Másodrendű felületek az n-dimenziós térben

Vizsgáljuk az

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$$

egyenletet kielégítő helyvektorok végpontjai által meghatározott ponthalmazokat, amelyeket az n-dimenziós tér másodrendű felületeinek nevezünk. ($A \in R^{n\times n}$, $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in R^n$, $c \in R$)

Az inhomogén koordinátázásról áttérünk homogén koordinátázásra. Egyenletünk ekkor a homogén koordinátájú új $\mathbf{X}$ vektorral a következő alakot ölti:

$$\mathbf{X}^T \cdot \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & c \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Változtassuk meg koordinátarendszerünket úgy, hogy $\mathbf{t}$ vektor mutasson a régiből az új kezdőpontba és B legyen a báziscsere ortogonális mátrixa. Ekkor egyenletünk új alakja:

$$\mathbf{X}^T \cdot \begin{pmatrix} B^T AB & B^T A\mathbf{t} + B^T\mathbf{b} \\ (\mathbf{t}^T A + \mathbf{b}^T)B & \mathbf{t}^T A\mathbf{t} + \mathbf{b}^T\mathbf{t} + \mathbf{t}^T\mathbf{b} + c \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Célunk most B és $\mathbf{t}$ olyan választása, hogy a fenti egyenlet minél áttekinthetőbb alakot öltsön. Feltehető, hogy A szimmetrikus így B választható úgy, hogy $B^T AB$ diagonális legyen főátlójában a sajátértékeivel (λ_i.)

I, Ha valamennyi sajátérték nullától különbözik, A invertálható így a $\mathbf{t} = -A^{-1}\mathbf{b}$ választással egyenletünk alakja:

$$\mathbf{X}^T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & \cdots & . & . \\ 0 & \cdots & \lambda_n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\mathbf{b}^T A^{-1}\mathbf{b} + c \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = 0.$$

II, Általános esetben legyen az A ortonormált sajátvektorrendszere $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n\}$. Ekkor $B = [\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n]$ ugyanakkor a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{t}$ vektorok $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n\}$ bázisra vonatkozó $\mathbf{t} = t_1\mathbf{s}_1 + \ldots + t_n\mathbf{s}_n$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{s}_1 + \ldots + b_n\mathbf{s}_n$ előállításában szereplő t_i és b_i koordinátákkal

$$A\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{n} t_i\lambda_i\mathbf{s}_i$$

illetve innen a ($B^T = B_1$ figyelembe vételével)

$$(B^T A\mathbf{t} + B^T\mathbf{b})_i = t_i\lambda_i + b_i$$

előállításhoz jutunk. Azaz ha λ_i nem nulla akkor legyen $t_i = -\frac{b_i}{\lambda_i}$ ha pedig nulla, akkor az i-edik sor utolsó oszlopában t_i-től függetlenül b_i áll. (Minden sorban legfeljebb egy nem nulla szám szerepel.)A t_i számok egyértelműen meghatározottak ha λ_i nem nulla, egyébként a végső formula felírásában szerepük nincs, így további kritériumoknak megfelelő választásuk is lehetséges.

Az I, II, észrevételek alapján az $n = 3$ dimenziós esetben ismert felület típusok könnyen meghatározhatóak.