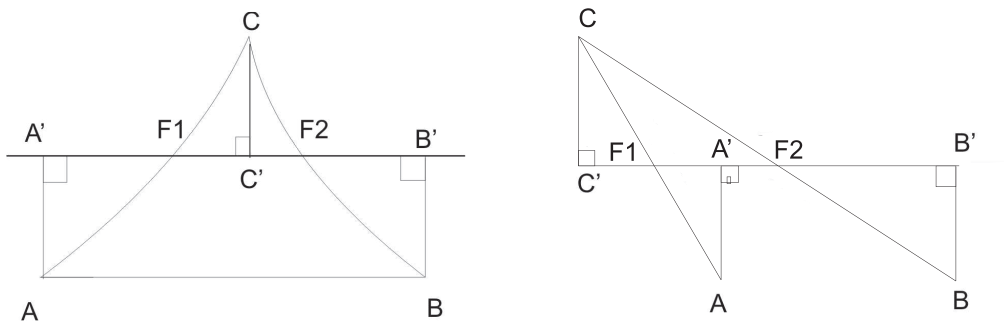
# 0.1. Egyenesek kölcsönös helyzete a térben

## 0.1.1. Abszolút gondolatok

**0.1.1. Lemma.** *A háromszög középvonala a hozzátartozó alap felénél nem hosszabb.*




1. ábra. Tétel a középvonalról

**Bizonyítás.** Az $ABC$ háromszög $F_1F_2$ középvonalára, vetítsük merőlegesen az $A, B, C$ pontokat, így adódnak az $A', B', C'$ pontok. Az $AA'F_1$, $CC'F_1$ illetve $BB'F_2$, $CC'F_2$ háromszögpárok egybevágósága alapján $2|F_1F_2| = |A'B'|$ teljesül (lsd. 1 ábra). Az $AA'$, $BB'$ egyeneseknek közös merőlegese $A'B'$ míg az $AB$ szakasz egy Saccheri négyszög szemközti alapja, azaz a ?Lemma szerint $|AB| \geq |A'B'| = 2|F_1F_2|$. $\square$

**0.1.1. Definíció.** *A $P$ pont a térben* **egyenesvonalú egyenletes** *mozgást végez, ha helyzetét egy $P(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, leképezés írja le, ami rendelkezik a következő két tulajdonsággal:*

*1, a $P(t)$ pontok kollineárisak,*

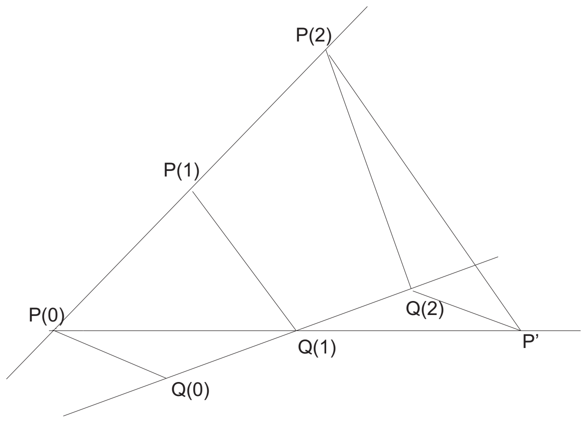
*2, minden $c \in \mathbb{R}^+$ pozitív valós szám és tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ valós szám esetén*

$$|P(0)P(ct)| = c|P(0)P(t)|$$

.

**0.1.2. Lemma.** *A $P$ és $Q$ pontok az abszolút térben egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek. Ekkor a $\overline{P}Q(t)$ szakasz hossza az eltelt $t$ időnek folytonos, konvex függvénye. Ha egyenesük kitérő, a vizsgált függvény szigorúan konvex.*

**Bizonyítás.** A folytonosság közvetlen következménye a háromszög egyenlőtlenségnek és definíció második feltételének. Ezért az általános konvexitási feltétel helyett




2. ábra. A transzverzális függvény konvexitása.

elegendő a felezőpontokra vonatkozó konvexitási feltételt igazolni. Tekintsük ehhez a $t = 0, 1, 2$ időpillanatokat és a megfelelő $P(0), P(1), P(2)$, $Q(0), Q(1), Q(2)$ kollineáris ponthármasokat. Igazolnunk kell, hogy $2|P(1)Q(1)| \leq |P(0)Q(0)| + |P(2)Q(2)|$. Legyen a $P(0)$ pont tükörképe $Q(1)$-re $P'$ (lsd. 2 ábra). Ekkor $|P(0)Q(0)| = |P'Q(2)|$ a megfelelő háromszögek egybevágósága miatt, és így a háromszögegyenlőtlenség szerint $|P(0)Q(0)|+|P(2)Q(2)| = |P'Q(2)|+|P(2)Q(2)| \geq |P'P(2)|$. Ugyanakkor a $P(0)P(2)P'$ háromszögre alkalmazva ?Lemmát, kapjuk, hogy $|P'P(2)| \geq 2|P(1)P(2)|$, ami éppen az állítást jelenti. A szigorú konvexitás a háromszögegyenlőtlenségnek az adott szituációban nem elfajuló voltából következik. $\square$

A tétel bizonyítása előtt jegyezzük meg, hogy egy a teljes számegyenesen értelmezett pozitív folytonos szigorúan konvex $f$ függvényre a következő esetek fordulhatnak elő:

$$\lim_{t\longrightarrow-\infty} f(t) = c < \infty \text{ és } \lim_{t\longrightarrow\infty} f(t) = \infty$$

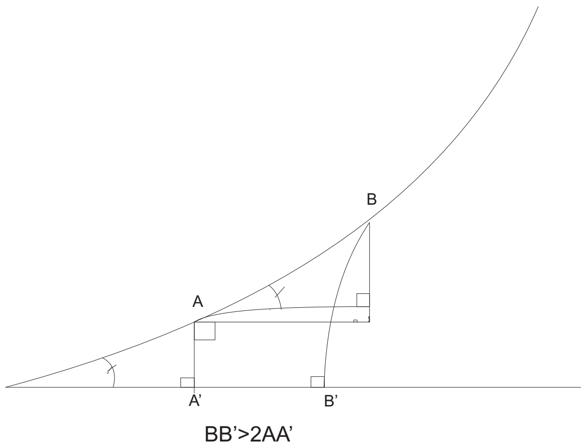
$$\lim_{t\longrightarrow-\infty} f(t) = \infty \text{ és } \lim_{t\longrightarrow\infty} f(t) = c < \infty$$

$$\lim_{t\longrightarrow-\infty} f(t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} f(t) = \infty.$$

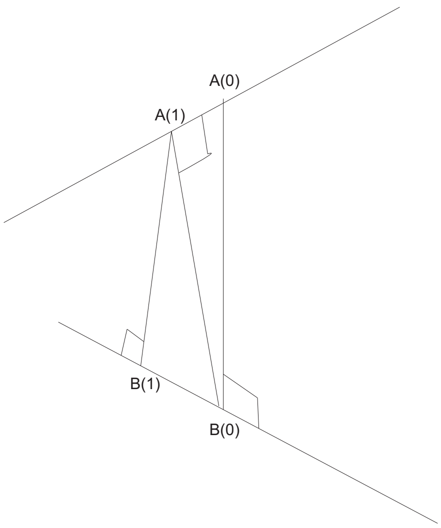
Az első két esetben az egyértelmű minimum hely csak a kibővített számegyenesen létezik a harmadik esetben ez a valós számegyenesünk szokásos közönséges pontja.

**0.1.1. Tétel.** *Abszolút tér nem egysíkú egyeneseinek van egyértelmű közös merőlegese, a két metszéspontot összekötő szakasz az összekötő szakaszok közül a legrövidebb. Ezt nevezzük a két egyenes normáltranszverzálisának.*

**Bizonyítás.** Legyen két egyenesünk $a$ és $b$. Tükrözzük $a$ pontjait rendre a $b$ egyenesre. Világos, hogy a tükörképek egy $a'$ egyenes pontjait adják. Az $a$ egyenesen végezzen az $A(t)$ pont egyenesvonalú egyenletes mozgást. Ennek merőleges vetülete $b$-n legyen $B(t)$, míg tükörképe $b$-re legyen $A'(t)$. Ekkor egybevágó háromszögek összehasonlításával azonnal adódik, hogy $A'(t)$ szintén egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. (Ugyanezt nem tudjuk elmondani $B(t)$-ről is!) Így alkalmazhatjuk a $f(t) : t \longrightarrow |A(t)A'(t)|$ függvényünkre a ? Lemmát. Szükséges még igazolnunk, hogy ha $a$ és $b$ kitérő egyenesek, akkor $f(t)$ függvény határértékei a két végtelenben végtelen. A szimmetria miatt elegendő igazolnunk, hogy $\lim_{t \longrightarrow \infty} f(t) = \infty$. Ehhez vizsgáljuk az $A(t)A'(t)$ szakasz helyett a fele akkora $A(t)B(t)$ szakasz hosszát. Legyen $b$ egyenesen keresztülhaladó $A(0)$ ponton áthaladó sík $\beta$. Az $a$ egyenes illetve $A(t)$ pont merőleges vetülete $\beta$-n legyen $a$" illetve $A$"$(t)$. Az $a$, $a$" egyenespár metsző így könnyen láthatóan $\lim_{t \longrightarrow \infty} |A(t)B(t)| \geq \lim_{t \longrightarrow \infty} |A(t)A"(t)| = \infty$.




3. ábra. A metsző egyenesek exponenciálisan távolodnak.




4. ábra. A normáltranszverzális a legrövidebb összekötő szakasz.

(Metsző egyenespárra az állítás leolvasható az 3 ábráról.) A tétel előtti esetek közül tehát a harmadik teljesül így az $f(t)$ függvénynek van egy egyértelműen létező minimum helye $t_0 = 0$. Ezek szerint az $A(0)B(0)$ szakasz $a$ és $b$ egyenesek legrövidebb $b$-re merőleges összekötő szakasza. Tegyük fel, hogy $a$-ra nem merőleges. Ekkor a $B(0)a$ síkban $B(0)$ pontból $a$-ra bocsátott merőleges egy rövidebb $B(0)A(1)$ összekötő szakaszt eredményezne. Ennél viszont az $A(1)$ metszéspontból $b$-re bocsátott merőleges $A(t_1)B(t_1)$ szakasz rövidebb, ami nem lehet, így $A(0)B(0)$ merőleges $a$-ra is. Mivel $t_0$ egyértelmű a normáltranszverzális is az. (Lásd 4 ábrát.)

$\square$