5. gyakorlat

Differenciálszámítás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. október 3.

1. feladat

Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonjához húzott érintő egyenes egyenletét az $x_0 = 0$ és az $x_0 = \frac{\pi}{2}$ pontokban.

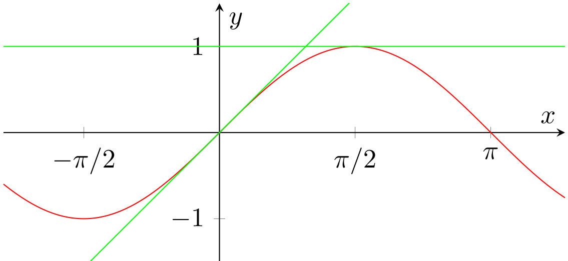
1. feladat

Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonjához húzott érintő egyenes egyenletét az $x_0 = 0$ és az $x_0 = \frac{\pi}{2}$ pontokban.

Előadáson szerepelt, hogy $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$.

Az érintő meredekségét az adott pontbeli derivált adja meg. Ez az első esetben $f'(0) = \cos 0 = 1$. Az $x_0 = 0$ ponthoz az origó tartozik (a függvény értéke is 0), így az origón átmenő, 1 meredekségű egyenest kell felírni, aminek az egyenlete $y = x$.

A második esetben $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, tehát az érintő meredeksége 0, ez egy vízszintes egyenes. Ennek át kell mennie a $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ponthoz tartozó grafikonponton, ami a $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ pont. Így az egyenes egyenlete $y = 1$.



2. feladat (a)

Számítsuk ki az $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 11$ függvény deriváltját.

2. feladat (a)

Számítsuk ki az $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 11$ függvény deriváltját.

Felhasználjuk, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$, tehát $\left(x^3\right)' = 3x^2$, $\left(x^2\right)' = 2x$ és $(x)' = 1$.

2. feladat (a)

Számítsuk ki az $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 11$ függvény deriváltját.

Felhasználjuk, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$, tehát $\left(x^3\right)' = 3x^2$, $\left(x^2\right)' = 2x$ és $(x)' = 1$.

$$\left(x^3 - 5x^2 + 5x + 11\right)' = 3x^2 - 5 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0 = 3x^2 - 10x + 5$$

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$ függvény deriváltját.

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$ függvény deriváltját.

Most is használjuk, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$, de nem csak természetes szám n-re. Ehhez először ilyen alakra írjuk át a tagokat:

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$ függvény deriváltját.

Most is használjuk, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$, de nem csak természetes szám n-re. Ehhez először ilyen alakra írjuk át a tagokat:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-5}$$

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$ függvény deriváltját.

Most is használjuk, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$, de nem csak természetes szám n-re. Ehhez először ilyen alakra írjuk át a tagokat:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-5}$$

Ezzel:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-3} - \frac{1}{5}(-5)x^{-6} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}.$$

2. feladat (c)

Számítsuk ki az $f(x) = 3^x - \cos x$ függvény deriváltját.

2. feladat (c)

Számítsuk ki az $f(x) = 3^x - \cos x$ függvény deriváltját.

Azt kell tudni, hogy $(a^x)' = a^x \ln a$ és $(\cos x)' = -\sin x$.

2. feladat (c)

Számítsuk ki az $f(x) = 3^x - \cos x$ függvény deriváltját.

Azt kell tudni, hogy $(a^x)' = a^x \ln a$ és $(\cos x)' = -\sin x$.

$$(3^x - \cos x)' = 3^x \ln 3 - (-\sin x) = 3^x \ln 3 + \sin x$$

2. feladat (d)

Számítsuk ki az $f(x) = (1 + x^3)\mathrm{tg}\ x$ függvény deriváltját.

2. feladat (d)

Számítsuk ki az $f(x) = (1 + x^3)\text{tg } x$ függvény deriváltját.

Ez két függvény szorzata, így a Leibniz-szabályt alkalmazzuk:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Továbbá még azt is felhasználjuk, hogy $(\text{tg } x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2. feladat (d)

Számítsuk ki az $f(x) = (1 + x^3)\mathrm{tg}\ x$ függvény deriváltját.

Ez két függvény szorzata, így a Leibniz-szabályt alkalmazzuk:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Továbbá még azt is felhasználjuk, hogy $(\mathrm{tg}\ x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$$\begin{aligned}\big((1 + x^3)\mathrm{tg}\ x\big)' &= (1 + x^3)'\mathrm{tg}\ x + (1 + x^3)(\mathrm{tg}\ x)' = \\ &= 3x^2\mathrm{tg}\ x + (1 + x^3)\frac{1}{\cos^2(x)} = \\ &= 3x^2\mathrm{tg}\ x + \frac{1 + x^3}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

2. feladat (e)

Számítsuk ki az $f(x) = x\sin(x)\ln(x)$ függvény deriváltját.

2. feladat (e)

Számítsuk ki az $f(x) = x \sin(x) \ln(x)$ függvény deriváltját.

Ez három függvény szorzata, először csak az első szorzatot deriváljuk:

$$(x \sin(x))' = \sin(x) + x \cos(x),$$

mellyel a teljes szorzat:

$$\begin{aligned}(x \sin(x) \ln(x))' &= (x \sin(x))' \cdot \ln(x) + x \sin(x) \frac{1}{x} = \\ &= (\sin(x) + x \cos(x)) \ln(x) + \sin(x).\end{aligned}$$

2. feladat (f)

Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2-x-2}$ függvény deriváltját.

2. feladat (f)

Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2-x-2}$ függvény deriváltját.

Ez egy hányados, így a hányados deriválási szabályát használjuk:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

2. feladat (f)

Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2-x-2}$ függvény deriváltját.

Ez egy hányados, így a hányados deriválási szabályát használjuk:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{x^3+3}{x^2-x-2}\right)' = \frac{3x^2(x^2-x-2) - (x^3+3)\cdot(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} =$$
$$= \frac{x^4-2x^3-6x^2-6x+3}{(x^2-x-2)^2}.$$

2. feladat (g)

Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{5}$ függvény deriváltját.

2. feladat (g)

Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{5}$ függvény deriváltját.

Látszólag ez is egy tört, de nem érdemes törtként deriválni, mivel a nevező egy konstans. Még azt is felhasználjuk, hogy $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

2. feladat (g)

Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{5}$ függvény deriváltját.

Látszólag ez is egy tört, de nem érdemes törtként deriválni, mivel a nevező egy konstans. Még azt is felhasználjuk, hogy $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

$$\left(\frac{\operatorname{sh} x}{5}\right)' = \left(\frac{1}{5}\operatorname{sh} x\right)' = \frac{1}{5}\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{ch} x}{5}$$

Ha törtként deriváljuk, akkor figyelni kell, hogy a nevező deriváltja 0:

$$\left(\frac{\operatorname{sh} x}{5}\right)' = \frac{\operatorname{ch} x \cdot 5 - \operatorname{sh} x \cdot 0}{5^2} = \frac{\operatorname{ch} x}{5}$$

3. feladat

Legyen $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})\,.$

(a) Számítsuk ki $f'(x)$-et.

(b) Mennyi az $x_0 = 1$ pontban az érintő iránytangense?

(c) Írjuk fel az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

3. feladat

Legyen $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})\,.$

(a) Számítsuk ki $f'(x)$-et.

(b) Mennyi az $x_0 = 1$ pontban az érintő iránytangense?

(c) Írjuk fel az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

(a) A hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{(-1)\cdot(1+x) - (1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

3. feladat

Legyen $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})\,.$

(a) Számítsuk ki $f'(x)$-et.

(b) Mennyi az $x_0 = 1$ pontban az érintő iránytangense?

(c) Írjuk fel az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

(a) A hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{(-1)\cdot(1+x) - (1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

(b) Az érintő iránytangense a meredeksége, ami a derivált értékével egyezik meg:

$$f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

3. feladat

Legyen $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})\,.$

(a) Számítsuk ki $f'(x)$-et.

(b) Mennyi az $x_0 = 1$ pontban az érintő iránytangense?

(c) Írjuk fel az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

(a) A hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{(-1)\cdot(1+x) - (1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

(b) Az érintő iránytangense a meredeksége, ami a derivált értékével egyezik meg:

$$f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

(c) Az x_0-beli érintőegyenes egyenlete: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, ami a jelen esetben (mivel $f(1) = 0$): $y = -\frac{1}{2}(x-1) + 0$, azaz $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

3. feladat (d)

Legyen $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})\,.$

Van-e olyan pontja a grafikonnak, ahol az érintő vízszintes?

3. feladat (d)

Legyen $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})\,.$

Van-e olyan pontja a grafikonnak, ahol az érintő vízszintes?

Ha az érintő vízszintes, akkor a meredéksége 0, azaz $f'(x) = 0$, ami a jelen esetben a

$$\frac{-2}{(1+x)^2} = 0$$

egyenletre vezet, de ez soha nem teljesül, mert egy tört pontosan akkor 0, ha a számlálója 0.

Opcionális feladat

A definíció alapján számítsuk ki az

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \qquad (x \in [1, +\infty))$$

függvény deriváltját ott, ahol létezik.

Házi feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.
   (a) $f(x) = x^2 \sin x$
   (b) $f(x) = \dfrac{x^3}{\ln x}$
   (c) $f(x) = \dfrac{(x+5)\text{sh } x}{12}$
2. Írjuk fel az $f(x) = \arccos(x)$ függvény $x_0 = \frac{1}{2}$ pontjához tartozó érintő egyenletét.

Házi feladatok megoldása

1. (a) $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

   (b) $f'(x) = \dfrac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2}$

   (c) $f'(x) = \dfrac{\text{sh } x - (x+5)\text{ch } x}{12}$

2. $$y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3}$$