

6. előadás

Függvényhatárértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. szeptember 24.

Bevezető mese

Adott egy függvény, nem formulával, hanem minden pontban lekérdezhethetjük a függvény értékét.

A gonosz manó az $x_0 = 2$ pontban elrejtette a függvény értékét, nekünk kell kitalálni. Hogyan csináljuk?

Megnézzük, mi a függvény értéke 1,9-ben: 16,3 és 2,1-ben: 15,8.

Akkor talán 16??

Azért nézzük tovább:

$f(1,99)$	$= 16,02954$	$f(2,01)$	$= 15,97987$
$f(1,999)$	$= 16,00393$	$f(2,001)$	$= 15,99812$
$f(1,9999)$	$= 16,00041$	$f(2,0001)$	$= 15,99976$
$f(1,99999)$	$= 16,00002$	$f(2,00001)$	$= 15,99998$

Hát, így már elég meggyőző, hogy $f(2) = 16$.

De ebben soha sem lehetünk biztosak.

Mit tudunk biztosan?

Ha közel vagyunk az $x_0 = 2$ -höz, akkor a függvényérték is közel van a 16-hoz.

Úton a definíció felé

Ha közel vagyunk az $x_0 = 2$ -höz, akkor a függvényérték is közel van a 16-hoz.

Jó-jó, de mennyire van közel?

Mondjuk 3 tizedesjegyre stimmel, ha elég közel mentünk a 2-höz.

De mit jelent, hogy elég közel? Legfeljebb 0,002 az eltérés.

És ha más pontosságot szeretnénk?

Arra is lesz valami eltérés maximum!

Tehát:

Ha adott egy pontosság, hogy mennyire szeretnénk közel kerülni a 16-hoz, azaz mondjuk legfeljebb ε eltérést szeretnénk.

Akkor ehhez van egy másik eltérés, legyen δ , hogy ha 2-höz δ -nál közelebb vagyunk, akkor teljesülni fog a kívánságunk.

Még pontosabban:

Ha adott $\varepsilon > 0$, akkor ahhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - 2| < \delta$, akkor $|f(x) - 16| < \varepsilon$.

Határérték definíciója

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 pontban a határértéke A , ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ és $x \neq x_0$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Nem biztos, hogy a függvény mindenütt értelmes, de azt fel kell tennünk, hogy x_0 közelében értelmes, azaz:

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ és $x \neq x_0$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Nem követeljük meg, hogy a függvény x_0 -ban értelmezve legyen.

Kicsit egyszerűbben felírva:

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ vagy $f(x) \rightarrow A$, ha $x \rightarrow x_0$.

Egy példa

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

Az $f(x) = \frac{x-2}{x-2}$ függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Mennyi a határértéke $x_0 = 2$ -ben?

Ha $x \neq 2$, akkor $f(x) = 1$, így

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1.$$

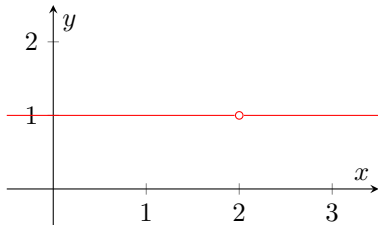
Definiálhatnánk így is a függvényt:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) = 1 \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \text{ esetén.}$$

De a következő is egy függvény:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 2 \\ 9, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Ekkor $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$, mert a 2-beli érték nem számít a határértéknél.



Még egy példa

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

Példa:

Az $f(x) = 3x + 1$ függvény $x_0 = 2$ -ben.

A határérték „valószínűleg” $f(2) = 7$.

Mi lesz a δ egy adott $\varepsilon > 0$ -hoz?

Az kell, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$|3x + 1 - 7| < \varepsilon$$

$$|3x - 6| < \varepsilon$$

$$3 \cdot |x - 2| < \varepsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ami teljesül, ha $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Az egészrész függvény

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

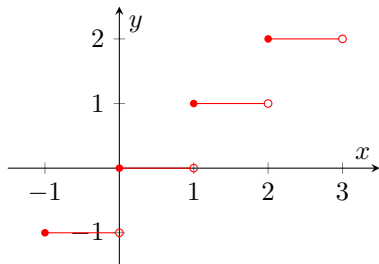
Mi a helyzet az $f(x) = [x]$ egészrész függvénnyel $x_0 = 2$ -ben?

Ha $|x - 2| < \delta < 1$ és $x \neq 2$, akkor

- ▶ $f(x) = 2$, ha $x > 2$, és
- ▶ $f(x) = 1$, ha $x < 2$.

Tehát $|f(x) - A| < \varepsilon < \frac{1}{2}$ nem teljesül sem $A = 1$ -gyel, sem $A = 2$ -vel.

Így a határérték nem létezik.



Jobb és bal oldali határérték

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

Érdeemes külön tekinteni a két oldalt:

Jobb oldali határérték ($x_0 < x$):

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a jobb oldali határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$ vagy $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$.

Bal oldali határérték ($x < x_0$):

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a bal oldali határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$ vagy $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$.

Két tétel

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

Tétel:

Ha az f függvénynek x_0 pontban létezik a jobb és bal oldali határértéke, és ezek egyenlőek, akkor a függvénynek létezik az x_0 pontban határértéke, és ez megegyezik a jobb és bal oldali határértékekkel.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Tétel:

Ha létezik a határérték, akkor egyértelmű:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$ esetén $A = B$.

Indirekt bizonyítás: $\varepsilon = \frac{|A-B|}{3}$ -hoz nincs jó δ .

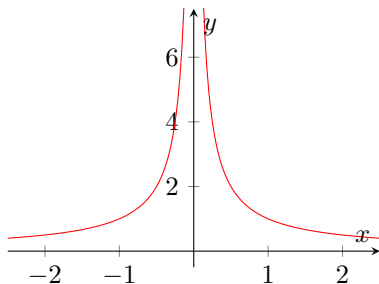
Végtelen határérték

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

Mi a helyzet az $f(x) = \frac{1}{|x|}$ függvénnyel a 0 pontban?

Minél közelebb vagyunk a 0-hoz annál nagyobb a függvény, végtelenhez tart.



Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

Végtelen határérték – variációk

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

Lehet mínusz végtelen is a határérték, ekkor a függvényérték nagyon kicsi:

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

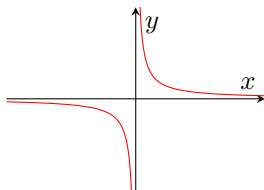
Ezekben az esetekben is lehet jobb vagy bal oldali határértéket venni, pl.:

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a jobb oldali határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = +\infty$.

Stb...

Példa: $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ és $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.



Határérték a végtelenben

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Nem csak a határérték lehet végtelen, hanem az x_0 pont is.

Ekkor a δ „helyett” K szám van:

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $+\infty$ -ben a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $K < x$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Példa: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Természetesen ez a $-\infty$ -ben is hasonlóan működik:

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $-\infty$ -ben a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $K > x$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Megjegyzés: A végtelenben nincs külön jobb és bal oldali határérték.

Végtelenben végtelen

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $+\infty$ -ben a határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy $L < x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Hasonlóan:

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $+\infty$ -ben a határértéke $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy $L < x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $-\infty$ -ben a határértéke $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy $L > x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek a $-\infty$ -ben a határértéke $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy $L > x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Összefoglalás

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek

az x_0 pontban a
az x_0 pontban a jobb oldali
az x_0 pontban a bal oldali
a $+\infty$ -ben a
a $-\infty$ -ben a

határértéke $A \in \mathbb{R}$,
 $+\infty$,
 $-\infty$,

ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz
 $K \in \mathbb{R}$ -hez
 $K \in \mathbb{R}$ -hez

van olyan $\delta > 0$,
 $\delta > 0$,
 $\delta > 0$,
 $L \in \mathbb{R}$,
 $L \in \mathbb{R}$,

hogyan

$0 < |x - x_0| < \delta$
 $0 < x - x_0 < \delta$
 $0 < x_0 - x < \delta$
 $L < x$
 $L > x$

esetén $x \in D_f$ és

$|f(x) - A| < \varepsilon$.
 $f(x) > K$.
 $f(x) < K$.

Műveletek és a határérték

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeknek létezik határértéke x_0 -ban, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ feltéve, hogy } g \neq 0 \text{ az } x_0 \text{ egy környezetében.}$$

Hasonló állítások igazak jobb és bal oldali, és végtelenbe vett határértékekre is.

Sőt, még a határérték is lehet végtelen, ha „elvégezhető a művelet” ($a \in \mathbb{R}$):

$$\pm\infty + a = \pm\infty, \quad a \cdot \pm\infty = \pm\infty \quad (a > 0), \quad \frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty \quad (a > 0),$$

$$\text{de } \infty - \infty = ?, \quad 0 \cdot \infty = ?, \quad \frac{0}{0} = ?, \quad \frac{\infty}{\infty} = ?$$

Ha $g: A \rightarrow B$ és $f: B \rightarrow C$, és tegyük fel, hogy x_0 -ban g -nek y_0 a határértéke, és y_0 -ban f -nek van határértéke (továbbá $g(x) \neq y_0$, ha $x \neq x_0$), akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y), \text{ ahol } y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Rendőrelv

Tegyük fel, hogy az $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre teljesül, hogy

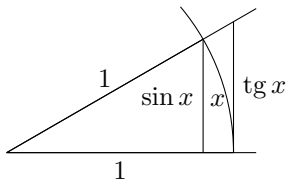
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ minden } x \in \mathbb{R}\text{-re,}$$

és tegyük fel, hogy f és h függvényeknek a határértéke x_0 -ban A (mindkettőnek).
Ekkor a g függvény határértéke x_0 -ban szintén A .

Példa: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Tudjuk, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén

$$\begin{array}{ccccc} \sin x & \leq & x & \leq & \operatorname{tg} x \\ 1 & \leq & \frac{x}{\sin x} & \leq & \frac{1}{\cos x} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & & & & 1 \end{array} \quad \text{ha } x \rightarrow 0$$



Ekkor a rendőrelv szerint $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\sin x} = 1$, és mivel páros függvény, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

$$\text{Így } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Nevezetes határértékek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ nem létezik, de

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

Feladatok

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{2x + 1} =$$

Feladatok

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{2x + 1} = \frac{2 + 3}{2 \cdot 2 + 1} = 1$$

Feladatok

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{2x + 1} = \frac{2 + 3}{2 \cdot 2 + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x} =$$

Feladatok

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{2x + 1} = \frac{2 + 3}{2 \cdot 2 + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + 1)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Feladatok

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{2x + 1} = \frac{2 + 3}{2 \cdot 2 + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + 1)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} =$$

Feladatok

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{2x + 1} = \frac{2 + 3}{2 \cdot 2 + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + 1)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 3) = -2$$

Feladatok

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{2x + 1} = \frac{2 + 3}{2 \cdot 2 + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + 1)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 3) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} =$$

Feladatok

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{2x+1} = \frac{2+3}{2 \cdot 2+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-3) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-1} = \frac{-1}{1} = -1$$

Feladatok – gyöktelenítés

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$$

Feladatok – gyöktelenítés

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2) - 4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Feladatok – gyöktelenítés

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2) - 4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{3-2x} - 1}$$

Feladatok – gyöktelenítés

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2) - 4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{3-2x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2) \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2}}{(\sqrt{3-2x} - 1) \frac{\sqrt{3-2x} + 1}{\sqrt{3-2x} + 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+3-2^2}{\sqrt{x+3} + 2}}{\frac{3-2x-1^2}{\sqrt{3-2x} + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{\sqrt{x+3} + 2}}{\frac{-2(x-1)}{\sqrt{3-2x} + 1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-2x} + 1}{(-2)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{\sqrt{3-2} + 1}{(-2)(\sqrt{1+3} + 2)} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{7x}$$

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7},$$

mert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y}$, ha $y = 5x$.

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7},$$

mert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y}$, ha $y = 5x$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x - 1}$$

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7},$$

mert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y}$, ha $y = 5x$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x-1} - \frac{2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{2}{x-1} \right) \text{ nem létezik, de}$$

Feladatok – folytatás

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7},$$

mert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y}$, ha $y = 5x$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x-1} - \frac{2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{2}{x-1} \right) \text{ nem létezik, de}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 - \frac{2}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 - \frac{2}{x-1} \right) = +\infty$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - \frac{12}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = +\infty$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - \frac{12}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 2}{x^4 - 8x^3 - 7x + 2}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - \frac{12}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 2}{x^4 - 8x^3 - 7x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3} - \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = 0$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - \frac{12}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 2}{x^4 - 8x^3 - 7x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3} - \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2}{x^3 + 5x^2 + 6x - 7}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - \frac{12}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 2}{x^4 - 8x^3 - 7x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3} - \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2}{x^3 + 5x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = -\infty$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - \frac{12}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 2}{x^4 - 8x^3 - 7x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3} - \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2}{x^3 + 5x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x}{6 - 4x^2}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - \frac{12}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 2}{x^4 - 8x^3 - 7x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3} - \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2}{x^3 + 5x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x}{6 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{3}{x}}{\frac{6}{x^2} - 4} = -\infty$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - \frac{12}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 2}{x^4 - 8x^3 - 7x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3} - \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2}{x^3 + 5x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x}{6 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{3}{x}}{\frac{6}{x^2} - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7}$$

Feladatok – polinomos törtek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - \frac{12}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x - 2}{x^4 - 8x^3 - 7x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3} - \frac{2}{x^4}}{1 - \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 3x + 2}{x^3 + 5x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x}{6 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \frac{3}{x}}{\frac{6}{x^2} - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 4x^3 - 12x^2 + 3}{x^3 - 7x^2 + 6x - 7} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$$