2. előadás

Függvényábrázolás és bizonyítási módszerek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. szeptember 4.

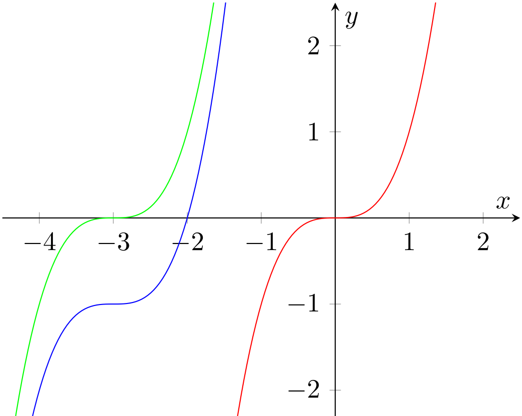
Függvényábrázolás

Ábrázoljuk az $f(x) = (x+3)^3 - 1$ függvény grafikonját.

A $h(x) = (x+3)^3$ függvény grafikonját a $g(x) = x^3$ függvény grafikonjának 3 egységgel való balra tolásával kapjuk.

Általánosan: ha az x-hez hozzáadunk (levonunk) x_1-et, akkor a grafikont x_1-gyel balra (jobbra) toljuk.

Végül az $f(x) = (x+3)^3 - 1$ függvény grafikonját a h függvény grafikonjának 1-gyel való lefelé tolásával kapjuk.



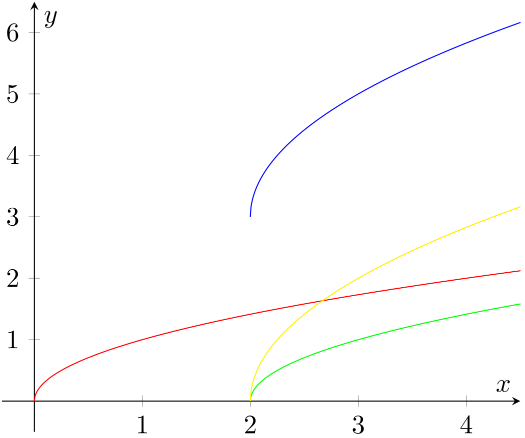
Függvényábrázolás

Ábrázoljuk az $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 3$ függvény grafikonját.

Függvényábrázolás

Ábrázoljuk az $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 3$ függvény grafikonját.

Hasonlóan az előzőhöz: A $\sqrt{x}$ grafikonját 2 egységgel jobbra tolva kapjuk a $\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját. Ennek a $2\sqrt{x-2}$ a kétszerese, tehát ezt meg kell egy kicsit nyújtanunk, és végül 3-mal való feltolással kapjuk a $2\sqrt{x-2}+3$ grafikonját.

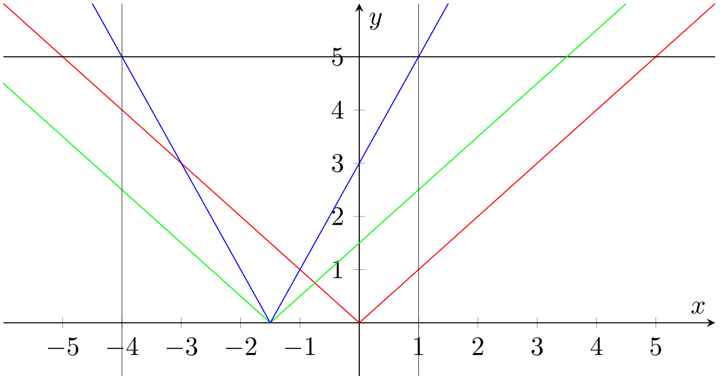


Egy tegnapi feladat

Oldjuk meg *grafikusan* a $|2x+3| \leq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

A $|2x+3|$ grafikonját az ismert $|x|$ grafikonból transzformációkkal kaphatjuk:

Mivel $|2x+3| = 2|x+1{,}5|$, így először az $|x+1{,}5|$ függvény grafikonját ábrázoljuk.



Így le tudjuk olvasni a megoldást: $[-4, 1]$.

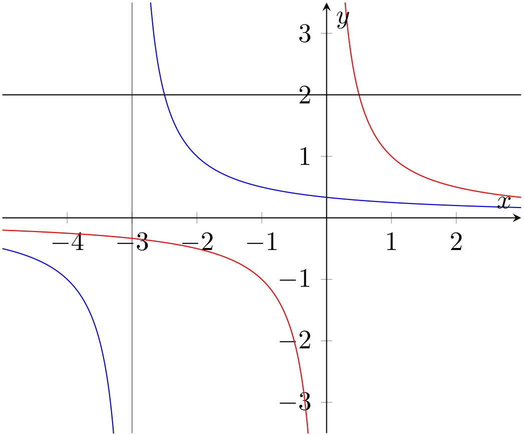
Még egy tegnapi feladat

Oldjuk meg *grafikusan* az $\dfrac{1}{x+3} \leq 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Még egy tegnapi feladat

Oldjuk meg *grafikusan* az $\dfrac{1}{x+3} \leq 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Az $\dfrac{1}{x+3}$ grafikonját az ismert $\dfrac{1}{x}$ grafikonból eltolással kaphatjuk:



Így le tudjuk olvasni a megoldást: $(-\infty; -3) \cup [-2{,}5; +\infty)$.

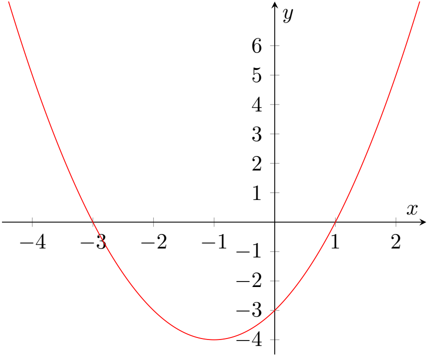
Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az $x^2 + 2x > 3$ egyenlőtlenséget.

Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az $x^2 + 2x > 3$ egyenlőtlenséget.

Teljes négyzetté alakítással:



$$\begin{aligned} x^2 + 2x &> 3 \\ (x+1)^2 - 1 &> 3 \\ (x+1)^2 &> 4 \\ |x+1| &> 2 \\ x + 1 < -2 \quad &\text{vagy} \quad x + 1 > 2 \\ x < -3 \quad &\text{vagy} \quad x > 1 \end{aligned}$$

azaz $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Másik lehetőség: az $x^2 + 2x - 3$ függvény grafikonja egy parabola (mivel másodfokú), mely felfelé nyílik (mivel pozitív a főegyüttható).
A nullhelyektől balra, illetve jobbra vannak a megfelelő értékek:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$$

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(1,2)$ és a $Q(3,4)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(1,2)$ és a $Q(3,4)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Az egyenes *meredeksége*: 2 egységet emelkedünk, míg 2 egységet megyünk jobbra, e kettő hányadosa a meredekség: 1.

Általában a $P_1(x_1,y_1)$ és $P_2(x_2,y_2)$ által meghatározott egyenes meredeksége $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Tehát az egyenes *egyenlete* $y = 1 \cdot x + b$, ahol a b számot úgy kell meghatározni, hogy a pontjaink kielégítsék ezt az egyenletet. $b = 1$.

Általában $y - y_1 = m(x - x_1)$, ahol $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(5,1)$ és a $Q(2,3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(5,1)$ és a $Q(2,3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

$x_1 = 5, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = 3$.

A meredekség: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-1}{2-5} = -\dfrac{2}{3}$.

Az egyenes egyenlete:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= -\frac{2}{3}(x-5) \\ y &= -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(5,1)$ és a $Q(2,3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

$x_1 = 5, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = 3$.

A meredekség: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-1}{2-5} = -\dfrac{2}{3}$.

Az egyenes egyenlete:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= -\frac{2}{3}(x-5) \\ y &= -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

Hogyan jellemezhetőek az egyenes alatti és feletti pontok?

Egyenes alatti pontok: $y < -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{13}{3}$.

Egyenes feletti pontok: $y > -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{13}{3}$.

Teljes indukció

$$1 + 2 + \cdots + n = ?$$

Készítsünk táblázatot!

n	1	2	3	4	5	6
összeg	1	3	6	10	15	21

Megsejthetjük, hogy

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$-ra mindenesetre igaz.

Ha igaz n-re, akkor $(n+1)$-re vajon igaz?

$$1 + 2 + \cdots + (n+1) = 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= \left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

Tehát akkor igaz $(n+1)$-re is. 1-től n-ig végiglépegetve, tetszőleges n-re igaz.

Feladat

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=?$$

Feladat

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\,?$$

Megint megnézzük kis n-ekre:

n	1	2	3	4
összeg	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

Sejtés: az összeg $\dfrac{n}{n+1}$.

A sejtés $n=1$ esetén helyes.

Ha tudjuk n-re, akkor $(n+1)$-re:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}=\frac{n+1}{n+1+1}$$

Ezzel beláttuk a sejtésünket.

Indirekt bizonyítás

Mutassuk meg, hogy a $\sqrt{2}$ szám irracionális.

Feltesszük, hogy nem, azaz, hogy racionális, két egész szám hányadosa:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \qquad p, q \in \mathbb{Z}$$

Négyzetre emelve, és átszorozva:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 2q^2 &= p^2 \end{aligned}$$

A számelmélet alaptétele szerint mindkét oldal egyértelműen prímtényezők szorzatára bontható. Így mindkét oldalon a 2 kitevője azonos.

Másrészt négyzetszámokban minden prímtényező kitevője páros.

Ez ellentmondás, így indirekt feltevésünk volt hamis.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális.

Házi feladat

Oldjuk meg az $-x^2 + 3x > 2$ egyenlőtlenséget.

Házi feladat

Oldjuk meg az $-x^2+3x>2$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: $x \in (1,2)$.