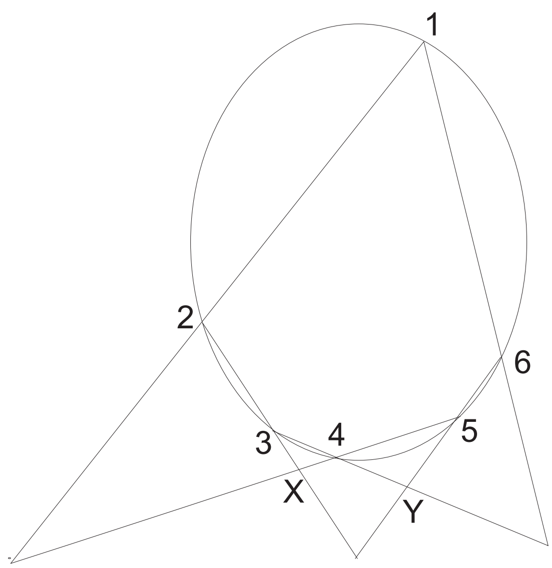
0.1. Kúpszeletek

0.1.1. Definíció. *A projektív sík két projektív de nem perspektív sugársorának képződményét (egymásnak megfelelő elemek metszéspontjai által létrejövő halmazt)* **kúpszeletnek** *nevezzük.*

0.1.1. Tétel (Pascal). *Kúpszeletbe írt hatszög szemközti oldalpárjainak metszéspontjai kollineárisak, azaz ha* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *pontok illeszkednek egy kúpszeletre, akkor a* $\circ = 12 \cap 45$, $\diamond = 23 \cap 56$, $\star = 34 \cap 61$ *pontok kollineárisak.*



1. ábra. Pascal tétel

Bizonyítás: Legyen $X = 23 \cap 45$, $Y = 34 \cap 56$ (lsd. 1.ábra). A kúpszeletet képzeljük a 2 és 6 tartójú sugársorok képződményének. Használva a sugárnégyes kettősviszonyának fogalmát kapjuk, hogy

$$(\star, Y, 4, 3) = (61, 65, 64, 63) = (21, 25, 24, 23) = (\circ, 5, 4, X).$$

Azaz homogén koordinátákkal

$$\star = \mathbf{m}, Y = \mathbf{y}, 4 = \alpha_1\mathbf{m} + \beta_1\mathbf{y}, 3 = \alpha_2\mathbf{m} + \beta_2\mathbf{y}$$

definíciók mellett, feltehető

$$\circ = \mathbf{n}, 5 = \mathbf{x}_5, 4 = \alpha_1\mathbf{n} + \beta_1\mathbf{x}_5, X = \alpha_2\mathbf{n} + \beta_2\mathbf{x}_5$$

is. Felhasználva, hogy

$$\alpha_1\mathbf{m} + \beta_1\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{n} + \beta_1\mathbf{x}_5$$

ekvivalens a

$$\alpha_1\mathbf{m} - \alpha_1\mathbf{n} = \beta_1\mathbf{x}_5 - \beta_1\mathbf{y}$$

egyenlőséggel, ami alapján adódik az

$$(\alpha_2\mathbf{m} + \beta_2\mathbf{y}) - (\alpha_2\mathbf{n} + \beta_2\mathbf{x}_5) = (\frac{-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1} + \beta_2)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_5) = (\frac{-\beta_2\alpha_1}{\beta_1} + \alpha_2)(\mathbf{y} - \mathbf{x}_5$$

egyenlőségpár. A szereplő együtthatók értelmesek mert α_1, β_1 nem lehet nulla. Így adódik, hogy a $3X$, $5Y$, $\circ, \star$ egyenesek egy pontra illeszkednek $\diamond$-ra. $\square$

0.1.2. Definíció. *A kúpszelet* **érintője** *egy olyan egyenes, melynek egyetlen pontja illeszkedik a kúpszeletre. Ezt a pontot az érintő érintési pontjának nevezzük.*

A projektív síkon érvényes dualitás alapján a kúpszeletet két projektív de nem perspektív pontsor képződményének is tekinthetjük. A képződmény most a megfelelő pontpárok összekötő egyenesei burkolóját jelenti, mely mint ponthalmaz, az érintési pontok halmaza is egyúttal. A Pascal tétel duálisa a Brianchon tétel:

0.1.2. Tétel (Brianchon). *Ha egy kúpszelet hat érintője* $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *akkor az* $(1\cap 2, 4\cap 5)$,$(2\cap 3, 5\cap 6)$,$(3\cap 4, 6\cap 1)$ *egyenesek egy ponton mennek át, a kúpszelet Brianchon pontján.*