

5. gyakorlat

Differenciálszámítás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. október 16.

1. feladat

Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonjához húzott érintő egyenes egyenletét az $x_0 = 0$ és az $x_0 = \frac{\pi}{2}$ pontokban.

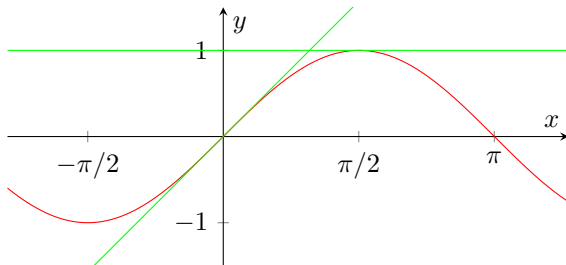
1. feladat

Írjuk fel az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonjához húzott érintő egyenes egyenletét az $x_0 = 0$ és az $x_0 = \frac{\pi}{2}$ pontokban.

Előadáson szerepelt, hogy $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$.

Az érintő meredekségét az adott pontbeli derivált adja meg. Ez az első esetben $f'(0) = \cos 0 = 1$. Az $x_0 = 0$ ponthoz az origó tartozik (a függvény értéke is 0), így az origón átmenő, 1 meredekségű egyenest kell felírni, aminek az egyenlete $y = x$.

A második esetben $f'(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, tehát az érintő meredeksége 0, ez egy vízszintes egyenes. Ennek át kell mennie a $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ponthoz tartozó grafikonpontra, ami a $(\frac{\pi}{2}, 1)$ pont. Így az egyenes egyenlete $y = 1$.



2. feladat (a)

Számítsuk ki az $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 11$ függvény deriváltját.

2. feladat (a)

Számítsuk ki az $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 11$ függvény deriváltját.

Felhasználjuk, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$, tehát $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$ és $(x)' = 1$.

2. feladat (a)

Számítsuk ki az $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 11$ függvény deriváltját.

Felhasználjuk, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$, tehát $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$ és $(x)' = 1$.

$$(x^3 - 5x^2 + 5x + 11)' = 3x^2 - 5 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0 = 3x^2 - 10x + 5$$

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$ függvény deriváltját.

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$ függvény deriváltját.

Most is használjuk, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$, de nem csak természetes szám n -re. Ehhez először ilyen alakra írjuk át a tagokat:

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$ függvény deriváltját.

Most is használjuk, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$, de nem csak természetes szám n -re. Ehhez először ilyen alakra írjuk át a tagokat:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-5}$$

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$ függvény deriváltját.

Most is használjuk, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$, de nem csak természetes szám n -re. Ehhez először ilyen alakra írjuk át a tagokat:

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-5}$$

Ezzel:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-3} - \frac{1}{5}(-5)x^{-6} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}.$$

2. feladat (c)

Számítsuk ki az $f(x) = 3^x - \cos x$ függvény deriváltját.

2. feladat (c)

Számítsuk ki az $f(x) = 3^x - \cos x$ függvény deriváltját.

Azt kell tudni, hogy $(a^x)' = a^x \ln a$ és $(\cos x)' = -\sin x$.

2. feladat (c)

Számítsuk ki az $f(x) = 3^x - \cos x$ függvény deriváltját.

Azt kell tudni, hogy $(a^x)' = a^x \ln a$ és $(\cos x)' = -\sin x$.

$$(3^x - \cos x)' = 3^x \ln 3 - (-\sin x) = 3^x \ln 3 + \sin x$$

2. feladat (d)

Számítsuk ki az $f(x) = (1 + x^3)\operatorname{tg} x$ függvény deriváltját.

2. feladat (d)

Számítsuk ki az $f(x) = (1 + x^3)\operatorname{tg} x$ függvény deriváltját.

Ez két függvény szorzata, így a Leibniz-szabályt alkalmazzuk:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Továbbá még azt is felhasználjuk, hogy $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. feladat (d)

Számítsuk ki az $f(x) = (1 + x^3)\operatorname{tg} x$ függvény deriváltját.

Ez két függvény szorzata, így a Leibniz-szabályt alkalmazzuk:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Továbbá még azt is felhasználjuk, hogy $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$\begin{aligned} ((1 + x^3)\operatorname{tg} x)' &= (1 + x^3)' \operatorname{tg} x + (1 + x^3)(\operatorname{tg} x)' = \\ &= 3x^2 \operatorname{tg} x + (1 + x^3) \frac{1}{\cos^2(x)} = \\ &= 3x^2 \operatorname{tg} x + \frac{1 + x^3}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

2. feladat (e)

Számítsuk ki az $f(x) = x \sin(x) \ln(x)$ függvény deriváltját.

2. feladat (e)

Számítsuk ki az $f(x) = x \sin(x) \ln(x)$ függvény deriváltját.

Ez három függvény szorzata, először csak az első szorzatot deriváljuk:

$$(x \sin(x))' = \sin(x) + x \cos(x),$$

mellyel a teljes szorzat:

$$\begin{aligned}(x \sin(x) \ln(x))' &= (x \sin(x))' \cdot \ln(x) + x \sin(x) \frac{1}{x} = \\ &= (\sin(x) + x \cos(x)) \ln(x) + \sin(x).\end{aligned}$$

2. feladat (f)

Számítsuk ki az $f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^2 - x - 2}$ függvény deriváltját.

2. feladat (f)

Számítsuk ki az $f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^2 - x - 2}$ függvény deriváltját.

Ez egy hányados, így a hányados deriválási szabályát használjuk:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

2. feladat (f)

Számítsuk ki az $f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^2 - x - 2}$ függvény deriváltját.

Ez egy hányados, így a hányados deriválási szabályát használjuk:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^3 + 3}{x^2 - x - 2}\right)' &= \frac{3x^2(x^2 - x - 2) - (x^3 + 3) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} = \\ &= \frac{x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 6x + 3}{(x^2 - x - 2)^2}.\end{aligned}$$

2. feladat (g)

Számítsuk ki az $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{5}$ függvény deriváltját.

2. feladat (g)

Számítsuk ki az $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{5}$ függvény deriváltját.

Látszólag ez is egy tört, de nem érdemes törtként deriválni, mivel a nevező egy konstans. Még azt is felhasználjuk, hogy $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

2. feladat (g)

Számítsuk ki az $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{5}$ függvény deriváltját.

Látszólag ez is egy tört, de nem érdemes törtként deriválni, mivel a nevező egy konstans. Még azt is felhasználjuk, hogy $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

$$\left(\frac{\operatorname{sh} x}{5}\right)' = \left(\frac{1}{5}\operatorname{sh} x\right)' = \frac{1}{5}\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{ch} x}{5}$$

Ha törtként deriváljuk, akkor figyelni kell, hogy a nevező deriváltja 0:

$$\left(\frac{\operatorname{sh} x}{5}\right)' = \frac{\operatorname{ch} x \cdot 5 - \operatorname{sh} x \cdot 0}{5^2} = \frac{\operatorname{ch} x}{5}$$

3. feladat

Legyen $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

- (a) Számítsuk ki $f'(x)$ -et.
- (b) Mennyi az $x_0 = 1$ pontban az érintő iránytangense?
- (c) Írjuk fel az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

3. feladat

Legyen $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

(a) Számítsuk ki $f'(x)$ -et.

(b) Mennyi az $x_0 = 1$ pontban az érintő iránytangense?

(c) Írjuk fel az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

(a) A hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{(-1) \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

3. feladat

Legyen $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

(a) Számítsuk ki $f'(x)$ -et.

(b) Mennyi az $x_0 = 1$ pontban az érintő iránytangense?

(c) Írjuk fel az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

(a) A hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{(-1) \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

(b) Az érintő iránytangense a meredeksége, ami a derivált értékével egyezik meg:

$$f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

3. feladat

Legyen $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$).

(a) Számítsuk ki $f'(x)$ -et.

(b) Mennyi az $x_0 = 1$ pontban az érintő iránytangense?

(c) Írjuk fel az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban az érintőegyenes egyenletét.

(a) A hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{(-1) \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

(b) Az érintő iránytangense a meredeksége, ami a derivált értékével egyezik meg:

$$f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

(c) Az x_0 -beli érintőegyenes egyenlete: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, ami a jelen esetben (mivel $f(1) = 0$): $y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 0$, azaz $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

3. feladat (d)

Legyen $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

Van-e olyan pontja a grafikonnak, ahol az érintő vízszintes?

3. feladat (d)

Legyen $f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

Van-e olyan pontja a grafikonnak, ahol az érintő vízszintes?

Ha az érintő vízszintes, akkor a meredéksége 0, azaz $f'(x) = 0$, ami a jelen esetben a

$$\frac{-2}{(1+x)^2} = 0$$

egyenletre vezet, de ez soha nem teljesül, mert egy tört pontosan akkor 0, ha a számlálója 0.

4. feladat (a)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $(3x^2 + 4x + 1)^5$ függvény deriváltját.

4. feladat (a)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $(3x^2 + 4x + 1)^5$ függvény deriváltját.

Az $f \circ g$ függvénykompozíció deriváltja: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
Ezt nevezik láncszabálynak is.

A belső függvény a polinom, a külső függvény az ötödik hatvány, így

$$((3x^2 + 4x + 1)^5)' = 5 \cdot (3x^2 + 4x + 1)^4 \cdot (6x + 4).$$

4. feladat (b)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\sqrt{x^2 + 1}$ függvény deriváltját.

4. feladat (b)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\sqrt{x^2 + 1}$ függvény deriváltját.

A külső függvény a négyzetgyökvonás, azaz $\frac{1}{2}$ -edik hatvány, míg a belső az $x^2 + 1$:

$$\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

De használhatjuk közvetlenül, hogy $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

4. feladat (c)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az e^{x^4} függvény deriváltját.

4. feladat (c)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az e^{x^4} függvény deriváltját.

Ebben az esetben az exponenciális függvény a külső, a negyedik hatvány a belső függvény:

$$\left(e^{x^4}\right)' = e^{x^4} \cdot 4x^3.$$

Opcionális feladat

A definíció alapján számítsuk ki az

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (x \in [1, +\infty))$$

függvény deriváltját ott, ahol létezik.

Házi feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

(a) $f(x) = x^2 \sin x$

(b) $f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$

(c) $f(x) = \frac{(x+5)\operatorname{sh} x}{12}$

(d) $f(x) = \sin(3x+2)$

2. Írjuk fel az $f(x) = \arccos(x)$ függvény $x_0 = \frac{1}{2}$ pontjához tartozó érintő egyenletét.

Házi feladatok megoldása

1. (a) $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

(b) $f'(x) = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2}$

(c) $f'(x) = \frac{\operatorname{sh} x - (x + 5)\operatorname{ch} x}{12}$

(d) $f'(x) = 3 \cos(3x + 2)$

2.

$$y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3}$$