

19. előadás

Feltételes szélsőérték

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2021. április 27.

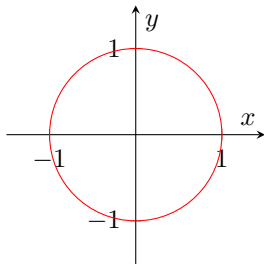
Bevezető feladat

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Ha $x^2 + y^2 = 1$, akkor a függvény:

$$f(x, y) = 1 + 2y - 1 = 2y$$

Az $x^2 + y^2 = 1$ feltételből az is következik, hogy $-1 \leq y \leq 1$, így a függvény minimuma -2 , a függvény maximuma 2 .



Feltételes szélsőérték:

Egy többváltozós $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szélsőértékeit keressük egy $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvény nullhelyein.

Lagrange-függvény

Az $f(x, y)$ függvény lokális szélsőértékeit keressük a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett. Ekkor tekintsük az

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Lagrange-függvényt, ahol λ a **Lagrange-multiplikátor**.

Tétel (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele):

Ha az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban lokális szélsőértéke van a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett, akkor a megfelelő pontban az $F(x, y, \lambda)$ függvény mindhárom parciális deriváltja 0.

Megjegyzés:

$F'_\lambda(x, y, \lambda) = g(x, y)$ eltűnése pontosan a feltétel.

Elégséges feltétel

Tétel (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele):

Ha a $P_0(x_0, y_0)$ környezetében az $f(x, y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek, és folytonosak, továbbá egy (x_0, y_0, λ_0) hármasra

$$F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \quad (\text{stacionárius pont})$$

és

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{x\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{y\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ F''_{\lambda x}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{\lambda y}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{\lambda\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_x(x_0, y_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 2F'_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_x(x_0, y_0)g'_y(x_0, y_0) - F'_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_x(x_0, y_0)^2 - \\ &\quad - F'_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_y(x_0, y_0)^2 \end{aligned}$$

- ▶ pozitív, akkor lokális maximuma van
- ▶ negatív, akkor lokális minimuma van

a $P_0(x_0, y_0)$ pontban az $f(x, y)$ függvénynek a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett.

Példa

Keressük meg az $f(x, y) = 6x + 8y - 10$ függvény szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett!

A $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25$, és így

$$F(x, y, \lambda) = 6x + 8y - 10 + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$$

A parciális deriváltjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 6 + \lambda \cdot 2x = 6 + 2\lambda x \quad \Rightarrow x = -\frac{6}{2\lambda} = -\frac{3}{\lambda}$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 8 + \lambda \cdot 2y = 8 + 2\lambda y \quad \Rightarrow y = -\frac{8}{2\lambda} = -\frac{4}{\lambda}$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 25$$

Az utolsó egyenletbe helyettesítve:

$$\left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\lambda}\right)^2 = 25$$

$$\frac{25}{\lambda^2} = 25$$

$$\lambda = \pm 1$$

Így $x = \mp 3$, és $y = \mp 4$. Tehát a stacionárius pontok: $(-3, -4, 1)$ és $(3, 4, -1)$.

Példa folytatása

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{array}{ll} F'_x(x, y, \lambda) = 6 + 2\lambda x & F''_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda \\ F'_y(x, y, \lambda) = 8 + 2\lambda y & F''_{xy}(x, y, \lambda) = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 25 & \Rightarrow F''_{yy}(x, y, \lambda) = 2\lambda \\ & F''_{\lambda x}(x, y, \lambda) = 2x \\ & F''_{\lambda y}(x, y, \lambda) = 2y \end{array}$$

Így a Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -8x^2\lambda - 8y^2\lambda,$$

ami a $(-3, -4, 1)$ pontban negatív, így itt lokális minimum van,
míg a $(3, 4, -1)$ pontban pozitív, így itt lokális maximum van.

Az adott feltétel mellett a függvény

(lokális) minimuma: $f(-3, -4) = -60$,

(lokális) maximuma: $f(3, 4) = 40$.

Feladat

Mennyi a maximuma xy -nak, ha $x + y = 10$?

Feladat

Mennyi a maximuma xy -nak, ha $x + y = 10$?

$$f(x, y) = xy$$

$$g(x, y) = x + y - 10$$

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 10)$$

A páciális deriváltak:

$$F'_x(x, y, \lambda) = y + \lambda \quad \Rightarrow y = -\lambda$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = x + \lambda \quad \Rightarrow x = -\lambda$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 10 \quad \Rightarrow -\lambda + (-\lambda) - 10 = 0$$

$\lambda = -5$, és így $x = y = 5$. Azaz egyetlen stacionárius pont van: $(5, 5, -5)$.

Hesse-féle determináns:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Tehát az $(5, 5)$ pont lokális maximumhelye a függvénynek az adott feltétel mellett. A maximum értéke: $f(5, 5) = 25$.