

7. előadás

Folytonosság

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. szeptember 25.

Pontbeli folytonosság

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha a függvény határértéke és a függvény értéke megegyezik x_0 -ban:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ekvivalens definíció:

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Hasonlóan egyoldali folytonosság:

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **jobbról folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **balról folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Ha egy függvény egy pontjában jobbról és balról is folytonos, akkor folytonos abban a pontban.

Példák:

$f(x) = [x]$ függvény az egész helyeken jobbról folytonos, de balról nem.

$f(x) = \sqrt{x}$ függvény a 0-ban csak jobbról folytonos.

A hasonló határértékes tételekből:

Tétel:

Egy adott x_0 pontban folytonos függvények összege, különbsége, szorzata és hányadosa (feltéve, hogy a nevező nem 0) is folytonos az x_0 pontban.

Tétel:

Ha a g függvény folytonos x_0 -ban és f függvény folytonos a $g(x_0)$ -ban, akkor $f \circ g$ is folytonos x_0 -ban.

Függvények folytonossága

Általában egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) **függvény folytonos**, ha minden $x_0 \in D_f$ pontban folytonos.

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos, ha minden $x_0 \in (a, b)$ pontban folytonos, és a -ban jobbról, b -ben balról folytonos.

Példák:

$x, x^2, |x|, e^x, \sin x, \frac{1}{x}$ folytonosak.

$[x]$ függvény csak az egész pontokon kívül folytonos.

A Diriclet-függvény sehol sem folytonos.

Tétel:

Ha az f függvény szigorúan monoton és folytonos, akkor az f^{-1} inverz létezik és folytonos (és monoton).

Feladat

Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{ha } 0 \leq x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2 + 1, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

A függvény az $x \neq 2$ pontokban folytonos.

Az $x = 2$ pontban:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 1) = 5, \text{ így}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

A függvény pontosan akkor folytonos $x = 2$ -ben, ha $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Tehát az kell, hogy $a = f(2) = 5$ legyen.

Még egy feladat

Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x < 0 \\ 3x + a, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Még egy feladat

Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x < 0 \\ 3x + a, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

A függvény az $x \neq 0$ pontokban folytonos, továbbá 0-ban jobbról folytonos. Az $x = 0$ pontban a bal oldali határértéke:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1$$

Így az kell, hogy $1 = f(0) = a$ legyen.

Szakadási pontok

Ha egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény egy $x_0 \in D_f$ pontban nem folytonos, akkor az x_0 **szakadási pont**.

Osztályozásuk:

- ▶ megszüntethető szakadás
- ▶ ugrás (elsőfajú) szakadás
- ▶ szinguláris (másodfajú) szakadás

Megszüntethető szakadás

Az x_0 pontban **megszüntethető** a szakadás, ha az x_0 -beli függvényérték módosításával (esetleg értelmezésével) folytonossá tehető a függvény.

Példák:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{ha } 0 \leq x < 2 \\ 3, & \text{ha } x = 2 \\ x^2 + 1, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

Ha $f(2) = 3$ helyett $f(2) = 5$, akkor folytonos.

$$f(x) = \frac{x-2}{x-2} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 2 \\ \text{nincs értelmezve,} & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Ha 2-ben értelmezzük 1-nek a függvényt, akkor folytonos.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$

Mivel $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1$, így ha 1-ben -1 -nek értelmezzük, akkor folytonos.

Ugrás szakadás

Az x_0 pontban **ugrás** szakadás van, ha létezik és véges a jobb és bal oldali határérték, de nem egyezik meg:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

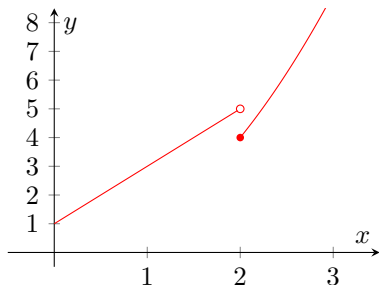
Példák:

Egészrész függvény egész helyeken.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{ha } 0 \leq x < 2 \\ x^2, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

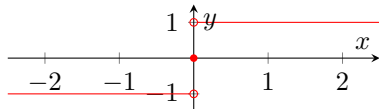
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$$



A szignum (előjel) függvény 0-ban:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



Szinguláris szakadás

A szakadás **szinguláris**, ha legalább az egyik oldali határérték nem létezik vagy létezik, de végtelen.

Példák:

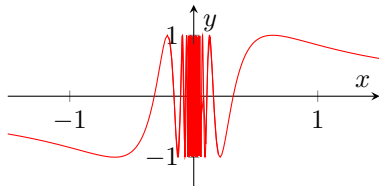
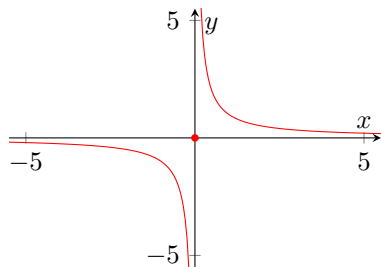
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Ekkor $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ nem létezik.



Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények

Tétel:

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény korlátos, azaz létezik $k, K \in \mathbb{R}$, hogy

$$k \leq f(x) \leq K \text{ minden } x \in [a, b]\text{-re.}$$

Lényeges, hogy az értelmezési tartomány zárt intervallum, pl: $f(x) = \frac{1}{x}$ a $(0, 1]$ intervallumon nem korlátos.

Weierstrass-tétel:

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény felveszi a minimum és maximum értékét, azaz van olyan $\alpha, \beta \in [a, b]$, hogy

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \text{ minden } x \in [a, b]\text{-re.}$$

A zárt intervallum itt is lényeges, pl: az $f(x) = x$ függvényt csak a $(0, 1)$ intervallumon értelmezve nincs megfelelő α, β ($0, 1 \notin (0, 1)$).

Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények

Bolzano-tétel:

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény az $f(a)$ és $f(b)$ között minden értéket felvesz, azaz ha $f(a) \leq y \leq f(b)$ vagy $f(b) \leq y \leq f(a)$, akkor létezik olyan $x \in [a, b]$, hogy $f(x) = y$.

A folytonosság lényeges, mert pl. az egészrész függvény nem veszi fel az $\frac{1}{2}$ értéket.

Bolzano és Weierstrass tételének következménye:

Korlátos, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény a minimuma és a maximuma között minden értéket felvesz. Azaz:

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényhez van olyan $\alpha, \beta \in [a, b]$, hogy

- ▶ minden $x \in [a, b]$ -re $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$, és
- ▶ $f(\alpha) \leq y \leq f(\beta)$ esetén van olyan $x \in [a, b]$, hogy $f(x) = y$.