

11. előadás második része

Monotonitás és lokális szélsőértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. október 22.

Monotonitás

Tétel:

Ha az $f(x)$ függvény differenciálható és értelmezett az I intervallumon, akkor

- ▶ $f'(x) \geq 0$ minden $x \in I$ -re $\Leftrightarrow f$ monoton nő az I intervallumon.
- ▶ $f'(x) \leq 0$ minden $x \in I$ -re $\Leftrightarrow f$ monoton csökken az I intervallumon.

Tétel:

Ha az $f(x)$ függvény differenciálható és értelmezett az I intervallumon, akkor

- ▶ $f'(x) > 0$ minden $x \in I$ -re $\Rightarrow f$ szigorúan monoton nő az I intervallumon.
- ▶ $f'(x) < 0$ minden $x \in I$ -re $\Rightarrow f$ szigorúan monoton csökken az I intervallumon.

Szigorú monotonitásra csak az egyik irányban igaz a következtetés:

Például $f(x) = x^3$ szigorúan monoton nő: $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, de $f'(0) = 0$.

Példa

Mely intervallumokon monoton az $f(x) = e^x - x$ függvény?

Példa

Mely intervallumokon monoton az $f(x) = e^x - x$ függvény?

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) \geq 0$$

$$e^x - 1 \geq 0$$

$$e^x \geq 1$$

$$x \geq 0,$$

azaz az f függvény a $[0, +\infty)$ intervallumon monoton nő.

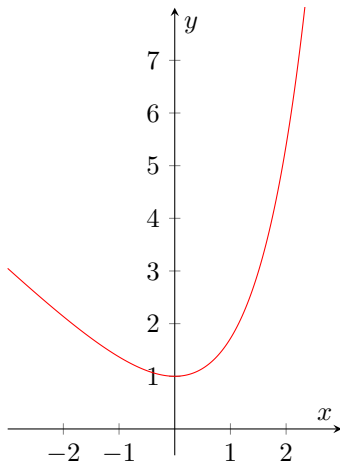
$$f'(x) \leq 0$$

$$e^x - 1 \leq 0$$

$$e^x \leq 1$$

$$x \leq 0,$$

azaz az f függvény a $(-\infty, 0]$ intervallumon monoton csökken.



Lokális szélsőérték

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja **lokális maximumhely**, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén.

A **lokális maximum** az $f(x_0)$ függvényérték.

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja **lokális minimumhely**, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén.

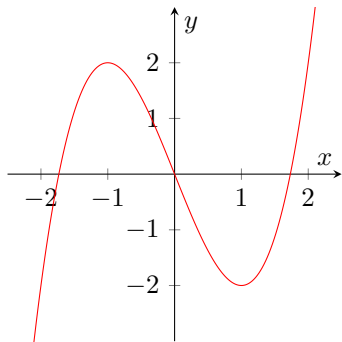
A **lokális minimum** az $f(x_0)$ függvényérték.

Lokális szélsőérték: lokális minimum vagy lokális maximum.

Lokális szélsőértékhely: lokális minimumhely vagy lokális maximumhely.

Megjegyzés:

Nem tesszük fel, hogy a függvény differenciálható.



Lokális szélsőérték feltételei

Ha a függvény differenciálható:

Tétel (lokális szélsőérték szükséges feltétele):

Ha az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van, és az x_0 -ban differenciálható a függvény, akkor $f'(x_0) = 0$.

Megjegyzés:

Az $f'(x_0) = 0$ -ból nem következik, hogy x_0 -ban lokális szélsőérték van: például $f(x) = x^3$ függvény $x_0 = 0$ pontban.

Szeretnénk elégséges feltételt a lokális szélsőértékre:

Ha a függvény

$(x_0 - \delta, x_0)$ -ban monoton nő (azaz $f'(x) \geq 0$) és
 $(x_0, x_0 + \delta)$ -ban monoton csökken (azaz $f'(x) \leq 0$),
akkor x_0 -ban lokális maximum van.

Ha a függvény

$(x_0 - \delta, x_0)$ -ban monoton csökken (azaz $f'(x) \leq 0$) és
 $(x_0, x_0 + \delta)$ -ban monoton nő (azaz $f'(x) \geq 0$),
akkor x_0 -ban lokális minimum van.

Példa

$f(x) = -x^2 - 2x + 4$ függvény lokális szélsőértékei

Példa

$f(x) = -x^2 - 2x + 4$ függvény lokális szélsőértékei

$f'(x) = -2x - 2$, melynek nullhelye $x_0 = -1$

$$f'(x) \geq 0$$

$$f'(x) \leq 0$$

$$-2x - 2 \geq 0$$

$$-2x - 2 \leq 0$$

$$-2x \geq 2$$

$$-2x \leq 2$$

$$x \leq -1$$

$$x \geq -1$$

$$x \in (-\infty, -1]$$

$$x \in [-1, +\infty)$$

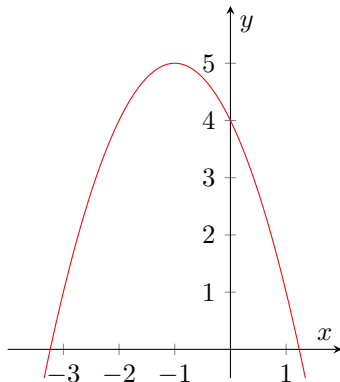
monoton nő

monoton csökken

Tehát az $x_0 = -1$ lokális maximumhely.

A lokális maximum a függvényérték:

$$f(x_0) = f(-1) = 5.$$



Másodrendű elégséges feltétel lokális szélsőértékre

Ha az f függvény kétszer differenciálható, és $f'(x_0) = 0$, és

- ▶ $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 -ban lokális minimum van.
- ▶ $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 -ban lokális maximum van.

Megjegyzés:

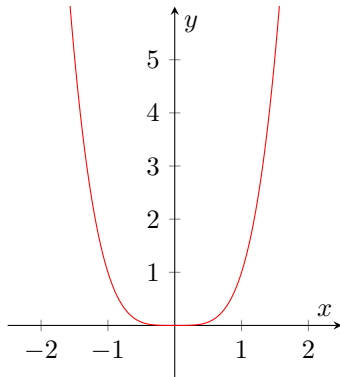
Visszafelé ez nem igaz:

$f(x) = x^4$ függvénynek $x_0 = 0$ -ban
lokális minimuma van, de

$$f'(x) = 4x^3,$$

$$f''(x) = 12x^2,$$

$$\text{így } f''(0) = 0.$$



Példa

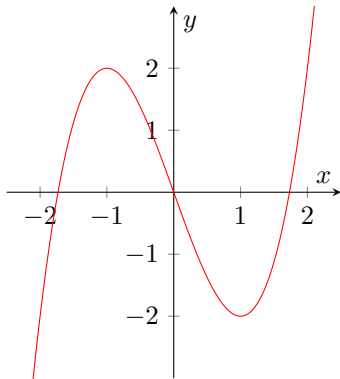
Az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény lokális szélsőértékei

Példa

Az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény lokális szélsőértékei

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \text{ és } f''(x) = 6x$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\3x^2 - 3 &= 0 \\3x^2 &= 3 \\x^2 &= 1 \\x_{1,2} &= \pm 1\end{aligned}$$



Az $x_1 = +1$ -ben $f''(x_1) = f''(+1) = +6 > 0$, tehát ez lokális minimumhely, a lokális minimum értéke: $f(x_1) = f(+1) = -2$.

Az $x_2 = -1$ -ben $f''(x_2) = f''(-1) = -6 < 0$, tehát ez lokális maximumhely, a lokális maximum értéke: $f(x_2) = f(-1) = +2$.

Egy általánosabb tétel

Tétel:

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény n -szer differenciálható, és

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ de } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ekkor

- ▶ páratlan n esetén x_0 nem lokális szélsőérték hely,
- ▶ páros n esetén x_0 lokális szélsőérték hely, és pedig
 - ▶ $f^{(n)}(x_0) > 0$ esetén x_0 lokális minimum hely.
 - ▶ $f^{(n)}(x_0) < 0$ esetén x_0 lokális maximum hely.

Példa:

Meggondolható, hogy $f(x) = x^n$ esetén:

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0 \text{ és } f^{(n)}(0) = n!$$

Összefoglalás

Szükséges feltétel:

x_0 lokális szélsőérték hely, akkor $f'(x_0) = 0$

Elsőrendű elégséges feltétel:

$f'(x_0) = 0$ és $(x_0 - \delta, x_0)$ -ban $f'(x) \leq 0$,
 $(x_0, x_0 + \delta)$ -ban $f'(x) \geq 0$, akkor x_0 lokális minimumhely

$f'(x_0) = 0$ és $(x_0 - \delta, x_0)$ -ban $f'(x) \geq 0$,
 $(x_0, x_0 + \delta)$ -ban $f'(x) \leq 0$, akkor x_0 lokális maximumhely

Másodrendű elégséges feltétel:

$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimumhely

$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 lokális maximumhely