

10. előadás

Taylor-polinom

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. október 21.

Magasabbrendű deriváltak

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **másodrendű/második deriváltja** az $f'(x)$ függvény deriváltja (feltéve, hogy létezik).

Jelölése: $f''(x)$ vagy $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, stb.

Hasonlóan **n -edrendű/ n -edik derivált** az $(n-1)$ -edrendű derivátnak a deriváltja (feltéve, hogy létezik).

Jelölés: $f^{(n)}(x)$ vagy $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, stb.

Példák:

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 7x - 1$$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 7$$

$$g''(x) = 6x - 6$$

$$g'''(x) = 6$$

$$g^{(4)}(x) = 0$$

$$g^{(5)}(x) = 0$$

Taylor-polinom

Cél: a függvényeket polinomokkal közelíteni.

Először legyen $f(x)$ egy polinom.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \qquad f(0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots \qquad f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots \qquad f''(0) = 2a_2$$

$$f'''(x) = 6a_3 + \dots \qquad f'''(0) = 6a_3$$

Általában: $f^{(k)}(0) = k!a_k$, így $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Tehát:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ugyanezt felírhatjuk akkor is, ha $f(x)$ egy tetszőleges függvény (nem polinom):

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ez az f függvény n -edfokú [Taylor-polinomja](#).

Néha a kapott polinom nem közelíti a függvényt (pl. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$).

Taylor-polinom kicsit általánosabban

Általánosítás, ha x_0 körüli írjuk fel az előzőt:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ez az f függvény x_0 körüli n -edfokú **Taylor-polinomja**.

Ezzel lehet közelíteni a függvényt.

Az exponenciális függvény Taylor-polinomjai

Az $f(x) = e^x$ függvény 0 körüli n -edfokú Taylor-polinomja:

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1$$

Tehát:

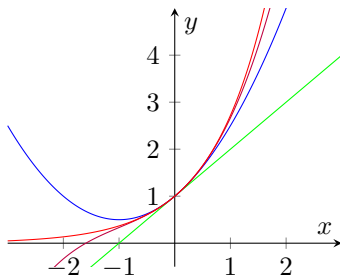
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Az e^x függvény közelítései:

► elsőrendű: $1 + x$

► másodrendű: $1 + x + \frac{x^2}{2}$

► harmadrendű: $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$



A szinusz és a koszinusz sorfejtése

Az $f(x) = \sin x$ függvény 0 körüli Taylor-polinomjai:

$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x$	$f^{(5)}(0) = 1$

Tehát:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Hasonlóan a koszinusz sorfejtése:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$e^{3x} \approx$$

Feladatok

$$e^{3x} \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (3x)^k = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} x^k = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \cdots + \frac{3^n}{n!}x^n$$

$$\sin(x^2) \approx$$

Feladatok

$$e^{3x} \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (3x)^k = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} x^k = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \cdots + \frac{3^n}{n!}x^n$$

$$\begin{aligned} \sin(x^2) &\approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x^2)^{2k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2} = \\ &= x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin x}{x} \approx$$

Feladatok

$$e^{3x} \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (3x)^k = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} x^k = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \cdots + \frac{3^n}{n!}x^n$$

$$\begin{aligned}\sin(x^2) &\approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x^2)^{2k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2} = \\ &= x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}\end{aligned}$$

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

$$xe^{-2x} \approx$$

Feladatok

$$e^{3x} \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (3x)^k = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} x^k = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \cdots + \frac{3^n}{n!} x^n$$

$$\begin{aligned} \sin(x^2) &\approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x^2)^{2k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2} = \\ &= x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{x} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

$$xe^{-2x} \approx x \sum_{k=0}^n \frac{(-2x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} x^{k+1} = x - 2x^2 + 2x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \cdots + \frac{(-2)^n}{n!} x^{n+1}$$

Még egy sorfejtés

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4} \qquad f'''(0) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1-x)^5} \qquad f^{(4)}(0) = 24$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \qquad f^{(n)}(0) = n!$$

A Taylor-polinom:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

Nem túl meglepő, hiszen:

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

Feladatok

$$\frac{1}{1+x}$$

Feladatok

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \approx \sum_{k=0}^n (-x)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{4-x}$$

Feladatok

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \approx \sum_{k=0}^n (-x)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{4}} \approx \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n \left(\frac{x}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^{k+1}} x^k = \frac{1}{4} + \frac{x}{16} + \frac{x^2}{64} + \cdots + \frac{1}{4^{n+1}} x^n$$

$$\frac{x}{x+1}$$

Feladatok

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \approx \sum_{k=0}^n (-x)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{4}} \approx \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n \left(\frac{x}{4}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^{k+1}} x^k = \frac{1}{4} + \frac{x}{16} + \frac{x^2}{64} + \dots + \frac{1}{4^{n+1}} x^n$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} &= x \frac{1}{1+x} \approx x \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} x^k = \\ &= x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots + (-1)^n x^{n+1} \end{aligned}$$

Másik lehetőség:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} &= \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{1+x} \approx 1 - \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = - \sum_{k=1}^n (-1)^k x^k = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} x^k = x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots + (-1)^{n+1} x^n \end{aligned}$$

Taylor-polinom Lagrange-maradéktaggal

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{\text{Taylor-polinom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\text{maradéktag}} \quad 0 < t < x \text{ vagy } x < t < 0$$

Példa:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^t}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Ez $x = 1$ esetén:

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{e^t}{(n+1)!} \quad 0 < t < 1,$$

tehát

$$\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| = \frac{e^t}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!},$$

így a relatív hiba:

$$\frac{\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right|}{e} < \frac{1}{(n+1)!}.$$