + [s, s]}}{[s, s]} s + s', \text{ ahol } s' \in s^\perp.$$

Egy ilyen egységvektor az S -beli egységgömb és az

$$s^\perp + \frac{\pm \sqrt{-1 + [s, s]}}{[s, s]} s$$

$(n-2)$ -dimenziós affin altér metszetében fekszik. Mivel $s^\perp$ az s S -beli ortogonális komplementerének eleme, és fennáll

$$\left(\frac{\pm \sqrt{-1 + [s, s]}}{[s, s]} \right)^2 [s, s] = \frac{-1 + [s, s]}{[s, s]} < 1,$$

ezért a fenti metszet két $(n-3)$ -dimenziós gömb uniója.

Eképpen a fényszerű vektorok irányai az érintő hipersík egy kúpját alkotják; az

$$u = \alpha \left(\left(\pm \sqrt{-1 + [s, s]} s + [s, s] s' \right) \pm [s, s] e_n \right)$$

pontok kúpját.

Emlékezzünk vissza arra, hogy az érintő hipersíkot a beágyazó vektortér egy alterével azonosítottuk, amelyen érvényes egy megszorított belső Minkowski struktúra, melynek definiáló pozitív és negatív alterei:

$$S' := s^\perp \cap S = s^\perp \text{ illetve } T' = \alpha \left(\sqrt{-1 + [s, s]} s + [s, s] e_n \right).$$

Jegyezzük meg először, hogy

A.3.4. Tétel. G^+ és az érintő-hipersíkjai metsződnek, következésképpen nincs G -nek olyan pontja, melyben (lokálisan) konvex lenne.

Bizonyítás: A G^+ tetszőleges pontjához találunk azt tartalmazó két halmazt, melyek a pontbeli érintő-hipersíkra nézve különböző féltérbe esnek. Az egyik az e_n és egy $s + t \in G^+$ alakú vektor által kifeszített két dimenziós sík; a másik egy tetszőleges görbéje azon $(n - 2)$ -dimenziós hiperfelületnek, mely a G -nek és az $S + (s + t)$ affin alterének a metszeteként adódik. Valóban, az $s + t$ pontbeli normál vektora az érintő hipersíknak maga $s + t$, mert fennáll

$$\left[e + \frac{[e, s]}{\sqrt{-1 + [s, s]}} e_n, s + \sqrt{-1 + [s, s]} e_n \right]^+ = 0.$$

Eképpen $\alpha > \frac{1}{\sqrt{[s, s]}}$ esetén

$$\begin{aligned} & \left[\left(\alpha s + \sqrt{-1 + [\alpha s, \alpha s]} e_n \right) - \left(s + \sqrt{-1 + [s, s]} e_n \right), s + \sqrt{-1 + [s, s]} e_n \right]^+ = \\ & = (\alpha - 1)[s, s] + (\sqrt{-1 + [s, s]} - \sqrt{-1 + [\alpha s, \alpha s]}) \sqrt{-1 + [s, s]} = \\ & = -1 + \alpha[s, s] - \sqrt{(-1 + [\alpha s, \alpha s])(-1 + [s, s])} = \\ & = \alpha[s, s] - 1 - \sqrt{1 - (1 + \alpha^2)[s, s] + \alpha^2[s, s]^2} \geq 2(\alpha[s, s] - 1) > 2(\|s\| - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Ugyanakkor ha $s' + t \in G$ tetszőleges, akkor $\|s'\| = \|s\|$ így

$$[s' - s + (t - t), s + t]^+ = [s', s] - [s, s] \leq \sqrt{[s', s']} \sqrt{[s, s]} - [s, s] = 0,$$

ahol egyenlőség csak az $s' = \pm s$ esetben áll fenn. $\square$

Számoljuk ki az alapformákat. Használva a $\mathfrak{g}$ függvényt, az első alap forma

$$I = [\dot{c}(t) + (\mathfrak{g} \circ c)'(t) e_n, \dot{c}(t) + (\mathfrak{g} \circ c)'(t) e_n]^+ = [\dot{c}(t), \dot{c}(t)] - [(\mathfrak{g} \circ c)'(t)]^2.$$

Korábbi állításaink eredményei alapján

$$I = [\dot{c}, \dot{c}] - \frac{\left([\dot{c}(t), c(t)] + [c(t), \cdot]'_{\dot{c}(t)}(c(t))\right)^2}{4(-1 + [c(t), c(t)])} = [\dot{c}, \dot{c}] - \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{-1 + [c(t), c(t)]}.$$

Azonban szintén tudjuk, hogy $n \circ c = g \circ c = c(t) + (\mathfrak{g} \circ c)(t)e_n$ így kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} II &:= [\ddot{c}(t) + (\mathfrak{g} \circ c)''(t)e_n, c(t) + (\mathfrak{g} \circ c)(t)e_n]_{(\mathfrak{g} \circ c)(t)}^+ = \\ &= [\ddot{c}(t), c(t)] - (\mathfrak{g} \circ c)''(t)\mathfrak{g}(c(t)). \end{aligned}$$

Mivel a deriváltja a

$$(\mathfrak{g} \circ c)'(t) = D(\mathfrak{g} \circ c)(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

valós függvénynek a t pontban:

$$(\mathfrak{g} \circ c)''(t) = \frac{[\dot{c}(t), c(t)]'}{\sqrt{-1 + [c(t), c(t)]}} - \frac{\frac{[\dot{c}(t), c(t)]}{\sqrt{-1 + [c(t), c(t)]}}[\dot{c}(t), c(t)]}{(-1 + [c(t), c(t)])}$$

ezért

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g} \circ c)''(t)\mathfrak{g}(c(t)) &= [\dot{c}(t), c(t)]' - \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{-1 + [c(t), c(t)]} = \\ &= ([\ddot{c}(t), c(t)] + [\dot{c}(t), \cdot]'_{\dot{c}(t)}(c(t))) - \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{-1 + [c(t), c(t)]}. \end{aligned}$$

Összefoglalva:

$$II = -[\dot{c}(t), \cdot]'_{\dot{c}(t)}(c(t)) + \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{-1 + [c(t), c(t)]}.$$

Használva megint a norma C^2 tulajdonságát és az A.2.2. Tételt most már

$$II = -[\dot{c}(t), \dot{c}(t)] + \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{-1 + [c(t), c(t)]} = -I,$$

összefüggés adódik, ugyanúgy mint a H^+ esetén. A szekcionális főgörbűletek értéke -1 . Ugyanakkor a normálvektorok skalárnégyzete minden G^+ -beli pontnál pozitív, ezért a szekcionális görbűletek 1 -el egyenlők. A Ricci görbület minden pontban és irányban $(n-2)$, és a skalár görbület minden pontban egyenlő $\binom{n-1}{2}$ -vel, ezért a következő tételt kapjuk:

A.3.5. Tétel. *Ha S folytonosan differenciálható s.i.p tér, a G de Sitter gömb pozitív konstans görbülettel rendelkezik.*

Ezen tétel alapján G -t pozitív konstans görbületű elő-sokaságnak tekinthetjük és találó rá az *elő-gömb* elnevezés. .

A.3.3. A fénykúp

Az L fénykúp belső geometriája szintén meghatározható. Jelölje L^+ a kettős kúp pozitív részét, melyet az

$$l(s) = s + \sqrt{[s, s]}e_n$$

függvény ír le. Ha S egyenletesen folytonos s.i.p. tér, akkor az s pontbeli érintő vektorok

$$u = \alpha(e + \|\cdot\|'_e(s)e_n) = \alpha\left(e + \frac{[e, s]}{\sqrt{[s, s]}}e_n\right)$$

alakúak. Eképpen minden érintő vektor merőleges $l(s)$ -re; továbbá a lehetséges $e = s^0$, $\alpha = \|s\|$ választás miatt $l(s)$ is érintő vektor. Azonban egy fényszerű vektor ortogonális komplementere egy s.i.p. térben egy $(n-1)$ -dimenziós degenerált altér, ami a vektort tartalmazza.¹⁷ Így az érintő-hipersíkok minden L^+ -beli pontban egy $(n-1)$ -dimenziós V -beli degenerált altér. Vegyük észre, hogy az ez által létrejövő egyik féltér tartalmazza L^+ -t a másik L^- -t. Valóban ha $v = s + t$ és $w = s' + t'$ akkor

$$[w - v, v]^+ = [s', s] + [t', t] = [s', s] - \lambda'\lambda,$$

ahol $t' = \lambda'e_n$, $t = \lambda e_n$, $s', s \in S$ a pozitív λ' és λ konstansokkal. Mivel

$$\sqrt{[s', s']} = \lambda' \text{ és } \sqrt{[s, s]} = \lambda$$

így

$$[w - v, v]^+ = [s', s] - \sqrt{[s', s']}\sqrt{[s, s]} \leq 0$$

a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség miatt áll fenn. Jegyezzük meg, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $s' = \alpha s$. Azaz egyetlen félegyenese van L^+ -nak, ami a T_v érintő hipersíkjához tartozik. Ezért a fénykúp konvex, következésképpen a második alapformája szemidefinit kvadratikus alak. Mivel a többi vektor az érintő-hipersíkban térszerű, ezért két típusú két-dimenziós érintő síkot találunk benne; az egyik térszerű vektorokat tartalmaz csak, a másik tartalmaz egy kétszeresen számítható fényszerű egyenest is. Az első esetben, a megfelelő szekcionális főgörbületek jól definiáltak, értékük negatív. Meghatározásukhoz számítsuk ki az alapformákat.

¹⁷ Á. G. Horváth: *Semi-indefinite inner product and generalized Minkowski spaces*. Journal of Geometry and Physics **60** (2010) 1190–1208. Th. 7

Megint feltesszük, hogy S folytonosan differenciálható, így az első alap forma

$$I = [\dot{c}, \dot{c}] - \frac{\left([\dot{c}(t), c(t)] + [c(t), \cdot]'_{\dot{c}(t)}(c(t))\right)^2}{4[c(t), c(t)]} = [\dot{c}, \dot{c}] - \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{[c(t), c(t)]},$$

a második pedig

$$II = -[\dot{c}(t), \cdot]'_{\dot{c}(t)}(c(t)) + \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{[c(t), c(t)]} = -[\dot{c}(t), \dot{c}(t)] + \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{[c(t), c(t)]} = -I.$$

A szekcionális főgörbűletek tehát -1 -el egyenlők mint az egység gömbök esetén. Azonban minden pontnál a szekcionális görbűlet zéró, mert a normál vektor szintén zéró hosszúságú. A fenti számolás a második esetben is alkalmazható. Megegyezve abban, hogy csak nem fényszerű irányban számoljuk az alap formákat, akkor a szekcionális főgörbűletek értéke -1 és a szekcionális görbűlet nulla. Azaz a Ricci és skalár görbűletek szintén nullák. Kaptuk:

A.3.6. Tétel. *Ha S folytonosan differenciálható s.i.p tér az L^+ fénykúp görbűlete nulla.*

Eképpen L egy olyan elő-sokaság, melynek szekcionális, Ricci és skalár görbűletei egyaránt nullák, joggal nevezhetjük *elő-euklidészi* térnek.

A.3.4. A beágyazó $(V, [\cdot, \cdot]^-)$ tér egységgömbje

Legyen K azon pontok halmaza, melyek a beágyazó s.i.p. tér egységgömbjét alkotják. K megint nem hiperfelület, ezért bevezetjük ennek az idő tengely szerinti pozitív darabját K^+ -t:

$$K^+ = \{s + t \in K : t = \lambda e_n \text{ where } \lambda > 0\}.$$

A K^+ definiáló függvénye

$$k(s) = s + \mathfrak{k}(s)e_n,$$

ahol

$$\mathfrak{k}(s) = \sqrt{1 - [s, s]} \text{ olyan } s\text{-ekre, melyekre } [s, s] < 1.$$

$[s, s] < 1$ esetén, a

$$\mathfrak{k} : s \mapsto \sqrt{1 - [s, s]}$$

függvény iránymenti deriváltjai adják az érintővektorokat most is. Ezek általános alakja:

$$u = \alpha(e + \mathfrak{k}'_e(s)e_n).$$

Mivel a

$$\mathfrak{h} : s \mapsto \sqrt{1 + [s, s]},$$

függvénnyel teljesül az

$$\mathfrak{h}^2(s) + \mathfrak{k}^2(s) = 2$$

egyenlőség, a keresett derivált az $e \in S$ egységvektor irányában:

$$\mathfrak{k}'_e(s) = -\frac{[e, s]}{\sqrt{1 - [s, s]}}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$[u, u]^+ = \alpha^2 \left(1 - \frac{[e, s]^2}{(1 - [s, s])} \right) = \alpha^2 \frac{1 - [s, s] - [e, s]^2}{1 - [s, s]}.$$

Mostmár közvetlenül látjuk, hogy

$$\begin{aligned} [u, u]^+ &> 0 && \text{ha } 1 - [s, s] > [e, s]^2 \\ [u, u]^+ &= 0 && \text{ha } 1 - [s, s] = [e, s]^2 \\ [u, u]^+ &< 0 && \text{ha } 1 - [s, s] < [e, s]^2. \end{aligned}$$

Azaz az s -re merőleges $(n - 2)$ -dimenziós altér s' vektora térszerű érintő vektort definiál és az αs vektorhoz tartozók időszerű vektorokat adnak.

Mint a képzetes egységgömb esetében megint igazolhatjuk, hogy:

A.3.7. Tétel. K^+ konvex. Továbbá ha S szigorúan konvex akkor K^+ szintén szigorúan konvex.

Bizonyítás: Legyen $w = s' + t'$ a K^+ egy pontja és tekintsük a

$$[w - v, n_v]^+ = [s' - s, s''] + [t' - t, t''] = [s', s''] - [s, s''] - (\lambda' - \lambda)\lambda''$$

szorzatot, ahol $t'' = \lambda''e_n$, $t' = \lambda'e_n$, $t = \lambda e_n$ és $s'', s', s \in S$ valamely pozitív λ'', λ' és λ valós számokkal. Mivel

$$\sqrt{1 - [s', s']} = \lambda' \text{ és } \sqrt{1 - [s, s]} = \lambda$$

ugyanakkor

$$n_v = s - \sqrt{1 - [s, s]}e_n$$

ezért

$$\begin{aligned} [w - v, n_v]^+ &= [s', s] + \sqrt{1 - [s', s']} \sqrt{1 - [s, s]} - 1 \leq \\ &\leq \sqrt{[s', s][s, s]} + \sqrt{1 - [s', s']} \sqrt{1 - [s, s]} - 1 \leq 0, \end{aligned}$$

mivel

$$2\sqrt{[s', s'] [s, s]} \leq [s', s'] + [s, s].$$

Jegyezzük meg, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha s' és s normája egyenlő. Azaz fennáll a következő egyenlőség

$$[s', s] - [s, s] = 0,$$

vagy ekvivalens megfelelője:

$$[s', s] = \sqrt{[s', s'] [s, s]}.$$

Az is adódik tehát, hogy v pontosan akkor az egyetlen közös pontja a K^+ és a T_v halmazoknak, ha S szigorúan konvex. $\square$

A k függvény segítségével kiszámolhatjuk az első alap formát:

$$I = [\dot{c}(t), \dot{c}(t)] - [(\mathfrak{k} \circ c)'(t)]^2.$$

Korábbi összefüggéseinket megint alkalmazva adódik:

$$I = [\dot{c}, \dot{c}] - \frac{\left([\dot{c}(t), c(t)] + [c(t), \cdot]_{\dot{c}(t)}'(c(t))\right)^2}{4(1 - [c(t), c(t)])} = [\dot{c}, \dot{c}] - \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{1 - [c(t), c(t)]},$$

és feltéve a $2[c(t), c(t)] \neq 1$ egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} II &= \left[\ddot{c}(t) + (\mathfrak{k} \circ c)''(t)e_n, \frac{c(t) - (\mathfrak{k} \circ c)(t)e_n}{\sqrt{|-1 + 2[c(t), c(t)]|}} \right]_{(\mathfrak{k} \circ c)(t)}^+ = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|-1 + 2[c(t), c(t)]|}} ([\ddot{c}(t), c(t)] + (\mathfrak{k} \circ c)''(t)\mathfrak{k}(c(t))). \end{aligned}$$

Tovább számolva

$$\begin{aligned} (\mathfrak{k} \circ c)''(t)\mathfrak{k}(c(t)) &= -[\dot{c}(t), c(t)]' + \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{1 - [c(t), c(t)]} = \\ &= -([\ddot{c}(t), c(t)] + [\dot{c}(t), \cdot]_{\dot{c}(t)}'(c(t))) + \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{1 - [c(t), c(t)]}, \end{aligned}$$

ezért

$$II = \frac{1}{\sqrt{|-1 + 2[c(t), c(t)]|}} \left(-[\dot{c}(t), \cdot]_{\dot{c}(t)}'(c(t)) + \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{1 - [c(t), c(t)]} \right).$$

Ha S -ről feltesszük a folytonos differenciálhatóságot is akkor adódik, hogy

$$\begin{aligned} \text{II} &= \frac{1}{\sqrt{|-1 + 2[c(t), c(t)]|}} \left(-[\dot{c}(t), \dot{c}(t)] + \frac{[\dot{c}(t), c(t)]^2}{-1 + [c(t), c(t)]} \right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|-1 + 2[c(t), c(t)]|}} \text{I.} \end{aligned}$$

Így a $k(c(t))$ pontban vett szekcionális főgörbűletek

$$\rho_{\max}(u, v) = \rho_{\min}(u, v) = -\frac{1}{\sqrt{|-1 + 2[c(t), c(t)]|}}$$

ezért a

$$\kappa(u, v) := [n^0(c(t)), n^0(c(t))]^+ \rho(u, v)_{\max} \rho(u, v)_{\min} = \frac{1}{-1 + 2[c(t), c(t)]}$$

szekcionális görbűleteket kapjuk. A $k(c(t))$ pontban minden irányban a Ricci görbűletre

$$\text{Ric}(v)_{k(c(t))} := (n - 2) \cdot E(\kappa_{k(c(t))}(u, v)) = \frac{n - 2}{-1 + 2[c(t), c(t)]}$$

adódik és a skalár görbűlet $k(c(t))$ -ben

$$\Gamma_{k(c(t))} := \binom{n-1}{2} \cdot E(\kappa_{f(c(t))}(u, v)) = \frac{\binom{n-1}{2}}{-1 + 2[c(t), c(t)]}.$$

Végül jegyezzük meg, hogy a K^+ azon pontjaiban, melyekre az $2[c(t), c(t)] = 1$ egyenlőség teljesül, a görbűletek a fénykúp esetének mintájára számolhatóak és nullának tekinthetők.

A.4. Elő-sokaságok az általánosított téridő modellben

Mintahogy a fentiekben kimutattuk az előző fejezet elő-sokaságainak T_v -vel jelölt érintőterei, olyan fél-metrikus tereknek tekinthetők, ahol a fél-metrika a Minkowski szorzásból származik. Emlékeztetünk arra, hogy a Minkowski szorzat nem teljesíti a Cauchy-Schwartz egyenlőtlenséget, ezért az általa indukált távolság függvény nem teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget, azaz nem metrika hanem csak fél-metrika. Azonban egy fél-metrika léte az

érintő-hipersíkokon elegendő a sokaság számára, hogy azon egy valódi távolság fogalmat indukáljon.¹⁸ Ehhez persze szükséges, hogy a vizsgált sokaság elegendően sima legyen. Érdekes összevetni néhány – a differenciálgeometriában sokat használt – beágyazott sokaságokkal kapcsolatos fogalmat. A centrális fogalom a felület mint Riemann sokaság fogalma. Ennek az érintő-hipersíkjaiban klasszikus skaláris szorzat által indukált metrikát feltételezünk, ami a felület belső geometriájára nézve egy új távolság fogalmat a Riemann metrika fogalmát adja. Kicsit általánosabb de sokkal messzebbre nem vezető fogalom a Finsler sokaság fogalma, amikor a megfelelő simasági feltételek megtartása mellett az érintő-hipersíkokat normával látjuk el, ez származtatja mind az érintő-hipersík, mind a felület metrikáját, ezen utóbbit Finsler metrikának nevezzük. Végül ha megőrizük az érintő-hipersíkokon a szorzat függvény bilinearitását és komplex vagy valós szimmetriáját, és elvetjük a pozitív definitiség tulajdonságát, akkor az u.n. szemi-Riemann sokasághoz jutunk, melynek érintőterein egy pseudo-euklidészi metrika uralkodik, és ez definiál a sokaságon egy új metrikát a szemi-Riemann metrikát. A belső metrikák azonos módszerrel vannak definiálva, ezen módszer az ívhosszat számító integrál érvényességén és annak alaptulajdonságain alapul. Az általánosított téridő modell keretein belül is lehetőségünk van egy ilyen metrika felépítésére, mely specializálódhat az említett három fontos metrikává.

A.4.1. Ívhossz, görbület, Meusnier-tétel

A fejezetben végig feltesszük, hogy a s.i.p. S -en folytonosan differenciálható.

A.4.1. Definíció. Legyen F egy általánosított tér-idő modell hiperfelülete. Tekintsük az egyformán irányított darabonként folytonosan differenciálható azon

$$(f \circ c)(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

F -beli görbék $\Gamma_{p,q}$ halmazát, melyek p -ből indulnak és q -ba érkeznek. Ekkor ezen pontok elő-távolsága legyen

$$\rho(p, q) = \inf \left\{ \int_a^b \sqrt{|I_{(f \circ c)(x)}|} dx \text{ for } f \circ c \in \Gamma_{p,q} \right\}.$$

Könnyen látható, hogy az elő-távolság kielégíti a háromszögegyenlőtlenséget; azaz F -en metrika. Egy olyan hiperfelületen, ahol minden érintővektor

¹⁸ L. Tamássy: *Finsler spaces corresponding to distance spaces*. Proc. of the Conf., Contemporary Geometry and Related Topics, Belgrade, Serbia and Montenegro, June 26–July 2, (2005), 485–495.

térszerű az abszolút érték jel szükségtelen, ezen hiperfelületeket térszerűnek nevezzük. Ilyen például a képzetes egységgyömb. Vezessük be azon $f \circ c$ görbék $l_a(\tau)$ ívhossz függvényét, melyeken a fényszerű pontok zárt, nullmértékű halmazt adnak az

$$l_a(\tau) = \int_a^\tau \sqrt{|[D(f \circ c)(x), D(f \circ c)(x)]^+_{f(c(x))}|} dx = \int_a^\tau \sqrt{|I_{f(c(x))}|} dx$$

formulával. Csak azokat a pontokat lássuk el paraméterrel, amelyekben az érintővektor nem fényszerű. Ekkor kapunk egy jól-definiált új paraméterezést, mely mellett egyaránt érvényes a:

$$(l_a(\tau))' = \sqrt{|I_{f(c(\tau))}|},$$

formula, illetve a $\tau(l_a) : [0, \varepsilon) \rightarrow [a, l_a^{-1}(\varepsilon))$ inverz függvényre vonatkozó

$$(\tau(l_a))' = (l_a^{-1}(\tau))' = \frac{1}{\sqrt{|I_{f(c(\tau(l_a)))}|}}$$

összefüggés is.

A.4.1. Tétel. *Tekintsük egy hiperfelület valamelyik ívhosszal rendelkező görbét, ez persze megfelel egy V -beli vektormezőnek. Ha az ívhossz szerint paraméterezzük, akkor az első derivált vektormező vektorainak abszolútértéke 1, továbbá a második deriváltak vektormezője Minkowski szorzatra vonatkozóan merőleges az első deriváltak vektormezőjére.*

Bizonyítás: Definíció szerint az érintővektorok nem fényszerűek. Ezért a vizsgált differenciahányados

$$\begin{aligned} D((f \circ c) \circ (\tau(l_a))) &= D(f \circ c) \circ (\tau(l_a)) \cdot (\tau(l_a))' = \\ &= D(f \circ c) \circ (\tau(l_a)) \frac{1}{\sqrt{|I_{f(c(\tau(l_a)))}|}}, \end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$\begin{aligned} [D((f \circ c) \circ (\tau(l_a))), D((f \circ c) \circ (\tau(l_a)))]^+ &= \\ &= \frac{I_{f(c(\tau(l_a)))}}{|I_{f(c(\tau(l_a)))}|} = \text{sign}(I_{f(c(\tau(l_a)))}). \end{aligned}$$

A további deriváláshoz szükséges lesz kiszámítani a

$$D(D((f \circ c) \circ (\tau(l_a))))$$

kifejezést. Az A.2.3 Lemma alapján kapjuk, hogy

$$D\left(\sqrt{|\mathbf{I}_{f(c(\tau(l_a)))}|}\right) = \frac{\text{sign}(\mathbf{I}_{f(c(\tau(l_a)))})}{2\sqrt{|\mathbf{I}_{f(c(\tau(l_a)))}|}} \left\{ \frac{[D^2(f \circ c) \circ (\tau(l_a)), D(f \circ c) \circ (\tau(l_a))]}{\sqrt{|\mathbf{I}_{f(c(\tau(l_a)))}|}} + \right. \\ \left. + [D(f \circ c) \circ (\tau(l_a)), \cdot]'_{D((Df \circ c) \circ \tau(l_a))}(D(f \circ c) \circ (\tau(l_a))) \right\},$$

és a folytonos differenciálhatóságot is felhasználva az A.2.2 Tétel szerint ebből

$$[D(f \circ c) \circ (\tau(l_a)), \cdot]'_{D((Df \circ c) \circ \tau(l_a))}(D(f \circ c) \circ (\tau(l_a))) = \\ = \frac{[D^2(f \circ c) \circ (\tau(l_a)), D(f \circ c) \circ (\tau(l_a))]}{\sqrt{|\mathbf{I}_{f(c(\tau(l_a)))}|}}$$

adódik. A keresett differenciálhányados tehát:

$$D\left(D(f \circ c) \circ (\tau(l_a)) \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{I}_{f(c(\tau(l_a)))}|}}\right) = \frac{D^2(f \circ c) \circ (\tau(l_a))}{|\mathbf{I}_{f(c(\tau(l_a)))}|} - \\ - \text{sign}(\mathbf{I}_{f(c(\tau(l_a)))}) \frac{[D^2(f \circ c) \circ (\tau(l_a)), D(f \circ c) \circ (\tau(l_a))]}{(\mathbf{I}_{f(c(\tau(l_a)))})^2} D(f \circ c) \circ (\tau(l_a)).$$

Mostmár láthatjuk, hogy

$$\left[D\left(D(f \circ c) \circ (\tau(l_a)) \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{I}_{f(c(\tau(l_a)))}|}}\right), D(f \circ c) \circ (\tau(l_a)) \right] = 0$$

teljesül, ahogy azt állítottuk. $\square$

A belső metrika meghatározza az elő-sokaság geodetikusait a szokásos módon. Bevezethetjük a *sebesség* illetve *gyorsulás vektormezőket* mint az első illetve második derivált vektormezőket. A geodetikusok most az Euler-Lagrange differenciálegyenlet megoldásaiként definiálhatók, a görbe görbület függvénye pedig az ívhossz szerinti második derivált abszolútértékével, pontosabban:

A.4.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \circ c$, C^2 osztálybeli görbe (amely érintő vektorai majdnem mindenütt nem-fényszerűek) egy geodetikus a F hiperfelületnek, ha a gyorsulási vektorok vektormezeje merőleges az F -beli érintőhipersíkra a görbe minden pontjában. Azaz létezik egy $\alpha(\tau(l_a)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ -val jelölt függvény úgy, hogy

$$D(D((f \circ c) \circ (\tau(l_a)))) = \alpha(\tau(l_a))(n^0 \circ c)(\tau(l_a)).$$

áll fenn az értelmezési tartomány pontjaiban. Az $f \circ c$ görbe görbület függvénye a

$$\begin{aligned}\gamma_{f \circ c}(\tau(l_a)) &:= \sqrt{|[D(D((f \circ c) \circ (\tau(l_a))))], D(D((f \circ c) \circ (\tau(l_a))))]^+|} = \\ &= |\alpha(\tau(l_a))|\end{aligned}$$

nem-negatív függvény.

Ha a görbület függvény nem-nulla, akkor definiálni tudjuk az $(m \circ c)(\tau(l_a))$ vektort a következő egyenlőséggel:

$$(m \circ c)(\tau(l_a)) = \frac{D(D((f \circ c) \circ (\tau(l_a))))}{\gamma_{f \circ c}(\tau(l_a))}.$$

Ebből azonnal következik, hogy

$$\begin{aligned}&[(m \circ c)(\tau(l_a)), (m \circ c)(\tau(l_a))]^+ = \\ &= \frac{[D(D((f \circ c) \circ (\tau(l_a))))], D(D((f \circ c) \circ (\tau(l_a))))]^+}{\gamma_{f \circ c}^2(\tau(l_a))}.\end{aligned}$$

Használva a

$$\begin{aligned}D(D((f \circ c) \circ (\tau(l_a)))) &= D\left(D(f \circ c) \circ (\tau(l_a)) \frac{1}{\sqrt{|I_{f(c(\tau(l_a)))|}}}\right) = \\ &= \frac{D^2(f \circ c) \circ (\tau(l_a))}{|I_{f(c(\tau(l_a)))|}} - \\ &- \text{sign}(I_{f(c(\tau(l_a)))}) \frac{[D^2(f \circ c) \circ (\tau(l_a)), D(f \circ c) \circ (\tau(l_a))]}{(I_{f(c(\tau(l_a)))})^2} D(f \circ c) \circ (\tau(l_a)),\end{aligned}$$

egyenlőséget és a $D(f \circ c)$ illetve $n^0 \circ c$ vektorok merőlegességét, adódik a Meusnier tétel megfelelője:

$$\gamma_{f \circ c}(\tau(l_a))[(m \circ c)(\tau(l_a)), (n^0 \circ c)(\tau(l_a))]^+ = \left[\frac{D^2(f \circ c) \circ (\tau(l_a))}{|I_{f(c(\tau(l_a)))|}}, (n^0 \circ c)(\tau(l_a)) \right]^+.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\gamma_{f \circ c}(\tau(l_a))[(m \circ c)(\tau(l_a)), (n^0 \circ c)(\tau(l_a))]^+ = \frac{\Pi_{f(c(\tau(l_a)))}}{|I_{f(c(\tau(l_a)))|}}.$$

Az egyenlőséget szorzat alakban felírva, kapjuk, hogy

$$\gamma_{f \circ c}(\tau(l_a))[(m \circ c)(\tau(l_a)), (n^0 \circ c)(\tau(l_a))]^+ |I_{f(c(\tau(l_a)))|} = \Pi_{f(c(\tau(l_a)))},$$

mely alak a fényszerű vektorok esetén is érvényes marad, ha a gyorsulási vektorok hosszát ilyen esetben nullának választjuk. Geodetikus görbére az

$$[(m \circ c)(\tau(l_a)), (m \circ c)(\tau(l_a))]^+ = \frac{(\alpha(\tau(l_a)))^2}{(\gamma_{f \circ c}(\tau(l_a)))} [(n^0 \circ c)(\tau(l_a)), (n^0 \circ c)(\tau(l_a))]^+,$$

egyenlőség azt mutatja, hogy az $m \circ c$ illetve $n^0 \circ c$ vektorok ugyanolyan típusúak:

$$m \circ c = \text{sign}(\alpha(\tau(l_a)))(n^0 \circ c).$$

Így a Meusnier tétel a következő alakra egyszerűsíthető:

$$\alpha(\tau(l_a))[(n^0 \circ c)(\tau(l_a)), (n^0 \circ c)(\tau(l_a))]^+ |I_{f(c(\tau(l_a)))}| = \Pi_{f(c(\tau(l_a)))}.$$

Evvel ekvivalens a következő forma:

$$\begin{aligned} \alpha(\tau(l_a)) &= [(n^0 \circ c)(\tau(l_a)), (n^0 \circ c)(\tau(l_a))]^+ \frac{\Pi_{f(c(\tau(l_a)))}}{|I_{f(c(\tau(l_a)))}|} = \\ &= [(n^0 \circ c)(\tau(l_a)), (n^0 \circ c)(\tau(l_a))]^+ \text{sign}(I_{f(c(\tau(l_a)))}) \rho(D(f \circ c)). \end{aligned}$$

Ha az érintővektorok térszerűek, a normálvektorok pedig időszerűek, akkor egy kétdimenziós altéren az

$$\alpha(\tau(l_a)) = -\rho(D(f \circ c))$$

függvény szélsőértékei a szekcionális főgörbűletek mínusz egyszeresei. Az alapformák homogenitása miatt ezen függvények vizsgálatát elvégezhetjük egy olyan részhalmazon a síknak, melyen az összes szükséges érték fellép. Használhatjuk például az egységkörvonalat ilyen halmaznak. Ez kompakt ezért ezen a függvény felveszi a szélsőértékeit legalább két egységvektorhoz tartozó pontban. Ha a hiperfelület konvex is akkor a szélsőértékek előjele egyenlő, ezért a szekcionális főgörbűletek előjele megegyezik, ahonnan látjuk, hogy a szekcionális görbűlet negatív. (Vessük össze az előző fejezetben szereplő konkrét értékekkel, a képzetes egységgömb illetve a beágyazó tér egységgömbjének esetével!)

Ha a vizsgált két-dimenziós érintősík tartalmaz két fényszerű, és emellett persze időszerű vektorokat is, akkor a fenti függvény vizsgálatát szorítsuk meg a két egységkör (az imaginárius és a de Sitter féle) és a két fényszerű egyenes pontjaira. Hagyjuk el a fényszerű vektorokhoz tartozó pontokat és határozzuk meg a szélsőértékeket a két egységkörösre külön-külön. Például, ha az előjele az $\alpha(\tau(l_a))$ és $I_{f(c(\tau(l_a)))}$ függvényeknek egyenlő, és a normál vektor térszerű, akkor a szekcionális főgörbűleteknek ugyanaz az előjele, azaz pozitív értéket adnak. Ekkor a szekcionális görbűlet pozitív. (Vessük össze a de Sitter gömb esetével!)

A.4.2. H^+ izometriái

Egy általánosított téridő modellben a hiperfelületeket geometriai szempontból háromféleképpen tekinthetjük, ugyanúgy, mint az indefinit skalárszorzatos esetben. Tekinthejük mint egy s.i.p. térbe szépen beágyazott struktúrát, mint differenciálgeometriai értelemben vett elő-sokaságot, ahol a halmazhoz automatikusan hozzágondoljuk az érintőterek nyalábját, vagy mint egy metrikus teret, ahol persze a metrika konkrét megadása alapul némi klasszikus differenciálgeometrián. Mindhárom esetben beszélhetünk izometriáról, attól függően, hogy a felépítés mely pontján garantáljuk a végső távolság függvény invarianciáját. Alapvetően a távolság a Minkowski szorzattól függ, tehát biztosan invariáns lesz egy olyan leképezés mellett, mely a Minkowski szorzatot őrzi. Ez motiválja az első definíciót:

A.4.3. Definíció. *A H hiperfelület egy lineáris izometriája egy olyan*

$$F : V \longrightarrow V \text{ lineáris leképezés } f : H \longrightarrow H$$

megszorítása H -ra, amely megőrzi a Minkowski szorzatot és H -t saját magára képezi.

Jegyezzük meg, hogy egy ilyen izometria az S altér és annak $F(S)$ képe között is izometriát létesít azaz ezen képaltér is egy s.i.p. tér a rá megszorított Minkowski szorzatra vonatkozóan. Világos, hogy a szorzat invarianciája erősebbnek tűnő megszorítás mint a vektorok és képek normájának egyenlősége. Ezen az úton azonban nem tudjuk lazítani a definíciót, mert Koehler igazolta¹⁹, hogy sima Banach tér egy leképezése pontosan akkor izometria, ha a s.i.p. szorzatot őrzi.

Koehler azt is igazolja, hogy ha Riesz-Fischer reprezentációs tétel teljesül egy normált térben, akkor minden korlátos lineáris A operátorhoz megadható egy A^T -al jelölt általánosított adjungált leképezés, melyre az

$$[A(x), y] = [x, A^T(y)] \quad \forall \quad x, y \in V$$

egyenlőség definiál. Ez szokásos Hilbert terekben a szokásos adjungált operátort jelenti. Normált térben az adjungált leképezés nem marad lineáris de továbbra is fennmarad pár érdekes tulajdonsága. A Koehler által igazolt tételek sima egyenletesen konvex Banach terekre érvényesek. Az egyenletes konvexitásból következik a szigorú konvexitás. Azonban minden szigorúan

¹⁹ Koehler D. O.: *A note on some operator theory in certain semi-inner-product spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **30(2)** (1971) 363–366.

konvex véges-dimenziós Banach tér egyenletesen konvex²⁰ ezért a továbbiakhoz nekünk elegendő azt feltennünk, hogy S szigorúan konvex sima Banach tér a rajta értelmezett s.i.p-re nézve.

Igazoljuk a H képzetes egységgömb lineáris izometriáiról a következő tételt:

A.4.2. Tétel. *Legyen V általánosított téridő modell, mely S altere szigorúan konvex, sima normált tér az s.i.i.p által indukált s.i.p.-re nézve. Ekkor $\{V, [\cdot, \cdot]^- \}$ szintén sima és szigorúan konvex. Legyen F^T az F általánosított adjungáltja a $\{V, [\cdot, \cdot]^- \}$ s.i.p. térre nézve és definiáljuk a $J : V \longrightarrow V$ involúciót a $J|_S = id|_S$, $J|_T = -id|_T$ egyenlőségekkel. Ekkor az $F|_H = f : H \longrightarrow H$ leképezés a H^+ -nak pontosan akkor lineáris izometriája, ha invertálható és kielégíti az:*

$$F^{-1} = JF^T J,$$

egyenlőséget, és e_n -t a H^+ egy pontjába képezi.

Bizonyítás: Az első állítás bizonyításához vegyük észre, hogy az

$$1 = [s + t, s + t]^- = [s, s] - [t, t] = [s, s] + \|t\|^2$$

egyenlőség alapján a két egységgömb egyszerre sima. A szigorú konvexitáshoz tekintsük a

$$[s + t, s' + t']^- = \|s + t\|^- \|s' + t'\|^-.$$

egyenlőséget. Mivel $\dim T = 1$, feltehetjük, hogy $t' = \lambda t$ valamilyen valós λ -ra. Azaz kapjuk a

$$[s, s][s', s'] = [s, s']^2 + [t, t]([s', s'] - 2\lambda[s, s'] + \lambda^2[s, s])$$

egyenlőséget. A Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség szerint

$$[s', s'] - 2\lambda[s, s'] + \lambda^2[s, s] \geq \left(\sqrt{[\lambda s, \lambda s]} - \sqrt{[s', s']} \right)^2 \geq 0,$$

és ezért

$$0 \leq [s, s']^2 \leq [s, s][s', s'] = [s, s']^2 + [t, t]([s', s'] - 2\lambda[s, s'] + \lambda^2[s, s]) \leq [s, s']^2,$$

amiből

$$[t, t]([s', s'] - 2\lambda[s, s'] + \lambda^2[s, s]) = 0$$

²⁰ Wilansky, A.: *Functional Analysis*. Blaisdell, New York 1964.

következik. Ha $[t, t] = 0$, akkor $t = t' = 0$, és az S szigorú konvexitásából, adódik, hogy valamely valós $\mu > 0$ -val $s' = \mu s$. Erre a μ -re $s' + t' = \mu(s + t)$ is teljesül. Ezért feltehető, hogy $[t, t] \neq 0$, és igaz

$$[s, s][s', s'] = [s, s']^2 \text{ ugyanúgy mint } ([s', s'] - 2\lambda[s, s'] + \lambda^2[s, s]) = 0.$$

Azonban S szigorúan konvex tér. Ezért, nem nulla s -re van olyan valós $\mu > 0$, amire $s' = \mu s$. Azaz megint következik

$$0 = (\mu - \lambda)^2[s, s],$$

ahonnan $\mu = \lambda$ és $s' + t' = \mu(s + t)$. Használva a szigorú konvexitás szükséges és elégséges feltételét adódik, hogy a beágyazó tér is szigorúan konvex.

Legyen $F: H^+ \rightarrow H^+$ egy lineáris izometriája. Világos, hogy a J operátor a Minkowski szorzatot a beágyazó tér s.i.p.-jébe transzformálja. Pontosabban, teljesül, hogy

$$[v, w]^+ = [v, Jw]^+.$$

Az általánosított adjungált létezik, tehát írhatjuk, hogy

$$[v, Jw]^+ = [v, w]^+ = [Fv, Fw]^+ = [Fv, JFw]^+ = [v, F^T JFw]^+$$

teljesül, minden v, w vektor párra. A beágyazó tér nem-degenerált; ezért vagy a $J = F^T JF$, vagy a vele ekvivalens $F^{-1} = JF^T J$ egyenlőséghez jutunk. Az F definíciója szerint az utolsó F -re vonatkozó feltétel is teljesül.

Fordítva, ha F egy olyan lineáris leképezés, ami kielégíti a tétel feltételeit, akkor őrzí a Minkowski szorzatot. Valóban,

$$[Fv, Fw]^+ = [Fv, JFw]^+ = [v, F^T JFw]^+ = [v, Jw]^+ = [v, w]^+.$$

A H hiperboloidot homeomorf módon képezi magára, azaz a köpenyek köpenybe mennek. Az utolsó feltételünk garantálja, hogy $F(H^+) = H^+$ és ezért F a H^+ egy lineáris izometriáját indukálja. $\square$

A.4.1. Megjegyzés. Ahogy az előző tétel formulája mutatja H^+ minden lineáris izometriájának általánosított adjungáltja lineáris leképezés. Szintén fontos észrevétel, hogy a fenti tétel speciális esetként kiadja a hiperbolikus tér izometriáiról szóló analóg tételt, elegendő s.i.p helyett i.i.p-t tekinteni.

A második lehetőség az izometria fogalmának bevezetésére az érintő hipersíkok fogalmához kapcsolható. Mielőtt kimondjuk a definíciót értelmezzük a a hiperfelület egy f diffeomorfizmusára vonatkozó $f^*(I)$ visszahúzás (pull-back) leképezést, mely az érintő terek metrikáját felelteti meg egymásnak az f leképezés segítségével.

A.4.4. Definíció. Legyen $f : H \longrightarrow H$ diffeomorfizmus, ekkor az első alapforma f szerinti visszahúzottját (pullback-jét) $f^*(I)$ -t értelmezze a minden $v \in H$ $u_1, u_2 \in T(v)$ hármásra teljesülő

$$f^*(I)_v(u_1, u_2) := I_{f(v)}(Df(u_1), Df(u_2))$$

egyenlőség.

A visszahúzás lényege, hogy az f szerinti képpont érintőterének metrikáját a kiindulási pont érintőterének egy f -től függő metrikájába viszi. A második izometria fogalom ezen metrikák invarienciáját célozza.

A.4.5. Definíció. Az általánosított téridő modell hiperfelületének valamely diffeomorfizmusát sokaság (Minkowski-Finsler) izometriának nevezzük, ha az általa definiált visszahúzott leképezésre az érintő-hipersíkok metrikája invariáns, azaz $f^*(I)_v(u_1, u_2) = I_v(u_1, u_2)$ teljesül minden $v \in H$ és $u_1, u_2 \in T(v)$ esetén.

Belátjuk, hogy lineáris izometria egyben sokaság izometria is. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy a beágyazó tér és szorzat megfelelő simasággal rendelkezik, azaz S folytonosan differenciálható s.i.p. tér. Tekintsük az első alapforma visszahúzottját a vizsgált F lineáris izometria f megszorítására vonatkozóan.

$$\begin{aligned} f^*(I)_v(u_1, u_2) &= I_{f(v)}(Df(u_1), Df(u_2)) = [Df(u_1), Df(u_2)]^+_{f(v)} = \\ &= [DF(u_1), DF(u_2)]^+_{F(v)} = [F(u_1), F(u_2)]^+_{F(v)} \end{aligned}$$

a visszahúzás definíciója és F linearitása miatt. Azonban F örzi a Minkowski szorzatot, ezért

$$[F(u_1), F(u_2)]^+_{F(v)} = [u_1, u_2]^+_v = (I)_v(u_1, u_2),$$

ahogy azt állítottuk.

Végül a harmadik lehetőség izometria definiálására közvetlenül az elő-sokaság szintjén nyílik. Ekkor olyan homeomorfizmust keresünk, mely közvetlenül a sokaság pontjainak távolságát tartja invariánsan.

A.4.6. Definíció. Az $f : H \longrightarrow H$ legyen H homeomorfizmusa a metrikája által indukált topológiára nézve. Ha f örzi a H pontpárjainak az A.4.1. Definíció szerinti elő-távolságát, akkor f -t H topológikus izometriájának nevezzük.

Világos, hogy minden sokaság izometria egyúttal topológikus izometria is, hiszen ha az integrandusok megegyeznek akkor az integrálok is. Riemann illetve Finsler terek esetén a fordított állítások is teljesülnek, tehát ezen két izometria fogalom között nincs különbség²¹. Az is igazolható, hogy pseudo-euklidészi térben modellezett hiperbolikus térre mindhárom definíció ekvivalens. Ehhez azt kell csak belátni, hogy minden topológikus izometria egyúttal lineáris izometria is. A bizonyítás alapgondolata a következő: a lineáris izometriák csoportjának tranzitív hatását felhasználva explicit módon meghatározzuk a belső metrikát a skalárszorzat segítségével. Ezen konkrét formula segítségével igazolhatjuk, hogy adott topológikus izometriának egy a beágyazó vektortér alkalmas bázisán vett hatását lineárisan kiterjesztve az egész térre olyan leképezéshez jutunk, mely a teljes H halmazon megegyezik a kiindulási topológikus izometriával. A mi esetünkben a gond az, hogy nem valószínű, hogy a lineáris izometriák csoportja tranzitívan hatna a képzetes egységgyömbön, ezért nincs általános módszerünk a pontok távolságának explicit felírására. További nehézséget jelent a lineáris kiterjesztés után annak igazolása, hogy a kapott leképezés megszorítása az egységgyömbre az eredetileg adott izomorfizmus.

Vizsgálatainkat most azzal zárjuk, hogy megadjuk az explicit távolság formulát amellet a feltétel mellett, hogy a lineáris izometriák csoportja tranzitívan hat a képzetes egységgyömbön, azaz H^+ geometriája a *lineáris izometriákra nézve homogén geometria*.

A.4.3. Tétel. *Legyen V általánosított téridő modell. Tegyük fel, hogy S szigorúan konvex és sima, továbbá, hogy a H^+ lineáris izometriái tranzitívan hatnak H^+ -n. Jelöljük az elő-távolságot $d(\cdot, \cdot)$ -vel. Ekkor igaz a következő:*

$$[a, b]^+ = -ch(d(a, b)) \text{ minden } a, b \in H^+ \text{ esetén.}$$

Bizonyítás: A távolságot őrző leképezés geodetikust geodetikusra visz. Mivel a térünk homogén feltehetjük, hogy $a = e_n$. Legyen $b \neq a$ és tekintsük az $\langle a, b \rangle$ pontokat tartalmazó a, b vektorok által kifeszített két-dimenziós síkot. A s.i.i.p. megszorítása erre a síkra egy i.i.p.; eképpen visszakaptuk a 2-dimenziós pszeudo-euklidészi térbe beágyazott egydimenziós hiperbolikus geometria esetét, ezért egy utat a -ból b -be paraméterezhetünk a következő módon:

$$c(t) = sh(\tau)e + ch(t)e_n \text{ ha } t \in [0, 1],$$

²¹ Myers, S. B., Steenrod, N.: *The group of isometries of a Riemannian manifold*. Ann. of Math. **40** (1939), 400-416.

Deng, S., Hou, Z.: *The group of isometries of a Finsler space*. Pacific J. of Math. **207/1** (2002), 149-155.

ahol $c(0) = a$ és $c(1) = b$. Egy ívnek a hossza 0-tól x -ig

$$\int_0^x \sqrt{ch^2(\tau) - sh^2(\tau)} d\tau = x,$$

mutatván, hogy egyenlőséggel elégíti ki a háromszögegyenlőtlenséget. Következésképpen geodetikus és így megadja a és $c(x)$ távolságát. Ugyanakkor az is világos, hogy

$$\begin{aligned} [a, b]^+ &= [e_n, sh(1)e + ch(1)e_n]^+ = [e_n, ch(1)e_n] = -ch(1) = \\ &= -ch(d(a, c(1))) = -ch(d(a, b)), \end{aligned}$$

ami állításunkat igazolja. □



A.3. ábra. Hermann Minkowski

A.5. Minkowski

1908 szeptember 21.-én Minkowski Cologne-i Naturforscher Versammlung c. konferencián tartott előadását a geometria „nagy pillanatai” közé kell sorolnunk. Az előadás 1920-ban megjelent angolul, Megh Nad Saha fordításában. Tisztelegve Minkowski előtt ezen előadást teljes terjedelmében idézzük.

H.MINKOWSKI: TÉR ÉS IDŐ

MEDH NAD SAHA ANGOL FORDÍTÁSA ALAPJÁN

Uraim!

Azon idő és tér fogalom, amelyet ma ki szeretnék fejteni Önök előtt, kísérleti fizikai alapokból fejlődött ki. Ebben rejlik az ereje. A tendencia radikális. Eképpen a régi fogalma a térnek önmagában, és az időnek önmagában pusztá árnyékká fog redukálódni, és csak valamiféle egysége a kettőnek őrzi meg függetlenségét.

I

Meg szeretném mutatni, hogy juthatunk a tér és idő megváltoztatott fogalmához, a mechanikából kiindulva, ahogy az manapság elfogadott, tisztán matematika megfontolásokkal. A Newton-i mechanika egyenletei kétszeres invarianciát

mutatnak, (i) változatlan alakúak, ha tér-koordináták vonatkoztatási rendszerét tetszőlegesen megváltoztatjuk, (ii) amikor egyenesvonalú egyenletes mozgást alkalmazunk rá, az idő null-pontjának helye nem játszik szerepet. Megszoktuk, hogy a geometria axiómáira mint egyszer és mindenkorra kijelölt állandókra tekintünk, amíg ritkán tekintünk a mechanikával kapcsolatos axiómákra ugyanilyen meggyőződéssel, ezért ezen két invariánst ritkán tekintjük egyszerre. Mindkettő a mechanika differenciálegyenleteinek bizonyos transzformáció csoportjait jelenti. Az első csoport létezésére úgy tekintünk mint a tér alapvető jellemvonására. Inkább elhagyjuk a második csoportot, és könnyű szívvel arra a következtetésre jutunk, hogy a fizikai megfontolások alapján soha sem tudjuk eldönteni, hogy a megmaradó térben lehet-e végül is egyenletes mozgás. Ez a két csoport függetlenül létezik egymás mellett. A teljesen heterogén jellegük elrettent attól, hogy megkíséréljük komponálni őket. Mégis a teljes komponált csoport ad lehetőséget nekünk a továbbgondolkodásra.

Szeretnénk a teljes kapcsolatot grafikus úton szemléltetni. Legyen (x, y, z) a tér derékszögű koordinátarendszere és t jelentse az időt. A felfogásunk lényege a tér és idő összekapcsolása. *Senki sem figyelt meg egy helyet hacsak nem egy bizonyos időpontban, és nem figyelte meg az időt, hacsak nem egy bizonyos helyen.* Mégis tudomásul veszem azt a dogmát, hogy az idő és tér független létezők. Egy tér-pont és egy idő-pont együttesét, azaz egy x, y, z, t négyest *világ-pont*-nak fogok nevezni. Ezen négyesek sokasága alkotja a *világot*. Négy világ-tengelyt tudok rajzolni a krétával. Minden tengely gyorsan vibráló molekulákat tartalmaz, és emellett, részét képezi valamennyi földi utazásnak, módot adva elmélkedésre. A legnagyobb absztrakció, amit a négy tengely igényel, a matematikusok körében semmi zavart sem okoz. Nem engedhetjük meg semmilyen tátongó rés létezését, fel fogjuk tenni, hogy minden helyen és minden időben létezik valami. Nem különítjük el az anyagot az elektromosságtól, ezeket egyszerűen szubsztanciákként tekintjük. A figyelmünket egy x, y, z, t *világ-pontra* irányítjuk és feltesszük, hogy olyan pozícióban vagyunk, amiből ezt a pontot fel tudjuk ismerni minden későbbi időpontban. Legyen dt a térkoordináták dx, dy, dz megváltozásához tartozó idő elem. Ekkor kapunk (mint egy képet, hogy úgy mondjam, az élet-pályáját a pontnak), – egy görbét a világban – a *világ-vonalat*, azon pontok halmazát, melyek a t paraméter értékeinek midőn azt $-\infty$ -tól ∞ változtatjuk, félreérthetetlenül megfelelnek. Úgy tűnik, hogy a teljes világ ilyen világvonalakra bomlik, és én éppen eltérhetek az álláspontomtól, ha azt mondom, hogy véleményem szerint a fizikai törvények legteljesebb kifejtése ezen vonalak kölcsönös kapcsolata útján lehetséges.

A tér és idő ezen fogalma szerint a $t = 0$ hoz tartozó (x, y, z) sokaság és a $t > 0$, $t < 0$ oldalai szétválnak. Ha az egyszerűség kedvéért fixnek tartjuk a tér és idő kezdőpontját, a mechanika első nevezett $t = 0$ -hoz tartozó transzformáció csoportja megkapható mint az x, y, z -tengelyek lehetséges elforgatásai az origó

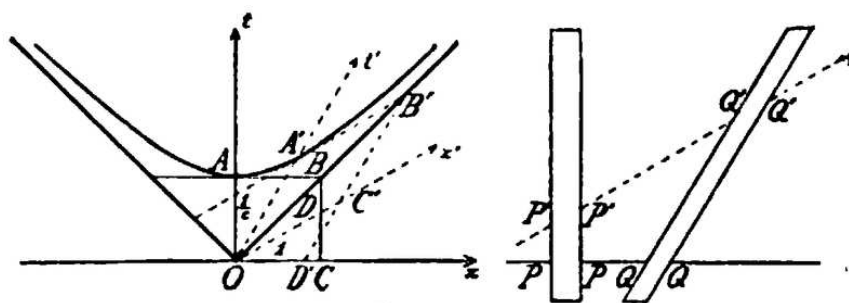
körül, amelyek megfelelnek a

$$x^2 + y^2 + z^2$$

kifejezés homogén lineáris transzformációinak. A második csoport azt jelenti, hogy a mechanikai törvények kifejezéseinek megváltoztatása nélkül helyettesíthetünk $x - \alpha t$, $y - \beta t$, $z - \gamma t$, t változókat az x, y, z változók helyett, ahol (α, β, γ) tetszőleges konstansok. Figyelemmel erre a $t > 0$ feltét bármely lehetséges irányában felvehetjük az idő-tengelyt. Mit lehet a térbeli ortogonalitás igényével kezdeni, az idő-tengely választás felső feltérben való teljes szabadsága esetén? Ennek a kapcsolatnak a felépítéséhez, válasszuk a c paramétert pozitívnak és tekintsük a

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

alakzatot.



A.4. ábra.

A kétköpenyű hiperboloid analógiája képpen ez a $t = 0$ altérrel elválasztott két részből áll. Tekintsük a felső darabot, ami a $t > 0$ tartományba esik és alkalmazunk rá egy transzformációt, mely az x, y, z, t változókat az új x', y', z', t' változóba viszi úgy, hogy a fenti kifejezés változatlan maradjon. Nyilván a tér origót fixen tartó forgatásai ezen transzformációk csoportjához tartozik. Ezen transzformációk teljes leírásához egy szemléletes képet társíthatunk, azon speciális transzformációkból, amelyeket úgy kapunk ha az (y, z) síkot változatlanak tekintjük. Rajzoljuk le az x és t tengelyek síkjával való metszetét a felső darabnak, azaz, az $c^2 t^2 - x^2 = 1$ hiperbolát az aszimptotáival (A.4 ábra).

Rajzoljuk meg az OA' sugarat, az $A'B'$ érintőt A' -ben, és egészítsük ki a három pontot egy $OA'B'C'$ paralelogrammává; messe továbbá D' -ben az x -tengelyt a $B'C'$. Ha az új tengelyeink Ox' , OA' és az egységet $OC' = 1$ $OA' = \frac{1}{c}$ összefüggésnek megfelelően választjuk, akkor ugyanez a hiperbola kifejezhető $c^2 t'^2 - x'^2 = 1$ $t' > 0$ formában is és a kapott transzformáció az általunk vizsgáltak egyike. Tetszőleges térbeli ponthoz és időbeli zérus-ponthoz csatolva egy ilyen karakterisztikus transzformációt egy c -től függő transzformáció csoportot kapunk, amelyet G_c -vel fogunk jelölni.

Tartsunk most c -vel végtelenhez. Ekkor $1/c$ a nullához tart és az ábra alapján észrevehetjük, hogy a hiperbola az x -tengelyre simul, az aszimptoták szöge pedig egyenesszöggé válik, és minden egyes transzformáció a határátmenet során változik, hogy a t -tengelynek minden lehetséges felfelé mutató iránya lehet és x' egyre inkább megközelíti x -t. Visszaemlékezve erre világos, hogy a Newtoni mechanikához tartozó teljes csoport éppen G_c a $c = \infty$ választás mellett áll elő. Ebben a helyzetben, és mivel G_c matematikai szempontból intelligensebb mint G_∞ , egy matematikusnak, a képzelet szabadságával, az a gondolata támadhat, hogy a természeti jelenségek invarianciával rendelkeznek nem csak a G_∞ csoportra de a G_c csoportra vonatkozóan is, ahol c véges, mégha rendkívül nagy is a szokásos mérő egységhez viszonyítva. Egy ilyen prekonceptió rendkívüli győzelem az elméleti matematika számára.

Ugyanakkor meg fogom jegyezni, hogy mely c érték esetén tudjuk meggyőzőnek tartani az invariancia igazságát. *c helyébe a szabad tér c fénysebességét fogjuk helyettesíteni.* Annak érdekében, hogy elkerülhessük a tér és vákum fogalmakról való beszédet, vehetjük ezt a mennyiséget mint az elektromosság elektrosztatikus és elektro-mágneses egységeinek arányát.

A következő módon tudjuk a természeti törvények G_c transzformáció-csoportra vonatkozó invarianciájának jellegét definiálni.

A természeti jelenségek összességéből, magasabb approximációval következtetni tudunk egy (x, y, z, t) koordinátarendszerre, amire vonatkozóan, a jelenséget definiált törvények reprezentálják. Ez a koordinátarendszer nem egyértelműen meghatározott a jelenség által. *A G_c transzformáció-csoportra vonatkozóan, minden lehetséges módon megváltoztatjuk a koordinátarendszert, de a természeti törvények mégse fognak változni.*

Például, az előbbi ábrához kapcsolódva, t' -t időnek hívhatjuk, de akkor a szükségképpen hozzákapcsolódó tér az $(x'yz)$ sokaság kell, hogy legyen. A fizikai törvények az x', y, z, t' paraméterekkel vannak kifejezve – és a kifejezés ugyanaz mint az x, y, z, t paraméterek esetén. Tekintettel erre, a világban nem csak egy terünk lesz, hanem sok, – analóg módon azzal, ahogy a három-dimenziós térben végtelen sok síkot találunk. A három-dimenziós geometria a négy-dimenziós fizikának egy fejezete lesz. Most már észrevehetjük, hogy miért mondtam az elején hogy ez az idő és tér pusztán árnyékká válik és egy világunk lesz, ami önmagában teljes.

II

Felmerül most a kérdés, – milyen következményekhez vezet minket a térről és időről alkotott szemlélet változása, nincsenek-e ezek ellentmondásban a megfigyelt jelenségekkel, végül jelent-e előnyt a természeti jelenségek leírásában?

Mielőtt a részletezésbe kezdenénk, egy igen fontos megjegyzést kell tennünk. Tegyük fel, hogy valamilyen módon individualizáltuk a teret és az időt; ekkor egy

t tengellyel párhuzamos világ-egyenes egy stacionárius pontnak felel meg; egy világ-egyenes, ami ferde a t -hez képest egy egyenletesen mozgó pontnak; és egy világ-görbe felel meg egy tetszőlegesen mozgó pontnak. Képzeljünk el egy világ-egyeneset, amely valamely x, y, z, t világ-ponton halad keresztül; ha azt találjuk, hogy párhuzamos az OA' hiperbola sugár vektorral, akkor be tudjuk vezetni az OA' vektort egy új idő-tengelynek, és az új idő és tér fogalomra nézve az anyag a tekintett pontban nyugalomban van. Felállítjuk a következő axiómát:

Alkalmasan választott idő és tér koordináták mellett egy adott (de tetszőlegesen választott) világ-pontban létező anyagot nyugalomba levőnek tekinthetünk. Ezen axióma azt jelenti, hogy egy világ-pontban a

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

kifejezés mindig pozitív vagy ekvivalens módon, minden V sebességnek c -nél kisebbnek kell lennie. c eképpen a felső határa lesz az anyag sebességének és eképpen adódik egy mély jelentősége a c mennyiségnek. Első benyomásra, ez az axióma kielégíthetetlennek tűnik. Nem szabad elfelejteni, hogy csak egy módosított mechanikát fogunk tekinteni, amiben a négyzetgyöke a fenti differenciálnak a tér és idő egy kombinációja, így azok az esetek, amiknél c -nél nagyobb a sebesség nem játszanak szerepet, ugyanúgy mint valamilyen képzetes koordináta a geometriában.

Az *indítéka* és az igazi mozgató ereje annak, hogy a G_c *transzformáció csoportot feltételezzük*, az a tény, hogy vákuumban a fény terjedésére vonatkozó differenciál egyenlet rendelkezik a G_c transzformáció csoporttal.²² A másik oldalról, a merev testek elmélete bármilyen értelemben csak a G_∞ csoporttal rendelkezik mechanikai rendszerben. Ha most van egy fénytanunk egy G_c csoporttal és vannak ugyanakkor merev testeink is, könnyen látható, hogy a t irányt úgy kell definiálni a két hiperboloid tartományhoz, hogy közös legyen a G_∞ illetve G_c csoportokhoz, ami egy további következményhez vezet, nevezetesen alkalmas merev laboratóriumi eszközök használatával, változást tudunk érzékelni a természeti jelenségekben, amikor a föld mozgása haladási irányához képest különböző irányításokat tekintünk. De minden erre irányított erőfeszítés, még a Michelson-féle interferencia-kísérlet is negatív eredménnyel zárult. Annak érdekében, hogy magyarázatot találjon erre az eredményre H. A. Lorentz felállított egy hipotézist, mely gyakorlati összegzése a G_c csoport fénytanra vonatkozó invarianciájának. Lorentz felteszi, hogy minden anyag hosszában $1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ arányban rövidül a haladási irányában.

Ez a hipotézis elég fantasztikusnak tűnik. Az összehúzódnak nem az éter ellenállásának következményeképpen képzelendő el, hanem mint az ég egy ajándéka,

²² Ennek a ténynek a lényegi alkalmazása az W. Voigt. Göttinger Nachr. 1887, p.41 helyen megtalálható.

mint egyfajta állapot, amely a mozgás állapotának kísérője.

Az ábrámon meg fogom mutatni, hogy Lorentz hipotézise ekvivalens a tér és idő új koncepciójával. Ezt most érthetőbben is kifejtjük. Tegyük fel, az egyszerűség kedvéért, hogy (y, z) nincs és figyelmünket egy két-dimenziós világra fordítjuk, amiben a t -tengellyel párhuzamos jobb-felső sáv egy nyugalmi állapotot reprezentál és egy másik a t -tengellyel ferdeszöget bezáró másik sáv egy egyenletesen haladó testet, aminek konstans a térbeli kiterjedése (lásd A.4. ábra). Ha OA' a második sávval párhuzamos, tekinthetjük t' -t a t tengelynek és x' -t az x -tengelynek, ekkor a második test lesz nyugalomban és az első halad egyenletesen. Tegyük fel a továbbiakban, hogy az első nyugalomban levő test l hosszúságú, azaz a PP metszete az első sávnak az x -tengely felett $l \cdot OC$, ahol OC az x -tengely irányában vett egység – és a második test, amikor nyugalomban van ugyanilyen l hosszú, jelentvén, hogy a $Q'Q'$ metszete a második sávnak az x' tengely irányában $l \cdot OC$ hosszú. Ezekben a testekben, elképzelhetünk két Lorentz-elektront, melyek közül az egyik nyugalomban van a másik egyenletesen halad. Ha az eredeti koordinátarendszerre gondolunk, a második elektron kiterjedése a sáv QQ metszetével adott, mely az x -tengely irányában van mérve. Mivel $Q'Q' = l \cdot OC'$ ezért $QQ = l \cdot OD'$. Ha $\frac{dx}{dt} = v$, könnyű számítással adódik, hogy

$$OD' = OC\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{ és így } \frac{PP}{QQ} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

alátámasztva a Lorentz-i hipotézist az elektronok mozgással kapcsolatos összehúzódásáról. Ugyanakkor, ha a második elektront tekintjük nyugalmi helyzetűnek, és az (x', t') rendszerben tekintve az OC' -vel párhuzamos $P'P'$ metszetet hosszúnak, azt találjuk, hogy az első elektron ugyanavval az aránnyal rövidült a másodikhoz képest, azaz

$$\frac{P'P'}{Q'Q'} = \frac{OD}{OC'} = \frac{OD'}{OC} = \frac{QQ}{PP}.$$

Lorentz a t' kombinációját (t -nek és x -nek) az egyenletesen mozgó elektron *lokális idejének* (*Ortszeit*) nevezte, és a fizikai konstrukcióját ennek az elvnek a kontrakció-hipotézis jobb megértéséhez használta. Azonban világos, hogy egy elektron ideje ugyanolyan jó más elektron számára is, azaz t, t' időket ekvivalensnek kell tekintenünk, ahogy azt Einstein állította.²³ Megmutatta, hogy az idő fogalma teljesen és egyértelműen létrehozott a természeti jelenségek által. De a tér fogalmához, sem Einstein sem Lorentz nem jutott el, valószínűleg azért, mert a fent- említett speciális transzformációk mellett, amelyekre az (x, t) illetve (x', t')

²³ A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 1905, p. 891; Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik 4, 1907, p. 411.

síkok megegyeznek, előfordulhat, hogy az x -tengely valamiképpen konzerválódik a kiindulási pozíciójában.

Fel tudjuk építeni a tér fogalmát hasonló módon, még ha ez méginkább fantasztikusnak is tűnik.

Ezekre a fogalmakra tekintettel, a „Relativitás-Posztulátuma”, mely megalkotódott a G csoportbeli invariancia igényének alapján, kevésbé tűnik hatékonynak a G_c csoport illetve további folyamatok vizsgálata szempontjából. Mivel a posztulátum értelmében a négy-dimenziós világ adott időben és térben a jelenségei által, de a vetítés térben és időben bizonyos szabadsággal kezelhető, jobban szeretném ezen állítást az „Abszolút világ Posztulátumának” [Világ-Posztulátum] tekinteni.

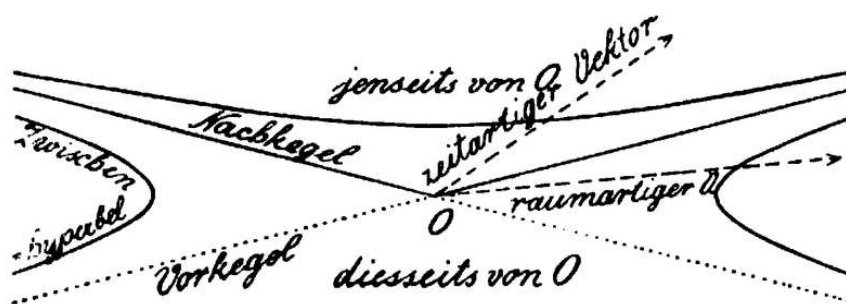
III

A világ-posztulátum segítségével a világ-pontok x, y, z, t meghatározó mennyiségeinek egy új felépítése lehetséges. Ezáltal azon formákat, amelyekből a fizikai törvények következnek, érthetőbbé tesszük, ahogy azt mindjárt látni fogjuk. Mindezekelőtt, a gyorsulás fogalma válik élesebbé és világosabbá.

Megint geometriai módszert használunk a kifejtéshez. Hívjunk egy O pontot a „Tér-idő-zérus-pontjának”. A

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

kúp két O csúcsú részből áll az egyikre $t < 0$ a másikra $t > 0$ teljesül. Az első, amelyet *előre-kúp*nak nevezünk tartalmazza azokat a pontokat, amelyekből O -ba fényt lehet küldeni, a második, amelyet *hátra-kúp*nak nevezünk tartalmazza azokat a pontokat, amelyekbe fény érkezik O -ból. Azon tartomány melyet az előre-kúp határol az O előre-része, és a hátra-kúp tartománya az O hátra-része (lásd A.5. ábra).



A.5. ábra.

Az O hátra kúpja tartalmazza az általunk már vizsgált

$$F = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = l, \quad t > 0$$

hiperboloid tartományt. A két kúp tartomány közötti rész kitölthető a

$$-F = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = k^2$$

hiperboloidokkal, ahol k^2 minden lehetséges pozitív értéket felvesz. Az ábrán fekvő O centrumú hiperbolák fontosak számunkra. A világosság kedvéért az ágait ezen hiperboláknak „ O -centrumú belső hiperboláknak fogjuk nevezni. Egy ilyen hiperbola ág, amikor világ-vonalnak gondoljuk, egy olyan mozgást reprezentál, amely sebessége a $t = -\infty$ illetve $t = \infty$ időpillanatokban megközelíti a fény sebességét.

Ha a szokásos vektorok analógiájaként irányított szakaszt rendelünk az x, y, z, t mennyiségekhez, akkor meg tudunk különböztetni időszerű vektort, amely O -ból az $F = 1, t > 0$ pontjaiba mutat, és térszerű vektort, amely O -ból a $-F = 1$ pontjaiba mutat. Az idő-tengely bármely időszerű vektorral párhuzamos lehet. Bármely világ-pont az előre illetve hátra kúpokban jelenthet egy O -val szinkronizált referencia rendszert, amely O -nál korábbi vagy későbbi. Az előre részek világpontja korábban volt, a hátra részé később volt mint O . A $c = \infty$ határátmenet megfelel annak, hogy az előre illetve hátra kúpok közötti ék formájú tartományt a $t = 0$ sokaságra lapítjuk. Az ábránkon ezt a keresztmetszetet szándékosan más szélességgel rajzoltuk.

Bontsunk fel egy O -ból (x, y, z, t) -be menő vektort komponenseire. Ha két vektor egyikének az iránya megegyezik az OR sugár vector irányával, ahol R az $\pm F = 1$ egy pontja és a másik iránya pedig ezen felület valamely RS érintővektorával párhuzamos, akkor a vektorokat merőlegesnek nevezzük. Megfelelőképpen az $(x, y, z, t), (x_1, y_1, z_1, t_1)$ vektorok merőlegességének a feltétele komponensekben az

$$c^2 t t_1 - x x_1 - y y_1 - z z_1 = 0$$

egyenlet.

A vektorok különböző irányokban való méréséhez, az egységet rögzítsük a következő módon; – térszerű vektor egységnyi ha a $-F = 1$ felületre mutat, és időszerű vektor ha az O -ból az $F = 1, t > 0$ felület pontjába mutat, akkor legyen $1/c$ hosszú.

Fordítsuk figyelmünket egy anyagi pont világ-vonalára ami az (x, y, z, t) ponton halad keresztül; ekkor követve a világvonala haladását, feleltessük meg a (dx, dy, dz, dt) időszerű vektornak a

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

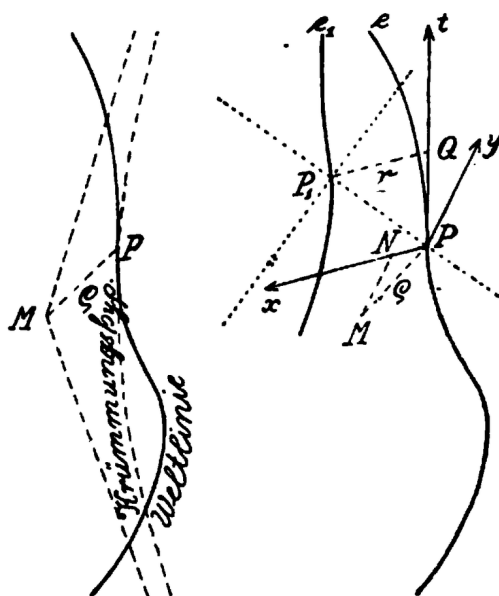
mennyiséget. Egy fix P_0 ponttól egy változó P pontig véve a $\tau = \int d\tau$ integrált, nevezzük ezt a P_0 ponton áthaladó anyagi pont világ-vonalához tartozó „valódi-idejének”. Az OP vektor (x, y, z, t) komponenseit tekinthetjük, mint a valódi τ

idő függvényeit; ekkor a τ -ra vonatkozó első $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t})$ illetve második $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t})$ differenciál-hányadosokat hívjuk a P anyagi pont *sebesség* illetve *gyorsulás* vektorának. Azonnal adódik, hogy

$$\left. \begin{aligned} c^2 \dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 &= c^2 \\ c^2 \ddot{t} - \dot{x}\ddot{x} - \dot{y}\ddot{y} - \dot{z}\ddot{z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

azaz a *sebességvektor* P -nél időszerű egységnyi hosszúságú vektor a *gyorsulásvektor* P -nél pedig egy a sebességvektorra merőleges vektor, így minden esetben térszerű vektor.

Ahogy az könnyen látható, van egy hiperbola, mely harmadrendben érintkezik a világ-vonallal P -ben és aszimptotái alkotói egy előre-kúpnak és egy hátra-kúpnek. Ezt a hiperbolát a P -beli „görbületi hiperbolának” nevezzük (lásd A.6. ábra).



A.6. ábra.

Ha M a középpontja, akkor úgy tekinthetünk rá, mint egy M centrumú közbeeső hiperbolára. Legyen ρ az MP vektor hossza, ekkor a gyorsulás vektor P -nél egy MP irányú c^2/ρ hosszú vektor.

Ha $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ eltűnnek, akkor a P -beli görbületi hiperbola egyenes, ami a világvonalat P -ben érinti és $\rho = \infty$.

IV

Annak igazolásához, hogy a fizikai törvényekre vonatkozó G_c csoport feltétel nem vezet semmilyen ellentmondásra, szükségeszerű megérteni a teljes fizikát ezen

csoportfeltételek alapján. A revízió szerencsésen megtörtént a „Termodinamika és Sugárzás”²⁴, „Elektromágneses jelenségek”²⁵ és végül „Mechanika a tömeg fogalmának a fenntartásával” c. művekben.

Ezen utóbbi fejezetében a fizikának a következő kérdést lehet tárgyalni: legyen egy erő az az (x, y, z, t) világpontban a a tér tengelyek irányában vett X, Y, Z komponensekkel adva, az $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t})$ sebesség vektor mellett. Hogy tekintsük az erőt, ha a referencia rendszert minden lehetséges módon megváltoztatjuk? Ismert, hogy vannak jól-ellenőrzött tételek elektromágneses terekben fellépő ponderomotive erőkről, ahol a G_c csoport kétségtelenül megengedhető. Ezek a tételek a következő egyszerű szabálynak tesznek eleget; *ha referencia rendszert bárhogy megváltoztatjuk, akkor a tekintett erőket úgy kell az új tér-koordinátákban erőként felírni, hogy a megfelelő vektor, aminek koordinátái*

$$tX, tY, tZ, tT,$$

ahol

$$T = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{x}}{\dot{t}} X + \frac{\dot{y}}{\dot{t}} Y + \frac{\dot{z}}{\dot{t}} Z \right)$$

változatlan marad (az arány a világ-pontban működik). Ez a vektor mindig merőleges a P -beli sebesség-vektorra. Egy ilyen P -ben reprezentált erő-vektort, P -beli mozgó erő-vektornak nevezünk.

A P ponton keresztülhaladó világ-vonal egy anyagi pont által van leírva, aminek a *mechanikai tömege* m . Nevezzük a P -beli sebesség-vektor m -szeresét *impulzusvektornak* és a P -beli gyorsulásvektor m -szeresét a P -beli *mozgás erővektorának*. Tekintettel ezen definíciókra, a következő törvény írja le, hogy egy mozgó erő-vektor hatására miként mozog a tömegpont²⁶.

A mozgás erővektora megegyezik a mozgó erővektorral.

Ez a kijelentés négy egyenletet jelent a négy komponens irányában, amelyek közül a negyedik levezethető az első háromból, mivel az említett vektorok merőlegesek a sebesség vektorra. A T definíciójából láthatjuk, hogy a negyedik nem más, mint az „Energia-törvény”. Úgy definiáljuk a tömegpont *kinetikus-energiáját*, hogy c^2 -szer tekintjük az impulzusvektor komponenseit a t -tengely irányában. Ekkor ennek a kifejezése

$$mc^2 \frac{dt}{d\tau} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

²⁴ M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme, Berliner Ber. 1907, p. 542 (also Ann. d. Phys. 26, 1908, p. 1).

²⁵ H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Göttinger Nachr. 1908, p. 53.

²⁶ H. Minkowski, l.c. p. 107. – see also M. Planck, Verh. d. Physik. Ges. 4, p. 136, 1906

azaz, ha kifejezzük az mc^2 additív konstansot, visszkapjuk a Newtoni mechanika $\frac{1}{2}mv^2$ kifejezését egy $1/c^2$ rendű szorzótól eltekintve. Eképpen látjuk, hogy az *energia a referencia rendszertől függ*. Azonban a t -tengely minden időszerű vektor irányában elképzelhető, eképpen az energia törvény egybesűrítí, bármely referencia rendszer esetén, a mozgás egyenletrendszerek teljességét. Ez a tény különösen jelentős a $c = \infty$ határesetben, amikor a Newtoni mechanika axiomatikus felépítését adja, ahogy erre T.R.Schütz ²⁷ rávilágított.

A kezdetekben a tér és idő egységeit úgy választottuk meg, hogy a fény sebessége váljon egységnyivé. Ha a t helyébe $\sqrt{-1}t = s$ változót helyettesítjük, akkor a differenciál kifejezés

$$d\tau^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2 + ds^2)$$

x, y, z, s -ben szimmetrikus alakot ölti; ez a szimmetria megjelenik minden törvényben, ami nem mond ellent a *világ-posztulátumnak*. Ennek a posztulátumnak a lényegét beöltöztethetjük a következő misztikus, ámde matematikailag szignifikáns formulába:

$$3 \cdot 10^5 \text{ km} = \sqrt{-1} \text{ Sec.}$$

V

A világ-posztulátum felírásából fakadó előnyt semmi sem illusztrálja olyan feltűnően, mint azok a kifejezések, amelyek egy a Maxwell-Lorentz elméletnek megfelelő mozgású pontszerű töltések kölcsönhatásainak kifejtéséből adódnak. Tekintsük a világvonalát egy ilyen (e) töltéssel rendelkező elektronnak, és vezessük be a τ kiszámított „Valós-idejét” tetszőleges lehetséges kiindulási pontra vonatkozólag. Az elektron által egy P_1 pontban létrehozott mező meghatározásához konstruáljuk meg a P_1 -beli előre-kúpot P_1 -ben (lsd A.5. ábra jobb oldala). Világos, hogy a végtelen világ-vonalat ez egyedül a P pontban metszi, mivel ezek az irányok mind időszerű vektorok. P -nél rajzoljuk meg a világvonal érintőjét, és P_1 -ből az erre bocsátott merőleget. Legyen r a P_1Q hossza. Az előre-kúp definíciója szerint, r/c ekkor számítható a PQ mértékeként. A P_1 világ-pontban az e elektron által gerjesztett mező vektor-potenciálja a PQ vektor irányába mutató e/r hosszúságú vektor x, y, z -tengelyek irányában fellépő tér-komponenseivel van reprezentálva; a skalár-potenciál ugyanezen vektor t -tengely irányában fellépő komponense. Ez az A. Lienard és E. Weichert ²⁸ által talált elemi törvény.

²⁷ J. R. Schütz, Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie. Göttinger Nachr. 1897, p. 110.

²⁸ A. Liénard, Champ électrique et magnétique produit par une charge concentrée en un point et animée d'un mouvement quelconque, L'Éclairage électrique 16 (1898), p. 5, 53, 106; Wiechert, Elektrodynamische Elementargesetze, Arch. néerl. (2), 5 (1900), p. 549.

Az elektron mezejében a fenti módon felvázoltak alapján az elektromos és mágneses erőkre való felbontás relatív, és az idő tengely választásától függ; a két erő együtt tekintve valamiféle analógiát mutat a mechanikai erő-nyomaték párral, mégha ez az analógia tökéletlen is.

Most leírjuk a *ponderomotive erőt, mely egy mozgó elektron által egy másik mozgó elektronra gyakorolt hatás*. Tegyük fel, hogy a második elektron-pont világvonala a P_1 ponton halad keresztül. Határozzuk meg P -t, Q -t és r -et ugyanúgy mint az előbb és szerkesszük meg a P -beli görbületi hiperbola M középpontját, és azon MN -re merőleges egyenest, mely P -n keresztül halad és QP_1 -el párhuzamos. A P pontban létrehozhatunk egy referencia rendszert a következő módon: a t -tengely legyen PQ , az x -tengely a QP_1 -el párhuzamos. Az y -tengely az MN -irányába mutasson, és a z -tengely automatikusan meghatározódik, mint az x -, y -, t -tengelyekre merőleges egyenes. Legyen $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$ a gyorsulás-vektor P -ben, $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$, $\dot{t}_1$ a P_1 -beli sebesség vektor. Ekkor az e elektron által a másodikra vonatkozóan létrehozott P_1 -beli erő-vektor, (minden lehetséges mozgás esetén), reprezentálható a

$$-ee_1 \left(\dot{t}_1 - \frac{\dot{x}_1}{c} \right) \Re$$

vektorral. Az $\Re_x$, $\Re_y$, $\Re_z$, $\Re_t$ komponensek között a következő relációk állanak fenn:

$$c\Re_t - \Re_x = \frac{1}{r^2}, \quad \Re_y = \frac{\ddot{y}}{c^2 r}, \quad \Re_z = 0$$

és a vektor merőleges a P_1 -beli sebességvektorra, ami miatt ezen utóbbi sebességvektortól való függése is felmerül.

Ha összevetjük ezt a kifejezést az elemi törvényből adódó korábbi, a mozgó elektronok egymásra való ponderomotive hatásáról szóló formulával ²⁹, akkor nem tudunk mást tenni, mint elismerni, hogy az itt fellépő relációk a lényegüket alkotó elsőrendű egyszerűségükben négy dimenzióban lépnek fel, nem pedig abban a három dimenzióban, ahová vetített képük igen komplikált.

A mechanikában a világ-posztulátum alapján történő reformáció, eltünteti a Newtoni-mechanika és az elektrodinamika között fennálló zavaró diszharmóniát. Tekintsük most a Newtoni hatás törvényének helyzetét erre a posztulátumra tekintettel. Fel fogjuk tenni, hogy két m illetve m_1 tömeg-pont a világ-vonalukkal van leírva; és a mozgó erő-vektor, amit m generált hat m_1 -re, ekkor a kifejezés ugyanaz mint az elektronok esetében, csak a $-ee_1$ szorzó a $+mm_1$ szorzóra cserélődik. Azt a speciális esetet tekintjük, amikor a gyorsulás-vektora m -nek zéró; ekkor t bevezethető oly módon, hogy m fixnek tekinthető, az m_1 mozgása csak

²⁹ K. Schwarzschild, Göttinger Nachr. 1903, p. 132. - H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wissensch., Art. V, 14, p. 199.

az m mozgó-erő vektorából származik. Ha most ezt a vektort ($1/c^2$ helyett 1-t írva) módosítjuk a

$$\dot{t}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

kifejezéssel, azt kapjuk, hogy a Kepler törvény³⁰ csak a t_1 idő minden időpillanatában teljesül az m_1 tömegre annak x_1, y_1, z_1 pozíciójában, ezért le kell írunk m_1 τ_1 valódi idejét. Ezen egyszerű megjegyzés alapján látható, hogy a javasolt hatás törvény a Newtoni mechanikával együtt nem kevésbé alkalmas az asztronómiai jelenségek leírására, mint a Newtoni hatás törvény a Newtoni mechanikával kombinálva.

A mozgó testre vonatkozó elektro-mágneses alapegyenleteknek a világ-posztulátumra való kifejtésével ugyanez a helyzet. Meg fogom mutatni egy későbbi alkalommal, hogy ezen egyenletek levezetését, ahogy Lorentz tanította, egyáltalán nem kell feladni.

A tény, hogy a világ-posztulátum kivétel nélkül teljesül, úgy hiszem, ez az igazi lényege a világ elektromágneses képének; az elképzelés először Lorentz által merült fel, a lényegét Einstein ragadta meg, és most fokozatosan és teljesen megvalósult. Az idő előrehaladtával, a matematikai következmények fokozatosan levezetődnek, és hamarosan elegendő javaslat fog születni a posztulátum kísérleti igazolásához; így még azok is, akiknek nem rokonszenves, vagy fájdalmasnak találják a régi, hagyományos koncepciók elvetését, bele fognak nyugodni a tér és idő új fogalmába, – azon esély miatt, hogy ez elvezet a tiszta matematika és mechanika közötti harmónia megteremtéséhez.

³⁰ H. Minkowski, l.c., p. 110.

Radnóti Miklós: Nem tudhatom...

Nem tudhatom, hogy másnak e tájék mit jelent,
nekem szülőházam itt e lángoktól ölelt
kis ország, messzeringó gyerekkorom világa.
Belőle nőttem én, mint fatörzsből gyöngé ága
s remélem, testem is majd e földbe süpped el.
Itthon vagyok. S ha néha lábamhoz térdepel
egy-egy bokor, nevét is, virágát is tudom,
tudom, hogy merre mennek, kik mennek az uton,
s tudom, hogy mit jelenthet egy nyári alkonyon
a házfalokról csorgó, vöröslő fájdalom.
Ki gépen száll fölébe, annak térkép e táj,
s nem tudja, hol lakott itt Vörösmarty Mihály,
annak mit rejt e térkép? gyárat s vad laktanyát,
de nekem szöcskét, ökröt, tornyot, szelíd tanyát,
az gyárat lát a látcsőn és szántóföldeket,
míg én a dolgozót is, ki dolgaért remeg,
erdőt, füttyös gyümölcsöst, szöllőt és sírokat,
a sírok közt anyókát, ki halkán sírogat,
s mi fönről pusztítandó vasút, vagy gyárüzem,
az bakterház s a bakter előtte áll s üzen,
piros zászló kezében, körötte sok gyerek,
s a gyarak udvarában komondor hempereg;
és ott a park, a régi szerelmek lábnyma,
a csókok íze számban hol méz, hol áfonya,
s az iskolába menvén, a járda peremén,
hogy ne feleljek aznap, egy kőre léptem én,
ím itt e kő, de fönről e kő se látható,
nincs műszer, mellyel mindez jól megmutatható.

Hisz bűnösök vagyunk mi, akár a többi nép,
s tudjuk miben vétkeztünk, mikor, hol és mikép,
de élnek dolgozók itt, költők is büntelen,
és csecsszopók, akikben megnő az értelem,
világít bennük, őrzik, sötét pincékbe bújva,
míg jelt nem ír hazánkra újból a béke ujja,
s fojtott szavunkra majdan friss szóval ők felelnek.

Nagy szárnyadat borítsd ránk virrasztó éji felleg.

Utószó helyett...

Mid van ugyanis, amit nem kaptál volna?

Pál apostol: 1. Kor. 4,7



A.7. ábra. Pascal dolgozik

Mert mi végre is az ember? Semmi a végtelenséghez, minden a semmihez viszonyítva, közép a semmi és a minden között.

B.Pascal: Gondolatok

*Deus fecit omnia in pondere, in
numero, et mensura.*

Blaise Pascal: De l'Esprit géométrique

Böngésző

Magyar nyelvű jegyzetek

- *Hajós György-Strohmayer János*: A geometria alapjai, Tankönyvkiadó Budapest, 1977.
- *G.Horváth Ákos, Lángi Zsolt*: *Kombinatorikus Geometria*, Polygon, 2012.

Magyar nyelvű könyvek a geometriáról

- *Baziljev, V.T., Dunyicsev, K.I., Ivanyickaja, V.P.*: Geometria I-II, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
- *Bolyai János*: Appendix, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
- *Coxeter, H.S.M.*: A geometriák alapjai, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1973.
- *Coxeter, H.S.M.*: Projektív geometria, Gondolat, Budapest, 1986.
- *Coxeter, H.S.M., Greitzer S.L.*: Az újra felfedezett geometria, Gondolat, Budapest, 1977.
- *Csencov N.N., Jaglom I.M., Skljarszkij D.O.*: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, Geometria I. (Planimetria) 1968.
- *Csencov, N.N., Jaglom, I.M., Skljarszkij, D.O.*: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, Geometria II. (Sztereometria) 1968.
- *Dörrie, H.*: A diadalmas matematika, Gondolat, Budapest, 1965.
- *Euklides*: Elemek, Gondolat, Budapest, 1983.
- *G.Horváth Ákos, Szirmai Jenő*: Nemeuklideszi geometriák modelljei, Typotex, Budapest, 2004.

- *Hajós György*: Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó Budapest, 1979.
- *Hilbert, D., Cohn-Vossen, S.*: Szemléletes geometria, Gondolat, Budapest, 1982.
- *Kazarinoff, N.D.*: Geometriai egyenlőtlenségek, Gondolat, Budapest, 1980.
- *Kálmán Attila*: Nemeuklideszi geometriák elemei, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- *Kerékjártó Béla*: A geometria alapjairól I-II, Szeged, 1937.
- *Lánczos Kornél*: A geometriai térfogalom fejlődése, Gondolat, Budapest, 1976.
- *Lobacsevszkij, N.I.*: Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
- *Molnár E., Prépópa I.*: Bolyai emlékkönyv Bolyai János születésének 200. évfordulójára 221-241, Vince Kiadó 2004.
- *Patterson, E.M.*: Topológia, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
- *Pogáts Ferenc*: Vektorgeometria, Példatár, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1970.
- *Pogáts Ferenc*: Trigonometria, Példatár, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1973.
- *Pontrjagin, I. Sz*: Kombinatorikus topológia, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
- *Reimann István*: A geometria határterületei, Gondolat, Budapest, 1986.
- *Strommer Gyula*: Geometria, Tankönyvkiadó Budapest, 1988.
- *Szász Pál*: Bevezetés a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriába, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
- *Szőkefalvi Nagy Gyula*: A geometriai szerkesztések elmélete, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.
- *Szőkefalvi Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter*: Differenciálgeometria, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1979.

- *Vörös Cyrill*: Analitikus Bolyai-féle geometria, Budapest, 1909.
- *Weyl, H.*: Szimmetria, Gondolat, Budapest, 1982.

Könyvek angolul illetve németül

- *Alexandrov, A.D.*: Konvexe Polyeder, Akademie-Verlag- Berlin, 1958.
- *Berger, Marcel*: Geometry I-II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo, 1994.
- *Bao, D., Chern S. S., Shen Z.*: An Introduction to Riemannian-Finsler Geometry. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- *Bonola, R.*: Non-euclidean geometry. Dover Publication, 1955.
- *Boltyanski, V., Martini, H., Soltan, P. S.*: Excursions into Combinatorial Geometry, Springer, Berlin et al., 1997.
- *Brass, P., Moser W., Pach, J.*: Research problems in discrete geometry, Springer, New York, NT, 2005.
- *Bolyai, J.*: Appendix in Tentamen written by F.Bolyai, Marosvásárhely, 1832.
- *Croft, H.T., Falconer, K.J., Guy R.K.*: Unsolved Problems in Geometry, Springer Vol.II 1991.
- *Conway, J.M., Sloane, N.J.A.*: Sphere Packings, Lattices and Groups. Springer-Verlag, 1988.
- *Coxeter, H.S.M.*: Regular polytopes. Methuen and Co. LTD., London, 1948.
- *Coxeter, H.S.M.*: Introduction to geometry. John Wiley and Sons, Inc., 1961.
- *Coxeter H.S.M.*: Non-Euclidean Geometry. Toronto, 1947.
- *Davis, C., Grünbaum, B, Sherk, F.A.*: The Geometric Vein: The Coxeter Festschrift, Springer-Verlag 1981 [B].
- *Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P.*: Modern Geometry- Methods and Applications, Part I. The geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields. Second Edition, Springer-Verlag, 1992.

- *Elte E.L.*: The semiregular polytopes of the hyperspaces, Groningen, 1912.
- *Fejes Tóth L.*: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer, Berlin, 2nd ed. 1972.
- *Fejes Tóth L.*: Regular figures. Pure and Applied Mathematics, Vol. 48, Pergamon Press, 1964.
- *Gohberg, I., Lancaster, P., Rodman, L.*: Indefinite Linear Algebra and Applications. Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 2005
- *Gohberg, I., Lancaster, P., Rodman, L.*: Matrices and indefinite scalar products. Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 1983.
- *Gruber P. M.- Lekkerkerker C. C.*: Geometry of Numbers. North-Holland Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo 1987.
- *Gruber, P.M., Wills, J.M. (Hrsg.)*: Convexity and its applications. Birkhäuser, Basel, 1983.
- *Gruber, P.M., Wills, J.M. (Hrsg.)*: Handbook of Convex Geometry. Volume A, North Holland, Amsterdam 1993.
- *Gruber, P.M., Wills, J.M. (Hrsg.)*: Handbook of Convex Geometry. Volume B, North Holland, Amsterdam 1993.
- *Gruber, P.M.*: Convex and Discrete Geometry. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.
- *Lobachevsky, N.I.*: Zwei Geometrische Abhandlungen. B.G.Teubner, Leipzig and Berlin, 1898, (reprinted by Johnson Reprint Corp., New York and London, 1972).
- *Minkowski, H.*: Über die positiven quadratischen Formen und über Kettenbruchähnliche Algorithmen. Ges. Abh. I 243–260.
- *Minkowski, H.*: Geometrie der Zahlen. Leipzig und Berlin 1910.
- *Moser, W.O.J., Pach J.*: Research problems in Discrete Geometry. Privately published collection of problems. Montreal: McGill University, 1994.
- *Rudin, W.*: Functional analysis. McGraw-Hill Book Company 1973.

- *Schoenflies, A.:* Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, II. Leipzig, Teubner 1908.
- *Tölke, J., Wills, J.M.:* Contributions to geometry, Birkhäuser, Basel, 1979.
- *Wilansky, A.:* Functional Analysis. Blaisdell, New York 1964.
- *Wilder, R.L.:* Topology of Manifolds. Am. Math. Soc. Coll. Part V, XXXII, 1949.

Ábrák jegyzéke

1.	Kepler modellje a világegyetemről	ii
2.	Leonardo tanulmánya Vitruvius arányairól	viii
3.	Escher vizesése	ix
4.	Botticelli: Szent Ágoston	x
5.	Vízcseppek (fotó: G.Horváth Csenge)	xiii
1.1.	Miért nincs három belül metszett oldal?	3
1.2.	Minden szakasznak van pontja!	4
1.3.	Az egyenesre vonatkozó ekvivalencia tranzitív	5
1.4.	A félegyenesek metszik a száracat összekötő szakaszt	12
1.5.	A külső szög lemmája	12
1.6.	Egy oldal és két szög egyenlősége.	13
1.7.	Szakaszfelező merőleges.	14
1.8.	Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.	15
1.9.	Háromszögegyenlőtlenség.	15
1.10.	Kar lemma $n = 3$	16
1.11.	Legendre első szögtétele.	17
1.12.	Külső szög tétel.	17
1.13.	A második szögtétel.	18
1.14.	Miért tart nullához a PD_iT_Δ ?	19
1.15.	Ha a defektus nulla teljesül a párhuzamossági axióma	19
1.16.	A defektus nulla, ha teljesül a párhuzamossági axióma.	20
1.17.	Az euklideszi párhuzamosság tranzitív.	21
1.18.	Elpattanó félegyenesek.	23
1.19.	Kezdőpont áthelyezés.	23
1.20.	Szimmetria.	24
1.21.	Tranzitivitás.	24
1.22.	Ultraparallel egyenesek közös merőlegese.	26
1.23.	Azonos szög alatt hajló egyenespár ultraparallel.	27
1.24.	A Saccheri-négyszög tulajdonságai.	28
1.25.	Közös merőleges szerkesztése.	28
1.26.	Egyikkel párhuzamos, másakra merőleges félegyenes	29

1.27. A paraciklus mint korrespondeáló pontok halmaza.	31
1.28. Sík egyenes merőlegessége.	32
1.29. Síkra merőleges egyenes szerkesztése.	33
1.30. A három merőleges tétele.	34
1.31. Egyenestartás.	35
1.32. Síkok merőlegessége.	36
1.33. Tétel a középvonalról	37
1.34. A transzverzális függvény konvexitása.	38
1.35. A metsző egyenesek exponenciálisan távolodnak.	40
1.36. A normáltranszverzális a legrövidebb összekötő szakasz.	40
1.37. Abszolút szinusztétel.	42
1.38. Gömbi szinusztétel.	43
1.39. Euklidész	45
1.40. Bolyai János	53
1.41. Nyikoláj Ivanovics Lobacsevszkij	61
1.42. David Hilbert.	67
2.1. Desarguesi konfiguráció	77
2.2. Tengelyes kollineációnak van centruma	77
2.3. A kollineáció létezik ha teljesül Desargues tétele	81
2.4. Összeadás és szorzás	82
2.5. Összeadás és a Desargues tétel	83
2.6. Szorzás és a Desargues tétel	84
2.7. Projektív koordinátázás	85
2.8. $P_x P_y P_z = 1$	86
2.9. Projektív homogén koordinátázás O -pont modellje	87
2.10. Desargues tétele	87
2.11. Kis Desargues tétel	88
2.12. A Pappous-Steiner tétel	89
2.13. A Pappous-Pascal tétel és a test kommutativitása	92
2.14. Pappous-Pascal tétel és a projektivitások	93
2.15. Pascal tétel	96
2.16. A kúp szeletei	99
2.17. A vezéregyenes	100
2.18. Dandelon tétele	101
2.19. Az ellipszis alapábrája	103
2.20. Latus rectum	106
2.21. Dandelon tétele	107
2.22. Hiperbola alapábra	108
2.23. Latus rectum	110
2.24. A parabola alapábrája	112

2.25. Hatványvonal	113
2.26. Hiperbola és egyenes metszéspontjai	114
2.27. Parabola és egyenes metszéspontjai	115
2.28. Hiperbola és egyenes metszéspontjai inverzióval	116
2.29. Szerkesztés amikor a metsző egyenesre illeszkedik a fókusz . .	116
2.30. Polaritás körre	117
2.31. Polaritás kúpszeletre	118
2.32. A szögfelezés	119
2.33. A kúpszelet mint projektív pontsorok képződménye.	119
2.34. Inverzió	120
2.35. Affin alapábra	122
2.36. Ellipszis és egyenes metszéspontja	124
2.37. Hiperbola pár	125
2.38. Gyorsszerkesztés hiperbolánál	126
2.39. A parabolát két érintő az érintési ponttal meghatározza. . . .	127
2.40. Három érintő viszonya parabolánál.	128
2.41. A parabola gyorsszerkesztése.	129
2.42. Blaise Pascal	133
2.43. Bernhard Riemann	149
3.1. Az egyenesre tükrözés egybevágóság.	164
3.2. Az egybevágóságok alaptétele.	165
3.3. A bizonyítás első esete.	167
3.4. A második eset.	168
3.5. A harmadik eset.	168
3.6. A közös síkúak esete.	172
3.7. A kitérők esete.	172
3.8. Merőleges tengelyű elforgatások szorzata csavarmozgás.	173
3.9. Közös merőleges síkkal rendelkező tükörsíkok.	174
3.10. Közös ponttal rendelkező tükörsíkok.	175
3.11. Négy tükrözés szorzatai.	175
3.12. Felix Klein	177
4.1. Négypontú modell	186
4.2. Ötpontú egyenes modell	186
4.3. Hétpontú síkmodell.	187
4.4. A nem-archimédeszi egyenes	187
4.5. Desargues tétel nem igaz Moulton síkján	188
4.6. Inverzió	190
4.7. Kör inverz képe	191
4.8. Hajlásszögtartás	192

4.9.	A tükrözés inverzió	193
4.10.	Kitérő síkbeli egyenespár normáltranszverzálisa	195
4.11.	Kitérő síkok normáltranszverzálisa	195
4.12.	Kitérő egyenespár normáltranszverzálisa	196
4.13.	Ciklusok Poincare modelljeiben	198
4.14.	A hatványvonal.	200
4.15.	Merőlegesség a projektív modellben.	201
4.16.	Közös merőleges a projektív modellben.	202
4.17.	Komplex kettősviszony	203
4.18.	Körtartás	204
4.19.	Szögtartás	205
4.20.	Távolság	206
4.21.	Hiperboloid modell	209
4.22.	Távolság a hiperboloid modellben	210
4.23.	Egyenesek szöge	211
4.24.	Egybevágó paraszférák.	213
4.25.	Hiperciklus modell.	214
4.26.	Pasch axióma a gömbön	215
4.27.	Arthur Cayley	217
5.1.	Teljes négyszög illesztése	236
5.2.	Forgatás egyenes körül	239
5.3.	Harmonikus involúció	243
5.4.	A háromszög területe a szférikus modellben	269
5.5.	Kör és távolságvonal a gömbfelszínen	275
5.6.	A Lexell kör	276
5.7.	René Descartes	279
5.8.	A szorzás	280
5.9.	A négyzetgyök szerkesztése	281
5.10.	Másodfokú egyenlet megoldása	283
5.11.	Masodfokú egyenlet megoldása	284
5.12.		288
6.1.	Sokszög felbontása.	295
6.2.	Konvex sokszög területe.	296
6.3.	Konvex halmaz területe.	299
6.4.	Háromszorosan aszimptotikus háromszögek egybevágósága.	300
6.5.	Liebmann átdarabolása	302
6.6.	Miért additív az f függvény?	303
6.7.	A terület és a defektus	303
6.8.	Tetraéder térfogata.	306

6.9. Paraciklus kordinátarendszer.	313
6.10. Koordinátarendszer a féltérmodellben.	316
6.11. Paraciklusív és húrja ($k = 1$ eset)	318
6.12. Derékszögű koordinátákra áttérés	319
6.13. Gömbi koordináták	320
6.14. Koordináták a Cayley-Klein modellben	322
6.15. Az orthoszkém derékszögű koordinátázása	326
6.16. Henry Poincaré	335
7.1. A vetítőkúp és a vetület	352
7.2. Csillagszerű poliéder	354
7.3. Nem csillagszerű felület	355
7.4. A bizonyítás zárt poliedrikus felületre	356
7.5. Van egyenlő megfelelő szögpar	367
7.6. Amikor nem romlik el a konvexitás	368
7.7. Amikor elromlik a konvexitás	368
7.8. Kisebb vagy nagyobb?	369
7.9. Új lapok	371
7.10. Az öt szabályos test	374
7.11. Kockában tetraéder és benne oktaéder.	375
7.12. Dodekaéder konstrukció.	376
7.13. Ikozaéder konstrukció.	376
7.14. Dodekaéderben kocka és benne ikozaéder.	377
7.15. A Fibonacci spirális	381
7.16. Az aranyspirális középpontja	382
7.17. Az aranyháromszög	383
7.18. Az aranyháromszög szerkesztése	384
7.19. Ábra Agrippa könyvéből	386
7.20. Le Corbusier: Le Modulor	386
7.21. Michelangelo: A szent család	387
7.22. Salvador Dali: Az utolsó vacsora szentsége	387
7.23. Joseph Mallord William Turner: Norham Castle at Sunrise	388
7.24. Rembrandt: Önarckép	388
7.25. A gizai piramis	389
7.26. Az atheni Parthenon.	389
7.27. A torontoi CN Tower	389
7.28. Aranymetszés a hegedűn	392
7.29. Csillagtestek	394
7.30. Monogramkocka	394
7.31. A Császár-féle test	395
7.32. A Szilassi-féle test	395

7.33. Mi a felszín?	396
7.34. Mi az árnyékhatár?	397
7.35. Gömböc	397
7.36. Egyensúlyi helyzetek száma	398
7.37. Alexander gömbje	398
7.38. A lemma ábrái	403
7.39. Szimplexek	405
7.40. Kockák	405
7.41. Keresztpoliéderek	406
7.42. Kockára írt szabályos gúlán	408
7.43. Rombdodekaéder	409
7.44. Stella Octangula (http://www.korthalsaltes.com)	409
7.45. Egyenlőoldalú, dodekaéder szimmetriájú testek (http://en.wikipedia.org/wiki/	
7.46. Egyenlőoldalú, ikozaéder szimmetriájú testek (http://en.wikipedia.org/wiki/Gr	
7.47. A 24-cella 3-dimenziós Schlegel diagramja (http://en.wikipedia.org/wiki/24-c	
7.48. A 120-cella 3-dimenziós Schlegel diagramja (http://en.wikipedia.org/wiki/120-c	
7.49. A 600-cella 3-dimenziós Schlegel diagramja (http://en.wikipedia.org/wiki/600-c	
7.50. Leonhard Euler	417
7.51. Raffaello Santi: Az athéni iskola	421
A.1. Az A.2.1. Megjegyzés példája	439
A.2. Egységsgömbök két-dimenzióban.	440
A.3. Hermann Minkowski	479
A.4.	481
A.5.	485
A.6.	487
A.7. Pascal dolgozik	493

Tárgymutató

- de Sitter, W. (1872–1934), 448
hiperbolikus párhuzamossági axióma, 21
Lambert, J. H. (1728–1777), 27
Ricci görbület , 442
- abszolút alakzat, 199
abszolút geometria, 11
Abszolút szinusztétel, 40
abszolút tétel, 36
affinitás, 227
általánosított Minkowski tér, 428
általánosított tér-idő modell, 430
Analysis Situs, 335
antiszimmetria, 222
aránytartás, 35
aranyháromszög, 368, 372
arany metszés, 367
arany spirális, 368
arany téglalap, 368
Archimédeszi axióma, 10
árnyékhatár, 385
aszimptota, 106
Auerbach bázis, 440
- Banach-Hahn tétel, 418
Betti csoportok invariancia tétele, 355
bilineáris forma, 198
Bolyai Farkas (1755–1856), 20
Bolyai János (1802–1860), 25
Borel-féle fedési tétel, 339
Brianchon, Charles Julien, 95
- Cantor-axióma, 9
- Cauchy, A. (1789–1857), 382
Cauchy-féle merevségi tétel, 355
Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség, 422
Cayley, A. (1821–1895), 207
Cayley-Klein modell, 201
centrális-axiális kollineáció, 74
ciklus, 30, 344
Clavio, C.S. (1537–1612), 20
Coxeter, H.S.M (1907–2003), 391
csúcsérintő, 106
csúcsalakzat, 388
csúcspont, 106
csúsztatva tükrözés, 157
csavarmozgás, 161
csillagszerű poliéder, 343
- Dandelon gömb, 108
Dedekind-axióma, 9
defektus, 17
Desargues tétel, 74
Desargues, G. (1591–1662), 74
Desargues-i sík, 87
Descartes, R. (1596–1650), 269
Descartes-féle koordinátarendszer, 8
Dirichlet-Voronoi cella, 401
Dynkin, E. (1924–), 391
- egybevágóság, 7, 153
egyenestartó leképezés, 225
egyszeresen összefüggő, 344
Einstein, A. (1879–1955), 417
elő-euklidészi tér, 453
elő-gömb, 451
elő-sokaság, 448

elő-távolság, 457
előjeles térfogata, 222
ellenalakzat, 101
ellenkör, 101
ellenpont, 101
ellipszis, 98
ellipszoid, 243
elliptikus geometria, 72
elliptikus henger, 243
elliptikus modell, 204
elliptikus sík, 6
elpattanó egyenesek, 22
első alapforma, 438
eltolás, 157
eltolva tükrözés, 161
érintő hipersík, 432
érintőtér, 432
érintővektor, 432
erlangeni program, 167
Euklidész, 20
Euklidész párhuzamossági axiómája, 20
euklideszi vektortér, 221
Euler formula, 346
Euler tétel, 341
Euler, L. (1707-1783), 407
Euler-karakterisztika, 354
Euler-Poincare formula, 348, 354
féltér modell, 184
Fano sík, 176
felcserélési tétel, 222
Fibonacci spirális, 369
Fibonacci, (Leonardo di Pisa), 369
Finsler, P. (1894–1970), 457
folytonos arány, 368
folytonosság, 9
forgatás, 157
forgatva tükrözés, 161
gömbháromszög, 258
gömbi koszinusz tétel, 257
gömbkétszög, 258
Gauss, F. (1777-1855), 20
geodetikus, 187, 255, 459
gyorsulás vektormező, 459
Hölder egyenlőtlenség, 422
három merőleges tétele, 34
háromszögegyenlőtlenség, 15
harmonikus elválasztás, 93
hecatonicosachoron, 401
Heron formula, 261
hexacosichoron, 404
hexadecachoron, 396
Hilbert, D. (1862–1943), 28
Hilbert-féle axiómarendszer, 8
hiperbola, 104
hiperbolikus tér izometriái, 245
hiperciklus, 30
hiperciklus modell, 203
hiperfelület, 432
homogenitás, 222
icositetrachoron, 400
ideális pont, 189
identitás, 157
illeszkedés, 2
illeszkedési sík, 74
illeszkedési tér, 76
illeszkedéstartó leképezés, 225
indefinit-skalárisszorzat, 423
inverzió, 180
isteni arány, 368
ívhossz, 457
ívhossz függvény, 458
Ivory tétel, 121
Ivory, J. (1765–1842), 119
izometria, 462
izotróp, 197
Jacobi azonosság, 223
Jacobi egyenlőség, 224

jel lemma, 358
 jobbrendszer, 222
 Jordan, C. (1838–1922), 170
 Jordan-tétel, 6

 kör, 30
 külsőszög tétel, 17
 képzetes sugarú gömb, 198
 kétköpenyű hiperboloid, 243
 kúpszelet, 94, 95
 Kar lemma, 15
 kar lemma, 356
 Kepler, J. (1571–1630), 382
 kicserélési tétel, 223
 kis csillagosított dodekaéder, 399
 Klein, F. (1849–1925), 167
 kollineáció, 232
 kommutatív csoport, 219
 komplex kettősvizony, 192
 konfokális ellipszoidok, 119
 konformis modell, 197
 konjugált húrpar, 190
 konplanáris, 220
 konvexitás, 238

 Lagrange azonosság, 223
 Lambert-négyszög, 27
 lap-összefüggő, 345
 lapháló, 356
 latus rectum, 102
 Legendre első tétele, 16
 Legendre második tétele, 17
 Lexell kör, 265
 lineáris izometria, 254, 462
 Lobacsevszkij, Ny. I. (1792–1856), 59
 Lorentz, H. (1853–1928), 417

 Möbius transzformáció, 187
 másodrendű felület, 240
 másodrendű görbe, 241
 merőleges vetület, 34
 merőleges vetítés, 34

 merőlegesség, 31
 Meusnier, J. B. (1754–1793), 460
 Meusnier-tétel, 460
 Minkowski szorzás, 428
 Minkowski tér, 198, 423
 Minkowski, H. (1864–1909), 469
 modell, 175
 Moulton, J. (1844–1921), 178

 nagy csillagosított dodekaéder, 399
 normáltranszverzális, 38, 184
 nyílt féltér, 238

 octachoron, 396
 ortonormált bázis, 237
 osztóviszony, 226
 ötpontú modell, 176

 párhuzamos áthelyezés, 159
 Pappous, 93
 Pappous-Pascal tétel, 89
 Pappous-Steiner tétel, 94
 parabola, 108
 parabolikus henger, 243
 paraboloid, 243
 paraciklus, 30
 paralelogramma szabály, 219
 paraszféra, 41
 Pascal, B. (1623–1662), 73
 Pasch-axióma, 4
 pentachoron, 396
 Poincare gömb modell, 179
 Poincare, H. (1854–1912), 325
 Poinset, L. (1777–1859), 382
 poláris, 117
 pont homogén koordinátái, 230
 pontsor, 89
 Posztulátum, 45
 projektív geometria, 74
 projektív metrikus tér, 198
 projektív modell, 189
 projektív sík, 91

projektív tér, 76
 projektivitások alaptétele, 86
 Proklos, 20
 pszeudo-euklideszi tér, 198
 pullback leképezés, 465

 rendezés, 2
 Ricci görbület, 441
 Riemann sokaság, 254
 Riemann távolság, 254
 Riemann, B. (1826–1860), 71
 rombdodekaéder, 397

 síktükrözés, 161
 Saccheri, G.G. (1667–1733), 27
 Saccheri-négyszög, 27
 Schäfli, 363
 Schläfli, L. (1815–1895), 391
 Schlegel, V. (1843–1905), 400
 Schwartz, H. (1843–1921), 385
 sebesség vektormező, 459
 skalár görbület, 442
 skaláris szorzat, 220
 sokaság izometria, 465
 sokszög defektusa, 17
 stabilizátor, 199
 Staudt-Darboux tétel, 232
 Steiner, J. (1796–1863), 93
 stella octangula, 397
 sugársor projektivitás, 94
 szögtartomány, 6
 szögvonala, 6
 szabályos poliéder, 388
 szekcionális (Gauss) görbület, 441
 szekcionális főgörbület, 441
 szférikus geometria, 205
 szférikus modell, 205
 szimmetriacsoport, 388
 szimpliciális komplexus, 348
 sztereografikus projekció, 196

 töröttvonal, 6
 töröttvonal egyenlőtlenség, 15
 tükrözés, 156, 157
 térfogatelem, 302
 topológia, 335
 topológikus izometria, 465
 transzverzális, 185
 tranzitívan hat, 187
 trigonometria, 40

 ultraparallelnak, 25

 valós sugarú gömb, 198
 vegyesszorzat, 222
 vektoriális szorzat, 222
 vektorok, 219
 vektorok hajlásszöge, 220
 vektortér, 220
 Veronese példája, 177
 vezéregyenes, 102
 vezérkör, 102
 vitruviusi arány, 368

 Wallis, J. (1616–1703), 20
 Weierstrass, K. (1815–1897), 217

 zárt poliedrikus felület, 344
 zászló, 388