# 5. előadás

## Függvények inverze és kompozíciója

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. szeptember 18.

# Inverz

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény injektív, ha az értékkészletének minden elemét pontosan egyszer veszi fel (pontosan egy olyan pont van az értelmezési tartományban, ahol ez a függvény értéke), azaz

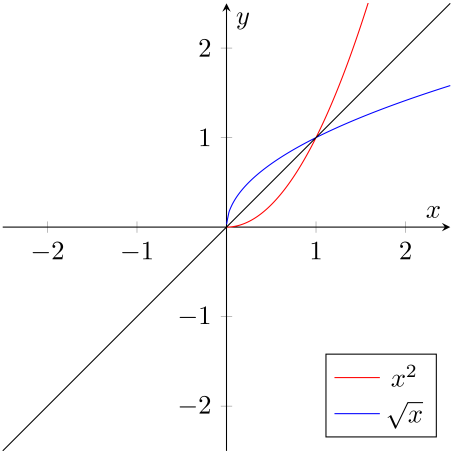
$$x_1 \neq x_2 \in D_f \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) injektív függvény inverze az a $f^{-1}$-gyel jelölt függvény, melyre $f^{-1}(y) = x$, ha $f(x) = y$, azaz $f^{-1}(f(x)) = x$.
Az $f^{-1}$ inverz függvény értelmezési tartománya az $f$ függvény értékkészlete.
(Az $f^{-1}$ inverz függvény értékkészlete az $f$ függvény értelmezési tartománya.)

Példák:
$f(x) = |x|$ nem injektív, így nincs inverze
$f(x) = x$ inverze önmaga: $f^{-1}(x) = x$
$f(x) = x^3$ inverze $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
$f(x) = x^2$ nem injektív, de ha csak a $[0, +\infty)$ intervallumon értelmezzük, akkor injektív, és az inverze: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

# Inverz függvény grafikonja

Az inverz függvény grafikonját az $x = y$ egyenesre való tükrözéssel kapjuk:

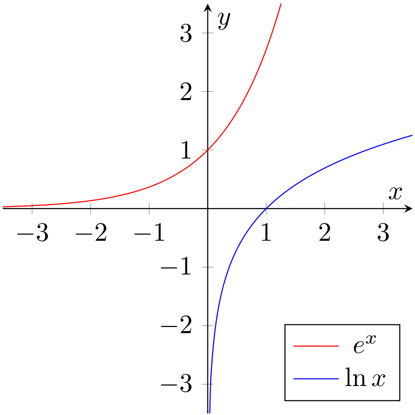


# A logaritmus függvény

$a^x$ exponenciális függvény inverze:
$a$ alapú logaritmus függvény: $\log_a(x)$

$e^x$ inverze a természetes alapú logaritmus függvény:
$\ln x (= \log_e(x))$
(latin *logaritmus naturalis*)

Mivel az exponenciális függvények értékkészlete $(0, +\infty)$, így ez a logaritmus függvények értelmezési tartománya.



# A logaritmus függvény azonosságai

$$\log_a(1) = 0$$
$$\log_a(a) = 1$$
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$$
$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

# Függvények invertálása

Az $f(x) = 3x + 1$ függvény inverze:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 3x + 1 &= y \\ 3x &= y - 1 \\ x &= \frac{y-1}{3}, \end{aligned}$$

tehát $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{3}$, azaz $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

A $g(x) = \sqrt[3]{x^5 - 1}$ függvény inverze:

# Függvények invertálása

Az $f(x) = 3x + 1$ függvény inverze:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 3x + 1 &= y \\ 3x &= y - 1 \\ x &= \frac{y-1}{3}, \end{aligned}$$

tehát $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{3}$, azaz $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

A $g(x) = \sqrt[3]{x^5 - 1}$ függvény inverze:

$$\begin{aligned} g(x) &= y \\ \sqrt[3]{x^5 - 1} &= y \\ x^5 - 1 &= y^3 \\ x^5 &= y^3 + 1 \\ x &= \sqrt[5]{y^3 + 1}, \end{aligned}$$

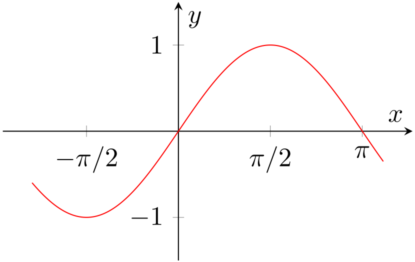
tehát $g^{-1}(y) = \sqrt[5]{y^3 + 1}$, azaz $g^{-1}(x) = \sqrt[5]{x^3 + 1}$.

# Szinusz inverze

A $\sin x$ nem injektív:
pl. $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.
De az

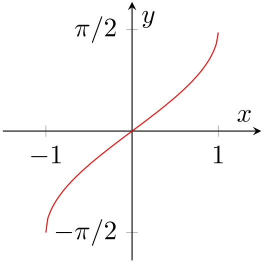
$$f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto \sin x$$

függvény már injektív, így vehetjük az inverzét.




Inverze:

$$\arcsin x\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

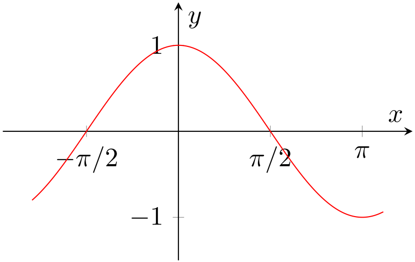


# Koszinusz inverze

A $\cos x$ nem injektív:
pl. $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$.
De az

$$f\colon [0,\pi] \to [-1,1]$$
$$x \mapsto \cos x$$

függvény már injektív, így vehetjük az inverzét.

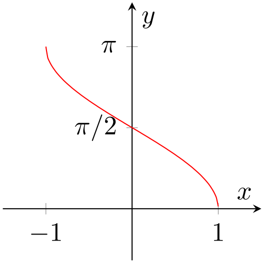



Inverze:

$$\arccos x\colon [-1,1] \to [0,\pi]$$

Mivel $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

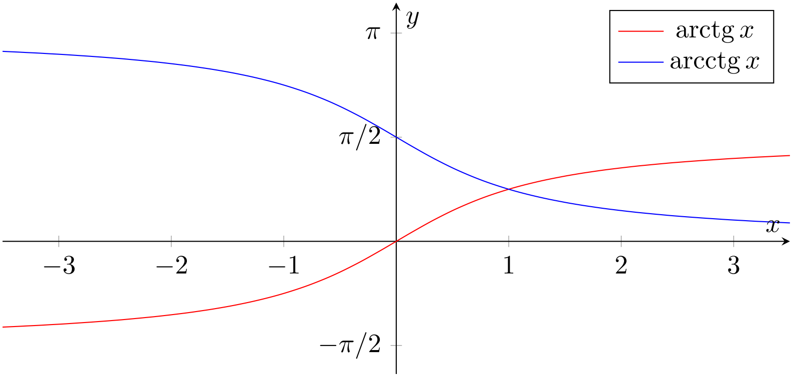
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$



# A tangens és a kotangens függvény inverze

A $\operatorname{tg} x$ függvényt a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze: $\operatorname{arctg} x \colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

A $\operatorname{ctg} x$ függvényt a $(0, \pi)$-re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze: $\operatorname{arcctg} x \colon \mathbb{R} \to (0, \pi)$.
Megjegyzés: $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.



# Hiperbolikus függvények inverze

A $\operatorname{ch} x$ függvényt a $[0, +\infty)$-re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze area koszinusz hiperbolikusz:
$\operatorname{arch} x \colon [1, +\infty) \to [0, +\infty)$

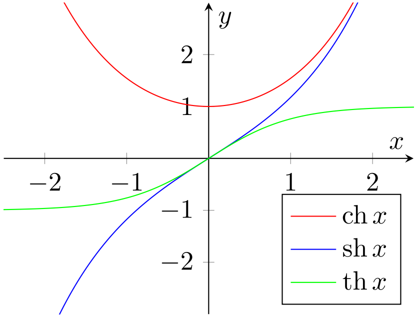
$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

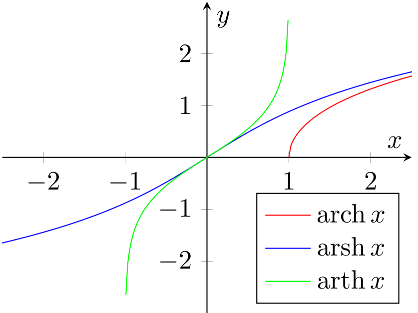
A $\operatorname{sh} x$ függvény injektív.
Inverze area szinusz hiperbolikusz:
$\operatorname{arsh} x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

A $\operatorname{th} x$ függvény injektív.
Inverze area tangens hiperbolikusz:
$\operatorname{arth} x \colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$



# Koszinusz hiperbolikusz inverze – bizonyítás

Feladat:
Határozzuk meg a koszinusz hiperbolikusz (nemnegatív számokra vett megszorításának) inverzét.

# Koszinusz hiperbolikusz inverze – bizonyítás

Feladat:
Határozzuk meg a koszinusz hiperbolikusz (nemnegatív számokra vett megszorításának) inverzét.

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x &= y \\
\frac{e^x + e^{-x}}{2} &= y \\
e^x + e^{-x} &= 2y \\
e^{2x} + 1 &= 2ye^x \\
(e^x)^2 + 1 - 2ye^x &= 0 \\
t^2 - 2yt + 1 &= 0,
\end{aligned}$$

ahol $t = e^x$. Az utolsó egyenlet $t$-re egy másodfokú egyenlet, amit a megoldóképlettel megoldhatunk:

$$t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

# Koszinusz hiperbolikusz inverze – folytatás

$$t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Mivel $t = e^x$ legalább $1$ (nemnegatív számokra vett megszorítással dolgozunk), így a $-$ előjel nem jó, mert:

$$y - \sqrt{y^2 - 1} = \left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right)\frac{y + \sqrt{y^2 - 1}}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{y^2 - (y^2 - 1)}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} < 1,$$

ha $y > 1$ ($\operatorname{ch} x \geq 1$). Tehát:

$$\begin{aligned} e^x &= y + \sqrt{y^2 - 1} \\ x &= \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \end{aligned}$$

Így az inverz:

$$\operatorname{arch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

ahogy szerepelt a korábbi dián.

Házi feladat a másik két hiperbolikus függvény inverzének kiszámolása.

# Függvénykompozíció

Ha $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$, akkor

$$g \circ f\colon A \to C$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

A $g$ a külső, míg $f$ a belső függvény.

Ha $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ és $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ ($D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$), akkor a $g \circ f$ összetett függvény értelmezési tartománya:

$$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ és } f(x) \in D_g\}.$$

Példa:
$f(x) = \sqrt{x}$ ($D_f = [0, +\infty)$) és $g(x) = 2x + 1$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} + 1 \qquad x \geq 0$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = \sqrt{2x + 1} \qquad 2x + 1 \geq 0$$