

Matematika A1a - Analízis elméleti kérdései

(műszaki menedzser szak, 2018. ősz)

Kör egyenlete

Az (x_0, y_0) középpontú, R sugarú kör egyenlete a síkon $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Polinom

Az $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ hozzárendelést polinomnak nevezzük $(a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R})$.

Az a_n a főegyüttható, a_0 a konstanstag.

Polinom gyöke

Egy $p(x)$ polinom gyöke $x_0 \in \mathbb{R}$, ha $p(x_0) = 0$.

(Kis-)Bézout-tétel

Ha x_0 gyöke egy $p(x)$ polinomnak, akkor az kiemelhető, azaz létezik olyan $q(x)$ polinom, hogy $p(x) = (x - x_0)q(x)$.

Egészegyütthatós polinom racionális gyökei

Az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ egészegyütthatós polinomnak $(a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z})$ csak olyan $\frac{p}{q}$ racionális gyöke van (ahol p és q relatív prím), melyre p osztja a_0 -t és q osztja a_n -et.

Függvény értelmezési tartománya

Az $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(A \subseteq \mathbb{R})$ értelmezési tartománya az A halmaz, melyet D_f -fel szoktunk jelölni.

Függvény értékkészlete

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ értékkészlete azon valós számok halmaza, melyet a függvény felvesz. Jelölés: R_f . Azaz $R_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$.

Monoton növekvő függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ monoton nő, ha $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in D_f)$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Szigorúan monoton növekvő függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ szigorúan monoton nő, ha $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in D_f)$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.

Monoton csökkenő függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ monoton csökken, ha $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in D_f)$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Szigorúan monoton csökkenő függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ szigorúan monoton csökken, ha $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in D_f)$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

Alulról korlátos függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ alulról korlátos, ha létezik $k \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $f(x) \geq k$ minden $x \in D_f$ esetén.

Felülről korlátos függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ felülről korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $f(x) \leq K$ minden $x \in D_f$ esetén.

Korlátos függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ korlátos, ha alulról és felülről is korlátos, azaz léteznek $k, K \in \mathbb{R}$ valós számok, hogy $k \leq f(x) \leq K$ minden $x \in D_f$ esetén. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy létezik $K \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $|f(x)| \leq K$ minden $x \in D_f$ esetén.

Periodikus függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ periodikus, ha van olyan $d \in \mathbb{R}$ nemnulla szám, hogy $x \in D_f$ esetén $x \pm d \in D_f$ és $f(x) = f(x \pm d)$.

Páros függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ páros, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = f(x)$.

Páratlan függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) páratlan, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = -f(x)$.

Invertálható függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) invertálható, ha az értékkészletének minden elemét egyszer veszi fel, azaz $f(x_1) = f(x_2)$ esetén $x_1 = x_2$.

Inverz függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ invertálható függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) inverze az az $f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$ függvény, melyre $f^{-1}(f(x)) = x$ minden $x \in D_f$ -re.

Valós függvény véges határértéke véges pontban

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke az x_0 pontban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Valós függvény végtelen határértéke véges pontban

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke az x_0 pontban $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $K < f(x)$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Valós függvény végtelen határértéke véges pontban

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke az x_0 pontban $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Valós függvény véges határértéke a $+\infty$ -ben

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke a $+\infty$ -ben $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $L < x$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Valós függvény végtelen határértéke a $+\infty$ -ben

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke a $+\infty$ -ben $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $L < x$ esetén $x \in D_f$ és $K < f(x)$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Valós függvény végtelen határértéke a $+\infty$ -ben

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke a $+\infty$ -ben $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $L < x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Valós függvény véges határértéke a $-\infty$ -ben

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke a $-\infty$ -ben $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $x < L$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Valós függvény végtelen határértéke a $-\infty$ -ben

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke a $-\infty$ -ben $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $x < L$ esetén $x \in D_f$ és $K < f(x)$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Valós függvény végtelen határértéke a $-\infty$ -ben

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) határértéke a $-\infty$ -ben $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $L \in \mathbb{R}$, hogy $x < L$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Valós függvény véges jobb oldali határértéke

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) jobb oldali határértéke az x_0 pontban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

Valós függvény végtelen jobb oldali határértéke

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) jobb oldali határértéke az x_0 pontban $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $K < f(x)$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$.

Valós függvény végtelen jobb oldali határértéke

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) jobb oldali határértéke az x_0 pontban $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.

Valós függvény véges bal oldali határértéke

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) bal oldali határértéke az x_0 pontban $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

Valós függvény végtelen bal oldali határértéke

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) bal oldali határértéke az x_0 pontban $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $K < f(x)$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$.

Valós függvény végtelen bal oldali határértéke

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) bal oldali határértéke az x_0 pontban $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $\delta > 0$, hogy $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$. Jelölése: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$.

Valós függvény folytonossága egy pontban

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Azaz minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Valós függvény folytonossága

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) folytonos, ha minden $x_0 \in D_f$ pontban folytonos.

Szakadási hely

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pont szakadási helye, ha a függvény x_0 -ban nem folytonos.

Megszüntethető szakadási hely

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ szakadási helye megszüntethető, ha van olyan A szám, hogy a függvény értékét x_0 -ban A -ra változtatva, az így kapott függvény folytonos x_0 -ban.

Ugrás/elsőfajú szakadási hely

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ szakadási helye ugráshely, ha létezik és véges az x_0 -beli jobb és bal oldali határérték, de nem egyenlőek.

Szinguláris/másodfajú szakadási hely

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ szakadási helye szinguláris, ha az x_0 -beli jobb vagy bal oldali határértéknek legalább egyike nem létezik vagy végtelen.

Weierstrass-tétel

Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor van olyan $\alpha, \beta \in [a, b]$, melyekre $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ minden $x \in [a, b]$ -re.

Bolzano-tétel

Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket.

Valós függvény differenciálhatósága egy pontban

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban differenciálható, ha létezik és véges a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték.

Valós függvény differenciálhatósága

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) differenciálható, ha minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható.

Derivált függvény

Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) derivált függvénye az a függvény, mely minden $x_0 \in D_f$ ponthoz hozzárendeli az

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határértéket.

Inverz függvény differenciálási szabálya

Ha az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) szigorúan monoton nő és folytonos $x_0 \in D_f$ egy környezetében, továbbá x_0 -ban differenciálható és $f'(x_0) \neq 0$, akkor az f^{-1} inverz függvény differenciálható $f(x_0)$ -ban, és $f^{-1}'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Összetett függvény differenciálási szabálya

Ha az $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, g differenciálható az x_0 pontban, f differenciálható a $g(x_0)$ pontban, akkor az $f \circ g$ függvény differenciálható az x_0 pontban, és $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Lokális minimum

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban lokális minimuma van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Lokális maximum

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban lokális maximuma van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Abszolút minimum

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban abszolút minimuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Abszolút maximum

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban abszolút maximuma van, ha minden $x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

Lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Ha az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban lokális szélsőértéke (minimuma vagy maximuma) van és ebben a pontban differenciálható, akkor $f'(x_0) = 0$.

Lokális szélsőérték létezésének elsőrendű elégséges feltétele

Ha az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényre ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) $f'(x_0) = 0$, és x_0 -ban előjelet vált a derivált függvény, akkor a függvénynek x_0 -ban lokális szélsőértéke van.

Lokális maximum létezésének másodrendű elégséges feltétele

Ha az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényre ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor a függvénynek x_0 -ban lokális maximuma van.

Lokális minimum létezésének másodrendű elégséges feltétele

Ha az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényre ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor a függvénynek x_0 -ban lokális minimuma van.

Rolle-tétel

Ha az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $[a, b]$ -n folytonos, (a, b) -n differenciálható és $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $x \in (a, b)$ belső pont, amire $f'(x) = 0$.

Lagrange-féle középértéktétel

Ha az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $[a, b]$ -n folytonos, (a, b) -n differenciálható, akkor van olyan $x \in (a, b)$ belső pont, amire

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Cauchy-féle középértéktétel

Ha $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények az $[a, b]$ -n folytonosak, (a, b) -n differenciálhatóak, a g deriváltja az (a, b) -n sehol sem 0, akkor van olyan $x \in (a, b)$ belső pont, amire

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Valós függvény konvexitása

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $I \subseteq D_f$ intervallumon konvex, ha az I intervallumon a függvény

grafikonja feletti tartomány konvex. Ha a függvény differenciálható, akkor ez ekvivalens azzal, hogy a grafikon az érintőegyenes felett halad, azaz $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ minden $x, x_0 \in I$ esetén.

Valós függvény konkávitása

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $I \subseteq D_f$ intervallumon konkáv, ha az I intervallumon a függvény grafikonja alatti tartomány konvex. Ha a függvény differenciálható, akkor ez ekvivalens azzal, hogy a grafikon az érintőegyenes alatt halad, azaz $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ minden $x, x_0 \in I$ esetén.

Inflexiós pont

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban inflexiós pontja van, ha x_0 -ban differenciálható, és itt a függvény konvexitást vált, azaz a függvény előtte konvex és utána konkáv vagy fordítva.

Bernoulli–L'Hospital-szabály

Tegyük fel, hogy az $f(x), g(x)$ differenciálható függvények értelmezettek az x_0 pont egy környezetében, esetleg az x_0 -ban nem. Ekkor ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ vagy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$, és ha

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Hasonló állítás igaz, ha $x_0 = \pm\infty$, illetve bal és jobb oldali határértékekre is.

Primitív függvény

Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum) primitív függvénye $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, ha F differenciálható I -n, és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén.

Határozatlan integrál

Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum) határozatlan integrálja az összes primitív függvényének halmaza. Jelölés: $\int f(x) dx$.

Parciális integrálás elve

Ha f és g differenciálható függvények az I intervallumon, itt $f'g$ primitív függvénye létezik, akkor fg' primitív függvénye is létezik, és

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

Newton–Leibniz-szabály

Ha $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálható $[a, b]$ -n, és $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvénye f -nek az (a, b) -n (azaz F differenciálható (a, b) -n, és itt $F'(x) = f(x)$), továbbá F folytonos $[a, b]$ -n, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Görbe ívhossza

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény grafikonjának az ívhossza $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Forgástest térfogata

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény grafikonját az x tengely körül megforgatva kapott forgástest térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Forgástest palást felszíne

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény grafikonját az x tengely körül megforgatva kapott forgástest palástjának felszíne

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$