4. gyakorlat

Függvényhatárértékek és szakadási pontok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. szeptember 26.

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$ határértéket.

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$ határértéket.

A gyöktelenítés módszerét kell alkalmazni:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$ határértéket.

A gyöktelenítés módszerét kell alkalmazni:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Ezzel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}\right)\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(1+x)-(1-x^2)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x+x^2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}}{\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{x}\,\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+x)\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}} = 1\cdot\frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1$$

1. feladat (b)

Számítsuk ki a $\lim_{x\to\infty} x^3 - 3x^2 + 7$ határértéket.

1. feladat (b)

Számítsuk ki a $\lim_{x\to\infty} x^3 - 3x^2 + 7$ határértéket.

Mivel x^3 a $+\infty$-be, míg $-3x^2$ a $-\infty$-be tart, így kiemeljük x^3-öt:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 3x^2 + 7 = \lim_{x\to\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^3}\right) = +\infty,$$

mivel a zárójeles kifejezés 1-hez tart.

Másik lehetőség (bár ez kevésbé használható általában):

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 3x^2 + 7 = \lim_{x\to\infty} x^2(x-3) + 7 = +\infty,$$

mivel x^2 és $(x-3)$ is a végtelenbe tart.

1. feladat (c)

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 - 10x + 1}$ határértéket.

1. feladat (c)

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^5 + 3x^2 + 1}{x^2 - 10x + 1}$ határértéket.

A tört számlálója és nevezője is végtelenhez tart, ezért célszerű egyszerűsíteni a törtet x^2-tel.

1. feladat (c)

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5+3x^2+1}{x^2-10x+1}$ határértéket.

A tört számlálója és nevezője is végtelenhez tart, ezért célszerű egyszerűsíteni a törtet x^2-tel.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5+3x^2+1}{x^2-10x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3+1/x^2}{1-10/x+1/x^2} = -\infty,$$

mivel a tört számlálója $-\infty$-hez, nevezője 1-hez tart.

1. feladat (d)

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^7 - 2x^5 + x^2}{x^9 + 3x^4 - 2x^2}$ határértéket.

1. feladat (d)

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7 - 2x^5 + x^2}{x^9 + 3x^4 - 2x^2}$ határértéket.

A 0-beli határértéket a legkisebb fokú tagok határozzák meg, így itt is x^2-tel egyszerűsítjük a törtet:

1. feladat (d)

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7 - 2x^5 + x^2}{x^9 + 3x^4 - 2x^2}$ határértéket.

A 0-beli határértéket a legkisebb fokú tagok határozzák meg, így itt is x^2-tel egyszerűsítjük a törtet:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7 - 2x^5 + x^2}{x^9 + 3x^4 - 2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5 - 2x^3 + 1}{x^7 + 3x^2 - 2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

1. feladat (e)

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{\sin(3x)}$ határértéket.

1. feladat (e)

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{\sin(3x)}$ határértéket.

Felhasználjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{ax} = 1$ bármilyen $a \neq 0$ számra:

1. feladat (e)

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{\sin(3x)}$ határértéket.

Felhasználjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{ax} = 1$ bármilyen $a \neq 0$ számra:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(7x)}{7x}7x}{\frac{\sin(3x)}{3x}3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(7x)}{7x}}{\frac{\sin(3x)}{3x}} \cdot \frac{7}{3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$$

2. feladat

Számítsuk ki az $x_0 = 1$ pontban a jobb és bal oldali határértékét az

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

függvénynek.

2. feladat

Számítsuk ki az $x_0 = 1$ pontban a jobb és bal oldali határértékét az

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$$

függvénynek.

$\lim\limits_{x \to 1} x^2 + x - 1 = 1$, és $\lim\limits_{x \to 1} x^3 - 1 = 0$, így

a jobb oldali határérték: $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{1}{x^3 - 1} = +\infty$, mert $x^3 - 1 > 0$,

a bal oldali határérték: $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{1}{x^3 - 1} = -\infty$, mert $x^3 - 1 < 0$.

3. feladat (a)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}, \\ 0, & \text{ha } x = 2,\ x = 5. \end{cases}$$

3. feladat (a)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}, \\ 0, & \text{ha } x = 2,\ x = 5. \end{cases}$$

A 2 és az 5 pontokon kívül mindenütt folytonos.

3. feladat (a)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}, \\ 0, & \text{ha } x = 2,\ x = 5. \end{cases}$$

A 2 és az 5 pontokon kívül mindenütt folytonos. A 2-ben a határérték:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{1}{3}$$

létezik, és véges, de nem egyezik meg a függvény értékével ($f(2) = 0$), így ez megszüntethető szakadás.

3. feladat (a)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}, \\ 0, & \text{ha } x = 2,\ x = 5. \end{cases}$$

A 2 és az 5 pontokon kívül mindenütt folytonos. A 2-ben a határérték:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{1}{3}$$

létezik, és véges, de nem egyezik meg a függvény értékével ($f(2) = 0$), így ez megszüntethető szakadás. Az 5-ben a határérték:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x \to 5} \frac{x-3}{x-5}$$

nem létezik, de van jobb és bal oldali határérték:

$$\text{jobb oldali határérték: } \lim_{x \to 5+} f(x) = \lim_{x \to 5+} \frac{2}{x-5} = +\infty$$

$$\text{bal oldali határérték: } \lim_{x \to 5-} f(x) = \lim_{x \to 5-} \frac{2}{x-5} = -\infty$$

Ez szinguláris szakadás.

3. feladat (b)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

3. feladat (b)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

A 0-n kívül folytonos a függvény, a 0-ban megnézzük a két oldali határértéket:

$$\text{jobb oldali: } \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{bal oldali: } \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{-x} = -\lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} = -1$$

Itt tehát a két határérték létezik és véges, de nem egyenlőek, ez egy ugrás szakadás.

3. feladat (c)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

3. feladat (c)

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Itt is csak a 0-ban lehet szakadás, ott a jobb és bal oldali határértékek:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{-1/x} = 0, \text{ mert } \lim_{x\to 0+} -1/x = -\infty \text{ és } \lim_{y\to -\infty} e^y = 0$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} e^{-1/x} = +\infty, \text{ mert } \lim_{x\to 0-} -1/x = +\infty \text{ és } \lim_{y\to +\infty} e^y = +\infty$$

Ez egy szinguláris szakadás, mert legalább az egyik oldali határérték nem véges.

Opcionális feladatok

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{x^2} = ?$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$$

Házi feladatok

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = ?$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 + 4x^3 + x}{7 - x^2} = ?$$

Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - x - 6}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\} \\ 1, & \text{ha } x = -2 \text{ vagy } x = 3 \end{cases}$$

Házi feladatok végeredménye

$$\frac{1}{2}$$

$$-\infty$$

-2-ben szinguláris szakadás (3-ban folytonos)