4. előadás

Függvények

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. szeptember 11.

Monotonitás

Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vagy $f: D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvény

- monoton nő, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- szigorúan monoton nő, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- monoton csökken, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- szigorúan monoton csökken, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- monoton, ha $f(x)$ monoton nő vagy monoton csökken.
- szigorúan monoton, ha $f(x)$ szigorúan monoton nő vagy szigorúan monoton csökken.

Példák:
$f(x) = x$ szigorúan monoton nő.
$g(x) = x^2$ szigorúan monoton csökken $(-\infty, 0]$-n és szigorúan monoton nő $[0, +\infty)$-n, de $\mathbb{R}$-en nem monoton.
$h(x) = [x]$ monoton nő, de nem szigorúan monoton nő.
$i(x) = 2$ monoton nő és monoton csökken.

Ha egy függvény monoton nő és monoton csökken, akkor konstans függvény.

Korlátosság

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény

- alulról korlátos, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \geq k$ minden $x \in D_f$ esetén (k alsó korlát). $\rightsquigarrow$ legnagyobb alsó korlát
- felülről korlátos, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \leq K$ minden $x \in D_f$ esetén (K felső korlát). $\rightsquigarrow$ legkisebb felső korlát
- korlátos, ha alulról és felülről korlátos, azaz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x)| \leq K$ minden $x \in D_f$ esetén.

Példák:
$f(x) = |x|$ alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát a 0, de felülről nem korlátos, így nem is korlátos.
$g(x) = \sin x$ alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát -1, felülről korlátos, legkisebb felső korlát a 1, így korlátos is.

Periodicitás

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény periodikus, ha létezik $d \neq 0$ úgy, hogy $x \in D_f$ esetén $x \pm d \in D_f$ és $f(x+d) = f(x)$ (d szerint periodikus).

Ha egy függvény d szerint periodikus, akkor kd szerint is periodikus ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).

A legkisebb pozitív periódus a főperiódus (ha van).

Egy példa, amikor nincs: Dirichlet-függvény:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$$

Példák:
$\sin x, \cos x$ 2π szerint periodikus
$\operatorname{tg} x$ π szerint periodikus
$\{x\}$ törtrész függvény 1 szerint periodikus

Paritás

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény

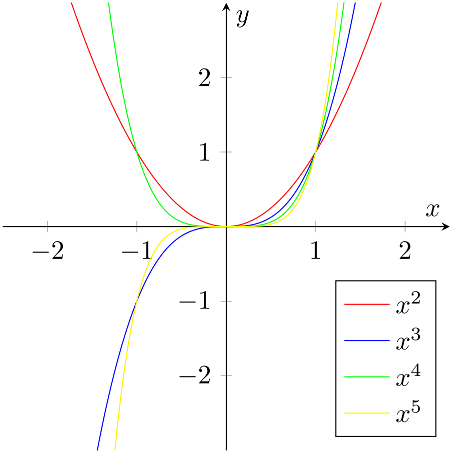
- páros, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és $f(-x) = f(x)$.
  A grafikon az y tengelyre tükrös.
- páratlan, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és $f(-x) = -f(x)$.
  A grafikon az origóra tükrös.

Példák:
$x^2, |x|, \cos x$ páros
$x, x^3, \sin x$ páratlan
x^n páros, ha n páros, és páratlan, ha n páratlan

Függvénygrafikon

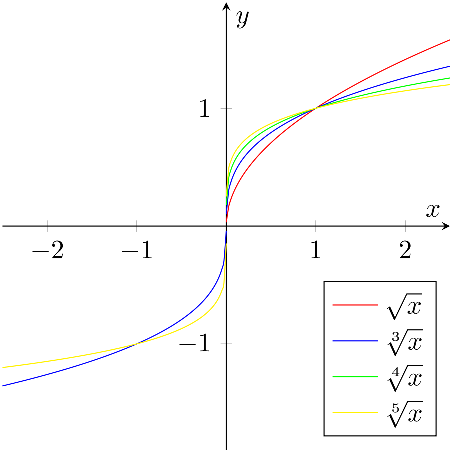
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény grafikonja $\{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$.

Az x^n függvény ($n \in \mathbb{Z}_+$) grafikonja páros n esetén parabolához hasonlít, míg páratlan $n \geq 3$ esetén az x^3 grafikonjához.



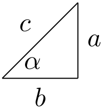
Függvénygrafikon: gyökfüggvények

Az $\sqrt[n]{x}$ függvény páros n esetén csak a nemnegatív értékekre van értelmezve.



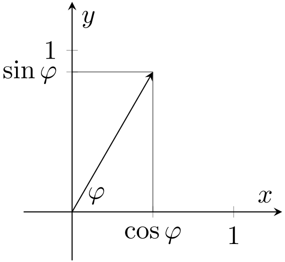
Trigonometrikus függvények

Derékszögű háromszögben (α hegyesszög):



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Általánosan:
Az x tengellyel φ szöget bezáró egységvektor vetülete
az x tengelyre $\cos\varphi$,
az y tengelyre $\sin\varphi$.



Összefüggés:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

Továbbá mindkét függvény 360° szerint periodikus.

A tangens és kotangens függvény (ahol értelmes):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \qquad \varphi \neq 90^\circ + k\cdot 180^\circ, \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \qquad \varphi \neq k\cdot 180^\circ, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Előjelek

$\cos\varphi < 0$ $\sin\varphi > 0$ $\operatorname{tg}\varphi < 0$	$\cos\varphi > 0$ $\sin\varphi > 0$ $\operatorname{tg}\varphi > 0$
$\cos\varphi < 0$ $\sin\varphi < 0$ $\operatorname{tg}\varphi > 0$	$\cos\varphi > 0$ $\sin\varphi < 0$ $\operatorname{tg}\varphi < 0$

Addíciós tételek

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Speciális esetek:

$$\begin{aligned}
\beta = 90^\circ &: \\
\sin(\alpha+90^\circ) &= \sin\alpha\cos(90^\circ) + \cos\alpha\sin(90^\circ) = \sin\alpha\cdot 0 + \cos\alpha\cdot 1 = \cos\alpha \\
\cos(\alpha+90^\circ) &= \cos\alpha\cos(90^\circ) - \sin\alpha\sin(90^\circ) = \cos\alpha\cdot 0 - \sin\alpha\cdot 1 = -\sin\alpha \\
\beta = 180^\circ &: \\
\sin(\alpha+180^\circ) &= \sin\alpha\cos(180^\circ) + \cos\alpha\sin(180^\circ) = \sin\alpha\cdot(-1) + \cos\alpha\cdot 0 = -\sin\alpha \\
\cos(\alpha+180^\circ) &= \cos\alpha\cos(180^\circ) - \sin\alpha\sin(180^\circ) = \cos\alpha\cdot(-1) - \sin\alpha\cdot 0 = -\cos\alpha \\
\alpha = \beta &: \\
\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,
\end{aligned}$$

amiből

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

Nevezetes szögek szögfüggvényei

Egy szabályos háromszög felét tekintve megállapíthatjuk, hogy

$$\sin(60°) = \sqrt{3}/2 \qquad \text{és} \qquad \cos(60°) = 1/2.$$

Továbbá az egyenlőszárú derékszögő háromszögből

$$\sin(45°) = 1/\sqrt{2} \qquad \text{és} \qquad \cos(45°) = 1/\sqrt{2}.$$

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
$\cos$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	$-1/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tg	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.é.	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0

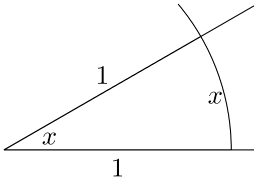
A továbbiakat a következő összefüggésekkel számolhatjuk:

$$\sin(\alpha+180°) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+180°) = -\cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,(\alpha+180°) = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Radián

A szögeket fok helyett radiánban is mérhetjük:

fok	radián
$0°$	0
$90°$	$\frac{\pi}{2}$
$180°$	π
$360°$	2π



Általában d fok $\dfrac{d}{180}\pi$ radiánban.

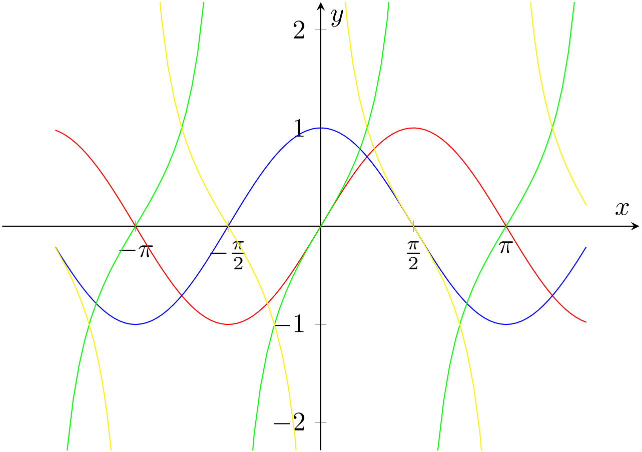
Fordítva: x radián $\dfrac{x}{\pi} \cdot 180°$.

Általában a trigonometrikus függvények „szebb'' függvények, ha radiánban számoljuk a szögeket.

Számologépnél ügyelni kell arra, hogy a megfelelő szögmértékegység legyen megadva!

Trigonometrikus függvények függvénygrafikonjai

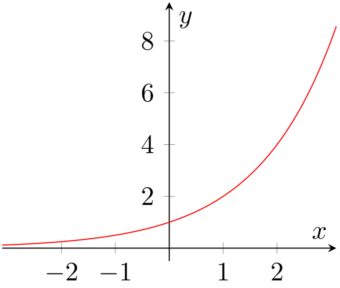
A $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ függvények grafikonjai:



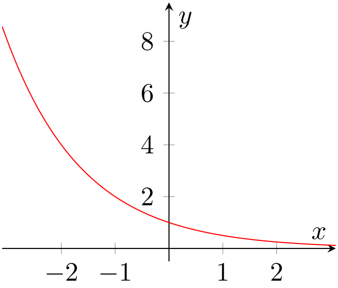
Exponenciális függvény

Ha $x = \frac{p}{q}$ racionális (p, q egész) és a pozitív, akkor $a^x = \sqrt[q]{a^p}$.
Ezt a függvényt „szépen” kiterjeszthetjük az összes valós számra.

$a > 1$ esetén ($a = 2$)



$0 < a < 1$ esetén ($a = \frac{1}{2}$)



Az $x \mapsto a^x$ függvényt exponenciális (hatványkitevő) függvénynek nevezzük.

Az $a = e = 2{,}718281828459\ldots$ esetén „az” exponenciális függvény (jelölés még: $\exp(x)$).

Exponenciális függvények azonosságai

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 1 \\
a^1 &= a \\
a^{x+y} &= a^x a^y \\
a^{xy} &= (a^x)^y \\
a^{-x} &= \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \\
a^x b^x &= (ab)^x
\end{aligned}
$$

Hiperbolikus függvények

koszinusz hiperbolikusz
(hiperbolikus koszinusz)

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

páros, konvex és $\operatorname{ch} x \geq 1$,
jelölés még: $\cosh$

szinusz hiperbolikusz
(hiperbolikus szinusz)

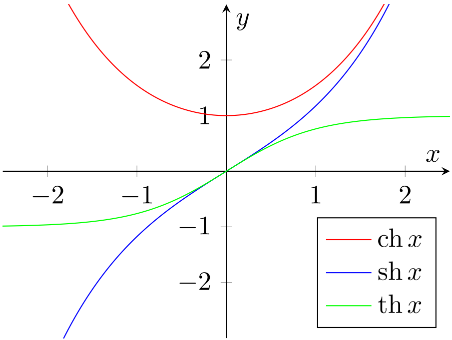
$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

páratlan, monoton nő,
jelölés még: $\sinh$

tangens hiperbolikusz
(hiperbolikus tangens)

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

páratlan, monoton nő, értéke -1 és 1 között,
jelölés még: $\tanh$



Összefüggés:

$$\operatorname{sh}^2 x + 1 = \operatorname{ch}^2 x$$

Hiperbolikus függvények tulajdonságainak bizonyítása

A monotonitást és a konvexitás bizonyítására később lesznek eszközeink.

A koszinusz hiperbolikusz többi tulajdonságainak bizonyítása:

A párosságot $-x$ behelyettesítésvel látjuk be:

$$\mathrm{ch}\,(-x) = \frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}\,(x)$$

Az alsó korlát bizonyításához a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk:

$$\mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \geq \sqrt{e^{x}e^{-x}} = \sqrt{e^{x-x}} = \sqrt{e^{0}} = \sqrt{1} = 1$$

Házi feladat a másik két függvény paritásának és a tangens hiperbolikusz alsó és felső korlátjának bizonyítása.

Összefüggés bizonyítása:

$$\mathrm{sh}^2 x + 1 = \frac{(e^{x} - e^{-x})^2}{4} + 1 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{(e^{x} + e^{-x})^2}{4} = \mathrm{ch}^2 x$$