1. előadás

Halmazok, intervallumok, egyenletek és egyenlőtlenségek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. szeptember 3.

Halmazok

Néhány nevezetes halmaz:

- $\emptyset$ üres halmaz
- $\mathbb{N}$ természetes számok 0 *benne van?*
- $\mathbb{Z}$ egész számok
- $\mathbb{Q}$ racionális számok
- $\mathbb{R}$ valós számok
- $\mathbb{C}$ komplex számok (*nem kell tudni, majd második félévben*)

Néhány halmazművelet:
A és B halmaz

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$ unió
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$ metszet
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$ kivonás

Ha H az alaphalmaz, akkor $\overline{A} = H \setminus A$ komplementer.

Az A és a B halmaz diszjunkt, ha nincs közös elemük: $A \cap B = \emptyset$.

Halmazok folytatás

Részhalmaz: $B \subseteq A$, ha B minden eleme benne van A-ban, azaz

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Szigorú részhalmaz: $B \subset A$ vagy $B \subsetneq A$, ha $B \subseteq A$, de $A \neq B$

Az A és a B halmazok Descartes-szorzata:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Példa:
Legyen $A = \{1; 2\}$ és $B = \{2; 3\}$.
Mi lesz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $B \times A$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$?

Halmazok folytatás

Részhalmaz: $B \subseteq A$, ha B minden eleme benne van A-ban, azaz

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Szigorú részhalmaz: $B \subset A$ vagy $B \subsetneq A$, ha $B \subseteq A$, de $A \neq B$

Az A és a B halmazok Descartes-szorzata:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Példa:
Legyen $A = \{1; 2\}$ és $B = \{2; 3\}$.
Mi lesz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $B \times A$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$?

$$A \cup B = \{1; 2; 3\}.$$
$$A \cap B = \{2\}.$$
$$A \setminus B = \{1\}.$$
$$A \times B = \{(1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3)\}$$
$$B \times A = \{(2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 2)\}$$
$$(A \times B) \setminus (B \times A) = \{(1, 2); (1, 3); (2, 3)\}$$

Intervallumok

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} && \text{zárt intervallum} \\
(a,b) = \,]a,b[\, &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{nyílt intervallum} \\
[a,b) = [a,b[\, &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} && \text{félig nyílt, félig zárt intervallum} \\
& && \text{jobbról nyílt, balról zárt intervallum} \\
(a,b] = \,]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} && \text{félig nyílt, félig zárt intervallum} \\
& && \text{jobbról zárt, balról nyílt intervallum}
\end{aligned}
$$

A fentiekben a és b lehet végtelen is, de ekkor azon a végén csak nyílt lehet:

$$
\begin{aligned}
(a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \text{ nyílt intervallum} \\
[a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\} \text{ zárt intervallum} \\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \text{ nyílt intervallum} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\} \text{ zárt intervallum} \\
(-\infty,+\infty) &= \mathbb{R} \text{ valós számok}
\end{aligned}
$$

Egy $x \in \mathbb{R}$ valós szám $\varepsilon > 0$ sugarú környezete:

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$

Egy egyenlet

Oldjuk meg az $x + 1 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Egy egyenlet

Oldjuk meg az $x + 1 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned} x + 1 &= \sqrt{7+x} && \text{négyzetre emelés:} \\ &\Downarrow \\ (x+1)^2 &= 7 + x && \text{kifejtés:} \\ &\Updownarrow \\ x^2 + 2x + 1 &= 7 + x && \text{átrendezés:} \\ &\Updownarrow \\ x^2 + x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Másodfokú megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

Visszahelyettesítve az $x_1 = 2$ megoldás, míg az $x_2 = -3$ nem, a négyzetre emelés során nyertük ezt a hamis gyököt.

Még egy egyenlet

Oldjuk meg az $\dfrac{x^2 + x}{x + 3} = x$ egyenletet a valós számok halmazán.

Még egy egyenlet

Oldjuk meg az $\frac{x^2+x}{x+3} = x$ egyenletet a valós számok halmazán.

Mivel a nevezőben $x+3$ áll, ami nem lehet nulla, így $x \neq -3$.

Szorozzunk be $(x+3)$-mal:

$$\begin{aligned} x^2+x &= x(x+3) \\ x^2+x &= x^2+3x \\ 0 &= 2x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Tehát a megoldás $x = 0$ (ami nem -3).

Egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg a $|2x + 3| \leq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg a $|2x+3| \leq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

A $|2x+3| \leq 5$ egyenlőtlenség pontosan azt jelenti, hogy

$$-5 \leq 2x+3 \leq 5$$
$$-8 \leq 2x \leq 2$$
$$-4 \leq x \leq 1$$

Tehát a megoldás a $[-4, 1]$ intervallum.

Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az $\dfrac{1}{x+3} \leq 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az $\dfrac{1}{x+3} \leq 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Megint kikötjük, hogy $x \neq -3$. Két eset lehetséges $x+3$ előjele szerint:

1. eset $x+3$ pozitív, azaz $-3 < x$.

Ekkor $(x+3)$-mal beszorozva nem változik az egyenlőtlenség iránya:

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2(x+3) \\ 1 &\leq 2x+6 \\ -5 &\leq 2x \\ -2{,}5 &\leq x, \end{aligned}$$

ekkor valóban teljesül, hogy $-3 < x$.

2. eset $x+3$ negatív, azaz $-3 > x$.

Ekkor $(x+3)$-mal beszorozva megfordul az egyenlőtlenség iránya:

$$\begin{aligned} 1 &\geq 2(x+3) \\ 1 &\geq 2x+6 \\ -5 &\geq 2x \\ -2{,}5 &\geq x, \end{aligned}$$

de most $-3 > x$, amikoris már a $-2{,}5 \geq x$ automatikusan teljesül.

Tehát a megoldás: $x \in (-\infty; -3) \cup [-2{,}5; +\infty)$.

Számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség

Ha $a, b \in \mathbb{R}_+$, akkor a számtani közepük $\frac{a+b}{2}$, mértani közepük $\sqrt{ab}$. Ekkor

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

és egyenlőség pontosan $a = b$ esetén van.

Bizonyítás:
A fenti ekvivalens a négyzetek közti egyenlőtlenséggel (nemnegatívak):

$$\begin{aligned} ab &\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ ab &\leq \frac{(a+b)^2}{4} \\ 4ab &\leq (a+b)^2 \\ 4ab &\leq a^2 + 2ab + b^2 \\ 0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\ 0 &\leq (a-b)^2, \end{aligned}$$

ami mindig teljesül.

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b$.

Feladat

Ha két szám összege 10, akkor lefeljebb mennyi a szorzatuk?

Feladat

Ha két szám összege 10, akkor lefeljebb mennyi a szorzatuk?

Legyen a két szám a és b. Tudjuk, hogy $a + b = 10$. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{10}{2} = 5$$
$$ab \leq 25,$$

így a szorzatuk legfeljebb 25.

Számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség általában

Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$, akkor a számtani közepük $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, mértani közepük $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Fennáll, hogy

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

és egyenlőség pontosan $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ esetén van.

Ezt nem bizonyítjuk be.

Házi feladat

Oldjuk meg az $x + 5 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán.

Házi feladat

Oldjuk meg az $x + 5 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán.

A megoldás: $x = -3$, a -6 hamis gyök.