

11. előadás első része

Görbék érintője

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. október 22.

Impliciten adott görbe érintője

Nemcsak függvénygrafikkal, hanem egyenlettel is megadhatunk egy görbét, például:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Ez egy 5 sugarú, origó középpontú kör.

Ez a görbe implicit megadása.

Írjuk fel az érintőjét a $(4, 3)$ pontban.

Ha a görbe az $y(x)$ függvény grafikonja:

$$x^2 + y^2(x) = 25$$

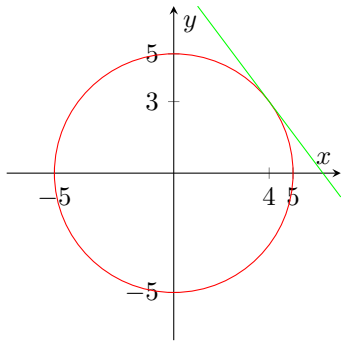
Ennek deriváltja:

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

Ha $x = 4$ és $y(4) = 3$, akkor $y'(4) = -\frac{4}{3}$, így az érintő egyenlete:

$$y = -\frac{4}{3}(x - 4) + 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}.$$

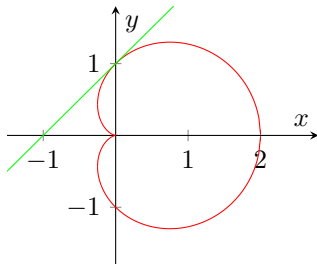


Kardioid érintője

A következő egyenlet a kardioid nevű görbét adja meg:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$$
$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 - y^2 = 0$$

Írjuk fel az érintőjét a $(0, 1)$ pontban!



Kardioid érintője

A következő egyenlet a kardioid nevű görbét adja meg:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$$
$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 - y^2 = 0$$

Írjuk fel az érintőjét a $(0, 1)$ pontban!

Ha a görbe az $y(x)$ függvény grafikonja:

$$x^4 + 2x^2y^2(x) + y^4(x) - 2x^3 - 2xy^2(x) - y^2(x) = 0$$

Ennek a deriváltja 0:

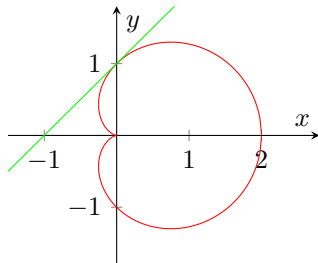
$$4x^3 + 4xy^2(x) + 4x^2y(x)y'(x) + 4y^3(x)y'(x) - 6x^2 - 2y^2(x) - 4xy(x)y'(x) - 2y(x)y'(x)$$

$$(4x^2y(x) + 4y^3(x) - 4xy(x) - 2y(x))y'(x) = -4x^3 - 4xy^2(x) + 6x^2 + 2y^2(x)$$

$$y'(x) = \frac{-4x^3 - 4xy^2(x) + 6x^2 + 2y^2(x)}{4x^2y(x) + 4y^3(x) - 4xy(x) - 2y(x)}$$

Ha $x = 0$ és $y(0) = 1$, akkor $y'(0) = \frac{2}{4 - 2} = 1$, így az érintő egyenlete:

$$y = x + 1.$$



Paraméteresen adott görbe érintője

Tekintsük azon pontokat a síkon,
melyet befut

$$x(t) = t \cos t,$$

$$y(t) = t \sin t,$$

amint t befutja a pozitív számokat.

Ezt arkhimédészi spirálnak nevezik.

Írjuk fel az érintőjét a $t = \pi$ helyen!

Ekkor $x(\pi) = -\pi$ és $y(\pi) = 0$.

$$x'(t) = \cos t - t \sin t$$

$$x'(\pi) = -1$$

$$y'(t) = \sin t + t \cos t$$

$$y'(\pi) = -\pi$$

Az érintő meredeksége $\frac{y'(\pi)}{x'(\pi)} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$, így az érintő egyenlete:

$$y = \pi(x - (-\pi)) + 0$$

$$y = \pi x + \pi^2$$

