3. gyakorlat

Függvények

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. szeptember 19.

1. feladat

Adjuk meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{3x+2} \cdot \log_{\frac{1}{3}} |2x-1|$ kifejezés értelmezhető.

1. feladat

Adjuk meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{3x+2} \cdot \log_{\frac{1}{3}} |2x-1|$ kifejezés értelmezhető.

Négyzetgyököt csak nemnegatív számból tudunk vonni, így szükséges, hogy $2x-1 \geq 0$, azaz $x \geq \frac{1}{2}$.

Nullával nem tudunk osztani, így $3x+2 \neq 0$, azaz $x \neq -\frac{3}{2}$.

A logaritmus függvény csak pozitív számokon értelmezett, így szükséges, hogy $|2x-1| > 0$, ami azt jelenti, hogy $2x-1 \neq 0$, azaz $x \neq \frac{1}{2}$.

Mind a három kikötés szükséges, ami azt jelenti, hogy $x > \frac{1}{2}$, azaz $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

2. feladat (a)

Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:

$$f(x) = 1 - x^2, \qquad g(u) = \sqrt{u}$$

Hol értelmezhető a kompozíció?

2. feladat (a)

Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:

$$f(x) = 1 - x^2, \qquad g(u) = \sqrt{u}$$

Hol értelmezhető a kompozíció?

A g függvény csak nemnegatív u esetén értelmezhető.

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = f\left(\sqrt{u}\right) = 1 - \left(\sqrt{u}\right)^2 = 1 - u \quad (u \geq 0)$$

Ez a kompozíció csak nemnegatív u-kra értelmes, habár a kapott kifejezés értelmezhető tetszőleges u-ra is.

2. feladat (a)

Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:

$$f(x) = 1 - x^2, \qquad g(u) = \sqrt{u}$$

Hol értelmezhető a kompozíció?

A g függvény csak nemnegatív u esetén értelmezhető.

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = f\left(\sqrt{u}\right) = 1 - \left(\sqrt{u}\right)^2 = 1 - u \quad (u \geq 0)$$

Ez a kompozíció csak nemnegatív u-kra értelmes, habár a kapott kifejezés értelmezhető tetszőleges u-ra is.

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(1 - x^2\right) = \sqrt{1 - x^2}$$

feltéve, hogy a g függvény értelmezési tartománya miatt $1 - x^2 \geq 0$, azaz $|x| \leq 1$.

2. feladat (b)

Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:

$$f(x) = x^2, \qquad g(u) = 2^u$$

Hol értelmezhető a kompozíció?

2. feladat (b)

Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:

$$f(x) = x^2, \qquad g(u) = 2^u$$

Hol értelmezhető a kompozíció?

Ebben az esetben nincs gond az értelmezési tartománnyal, mindkét függvény a teljes $\mathbb{R}$-en értelmezhető:

$$(f \circ g)(u) = f\left(g(u)\right) = f\left(2^u\right) = \left(2^u\right)^2 = 2^{2u},$$

használva a hatványozás azonosságait.

2. feladat (b)

Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:

$$f(x) = x^2, \qquad g(u) = 2^u$$

Hol értelmezhető a kompozíció?

Ebben az esetben nincs gond az értelmezési tartománnyal, mindkét függvény a teljes $\mathbb{R}$-en értelmezhető:

$$(f \circ g)(u) = f\left(g(u)\right) = f\left(2^u\right) = \left(2^u\right)^2 = 2^{2u},$$

használva a hatványozás azonosságait.

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g\left(x^2\right) = 2^{\left(x^2\right)} = 2^{x^2},$$

ebben az esetben nem mindig írjuk ki a zárójeleket a hatványozásnál.

3. feladat (a)

A e^{x^2} függvényt írjuk fel két függvény kompozíciójaként.

3. feladat (a)

A e^{x^2} függvényt írjuk fel két függvény kompozíciójaként.

Ha kiszámoljuk a függvény értékét, akkor először a négyzetre emelést kell kiszámolnunk, így ez a belső függvény.

Másodszorra az e-re emeljük ezt, tehát az exponenciális függvény a külső függvény.

Azaz $f \circ g$ alakú kompozicionál a következő a szereposztás:

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = x^2.$$

3. feladat (b)

A $\sin^2(x)$ függvényt írjuk fel két függvény kompozíciójaként.

3. feladat (b)

A $\sin^2(x)$ függvényt írjuk fel két függvény kompozíciójaként.

Először a szinusz függvényt kell kiszámolnunk, és ennek eredményét emeljük négyzetre.

Azaz $f \circ g$ alakú kompozicionál a következő a szereposztás:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sin(x).$$

3. feladat (c)

Az $\ln \ln x$ függvényt írjuk fel két függvény kompozíciójaként.

3. feladat (c)

Az $\ln \ln x$ függvényt írjuk fel két függvény kompozíciójaként.

Ez a logaritmus logaritmusa. Először kiszámoljuk a belső logaritmust (leírva ez a második $\ln$), majd az eredmény logaritmusát is. Tehát itt a külső és a belső függvény is a logaritmus.

Azaz $f \circ g$ alakú kompozicionál a következő a szereposztás:

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = \ln(x).$$

4. feladat

Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = |x^2 - 7x + 12|$ függvény nem invertálható.

4. feladat

Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = |x^2 - 7x + 12|$ függvény nem invertálható.

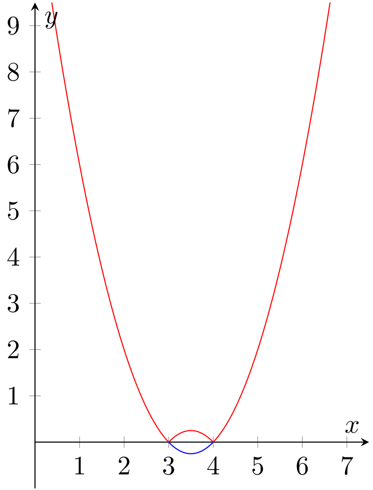
Elég megmutatni, hogy van legalább egy olyan érték, melyet a függvény két különböző helyen felvesz.

4. feladat

Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = |x^2 - 7x + 12|$ függvény nem invertálható.

Elég megmutatni, hogy van legalább egy olyan érték, melyet a függvény két különböző helyen felvesz.

Erre több lehetőség is van, pl. megoldóképlettel vagy másképpen észrevehetjük, hogy
$f(3) = f(4) = 0$.
Másik lehetőség, hogy az
$x^2 - 7x + 12 = (x - 3{,}5)^2 - 0{,}25$
átalakítás segítségével ábrázoljuk a függvényt, és akkor látszik, hogy minden pozitív számot többször is felvesz.



5. feladat

Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \dfrac{x-2}{2x+3} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \big\{-\frac{3}{2}\big\}\big)$ függvény invertálható, és állítsuk elő az inverz függvényt.

5. feladat

Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \dfrac{x-2}{2x+3} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}\right)$ függvény invertálható, és állítsuk elő az inverz függvényt.

Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x) = f(y)$ egyenlőségből következzen, hogy $x = y$. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{2x+3} &= \frac{y-2}{2y+3} \\
(x-2)(2y+3) &= (y-2)(2x+3) \\
2xy - 4y + 3x - 6 &= 2xy - 4x + 3y - 6 \\
7x &= 7y \\
x &= y.
\end{aligned}$$

Tehát a függvény invertálható.

5. feladat folytatás

Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \dfrac{x-2}{2x+3} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}\right)$ függvény invertálható, és állítsuk elő az inverz függvényt.

Ha $f(x) = y$, akkor az inverz függvény az y-ból mondja meg, hogy mi az x:

$$
\begin{aligned}
\frac{x-2}{2x+3} &= y \\
x-2 &= (2x+3)y \\
x-2 &= 2xy+3y \\
x-2xy &= 2+3y \\
x(1-2y) &= 2+3y \\
x &= \frac{2+3y}{1-2y},
\end{aligned}
$$

ahol az utolsó lépés csak akkor megengedett, ha $1-2y \neq 0$, azaz $y \neq \frac{1}{2}$.

5. feladat folytatás

Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \dfrac{x-2}{2x+3} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}\right)$ függvény invertálható, és állítsuk elő az inverz függvényt.

De az f függvény nem veszi fel az $\frac{1}{2}$ értéket, mert ha felvenné:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2x+3} &= \frac{1}{2} \\ 2(x-2) &= 2x+3 \\ 2x-4 &= 2x+3 \\ -4 &= 3, \end{aligned}$$

akkor ellentmondásra jutnánk. Tehát a függvény inverze $f^{-1}(y) = \frac{2+3y}{1-2y}$, vagy az x változóval felírva:

$$f^{-1}(x) = \frac{2+3x}{1-2x} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right).$$

Megjegyezzük, hogy az inverz számolásából is következik, hogy a függvény invertálható, hiszen megmutattuk, hogy ha a függvény felvesz egy y értéket, akkor azt csak a fenti x helyen veheti fel, amiből persze következik, hogy csak egyszer.

6. feladat

Legyen $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ függvény a következő:

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 7 \quad (x \in (0,\pi)).$$

Invertálható ez a függvény? Ha igen, akkor adjuk meg az inverzét.

6. feladat

Legyen $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ függvény a következő:

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 7 \quad (x \in (0,\pi)).$$

Invertálható ez a függvény? Ha igen, akkor adjuk meg az inverzét.

Hasonlóan az előzőhöz $x, y \in (0,\pi)$-ra:

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 7 = \operatorname{tg}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - 7$$
$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$$

Mivel $x, y \in (0,\pi)$, így $x - \frac{\pi}{2}, y - \frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ebben az intervallumban a tangens függvény szigorúan monoton nő, tehát ebben az intervallumban következik, hogy

$$x - \frac{\pi}{2} = y - \frac{\pi}{2}$$
$$x = y.$$

Tehát invertálható a függvény.

6. feladat folytatás

Legyen $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ függvény a következő:

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 7 \quad (x \in (0,\pi)).$$

Invertálható ez a függvény? Ha igen, akkor adjuk meg az inverzét.

Az inverz kiszámításához:

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 7 = y$$
$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = y + 7$$

Tudjuk, hogy a keresett x-re $x - \frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, így az arctg függvény pontosan a megfelelő értéket adja meg:

$$x - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}(y+7)$$
$$x = \operatorname{arctg}(y+7) + \frac{\pi}{2}$$

Tehát az inverz függvény:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arctg}(x+7) + \frac{\pi}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Házi feladat

Invertálhatók az alábbi függvények? Ha igen, akkor adjuk meg az inverzüket.

(a) $f(x) = \sqrt[3]{27 - x^3}$,

(b) $f(x) = 3\ln(5x) - 2$ $(x > 0)$.

Házi feladat megoldása

(a) Invertálható, és $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{27 - x^3}$, ami mellesleg az eredeti függvény.

(b) Invertálható, és $f^{-1}(x) = \frac{1}{5} e^{\frac{x+2}{3}}$.