

6. gyakorlat

Differenciálszámítás folytatás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. október 30.

1. feladat (a)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\cos(5 - x^2)$ függvény deriváltját.

1. feladat (a)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\cos(5 - x^2)$ függvény deriváltját.

Az $f \circ g$ függvénykompozíció deriváltja: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
Ezt nevezik láncszabálynak is.

1. feladat (a)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az $\cos(5 - x^2)$ függvény deriváltját.

Az $f \circ g$ függvénykompozíció deriváltja: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Ezt nevezik láncszabálynak is.

Ebben az esetben a koszinusz függvény a külső, a polinom a belső függvény:

$$(\cos(5 - x^2))' = -\sin(5 - x^2) \cdot (-2x) = 2x \sin(5 - x^2).$$

1. feladat (b)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\operatorname{tg} \left((x^2 + x)^3 \right)$ függvény deriváltját.

1. feladat (b)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\operatorname{tg} \left((x^2 + x)^3 \right)$ függvény deriváltját.

Ez már többszörösen összetett függvény, először csak a tangensben levő függvény deriváltját számoljuk ki:

$$\left((x^2 + x)^3 \right)' = 3 (x^2 + x)^2 \cdot (2x + 1),$$

ami alapján az eredeti függvény deriváltja

$$\left(\operatorname{tg} \left((x^2 + x)^3 \right) \right)' = \frac{1}{\cos^2 \left((x^2 + x)^3 \right)} \cdot 3 (x^2 + x)^2 \cdot (2x + 1).$$

1. feladat (c)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\cos(7^{2x+3})$ függvény deriváltját.

1. feladat (c)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\cos(7^{2x+3})$ függvény deriváltját.

Ez is többszörösen összetett függvény:

$$(\cos(7^{2x+3}))' = -\sin(7^{2x+3}) \cdot 7^{2x+3} \ln 7 \cdot 2$$

2. feladat (a)

Számítsuk ki az $\frac{x^3 + 2}{x - 2}$ függvény deriváltját.

2. feladat (a)

Számítsuk ki az $\frac{x^3 + 2}{x - 2}$ függvény deriváltját.

Ez egy tört, így a hányados deriválási szabályát használjuk:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

2. feladat (a)

Számítsuk ki az $\frac{x^3 + 2}{x - 2}$ függvény deriváltját.

Ez egy tört, így a hányados deriválási szabályát használjuk:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^3 + 2}{x - 2}\right)' &= \frac{(x^3 + 2)'(x - 2) - (x^3 + 2)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \\ &= \frac{3x^2(x - 2) - (x^3 + 2)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 - 2}{(x - 2)^2}\end{aligned}$$

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $e^x \operatorname{ch} x$ függvény deriváltját.

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $e^x \operatorname{ch} x$ függvény deriváltját.

Ez egy szorzat, így itt a Leibniz-szabályt használjuk:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Továbbá még azt is felhasználjuk, hogy $(e^x)' = e^x$ és $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $e^x \operatorname{ch} x$ függvény deriváltját.

Ez egy szorzat, így itt a Leibniz-szabályt használjuk:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Továbbá még azt is felhasználjuk, hogy $(e^x)' = e^x$ és $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

$$\begin{aligned}(e^x \operatorname{ch} x)' &= (e^x)' \operatorname{ch} x + e^x (\operatorname{ch} x)' = e^x \operatorname{ch} x + e^x \operatorname{sh} x = e^x (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) = \\ &= e^x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = e^x \frac{2e^x}{2} = e^x e^x = e^{2x}\end{aligned}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha már az elején beszorzunk:

$$e^x \operatorname{ch} x = e^x \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x e^x + e^x e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2},$$

melynek deriváltja:

$$\left(\frac{e^{2x} + 1}{2} \right)' = \left(\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \right)' = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 + 0 = e^{2x}$$

2. feladat (c)

Számítsuk ki a $\sqrt[3]{1-2x}$ függvény deriváltját.

2. feladat (c)

Számítsuk ki a $\sqrt[3]{1-2x}$ függvény deriváltját.

Ez egy összetett függvény:

$$(\sqrt[3]{1-2x})' = \frac{1}{3}(1-2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}.$$

2. feladat (d)

Számítsuk ki a $\sqrt{x + \sqrt{x}}$ függvény deriváltját.

2. feladat (d)

Számítsuk ki a $\sqrt{x + \sqrt{x}}$ függvény deriváltját.

Összetett függvény:

$$\left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2 + x^{-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

2. feladat (e)

Számítsuk ki a $\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$ függvény deriváltját.

2. feladat (e)

Számítsuk ki a $\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$ függvény deriváltját.

Ez is egy összetett függvény, először csak a belső függvényt deriváljuk, melyben egy szorzat is van:

$$(1+x\sqrt{x+3})' = 1 \cdot \sqrt{x+3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}},$$

felhasználva, hogy $(\sqrt{x+3})' = \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ (ez is egy összetett függvény). Így az eredeti függvény deriváltja:

$$\left(\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}\right)' = \frac{1}{3} (1+x\sqrt{x+3})^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}}\right).$$

3. feladat (a)

Határozzuk meg a $\cos(5x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n -edfokú Taylor-polinomját.

3. feladat (a)

Határozzuk meg a $\cos(5x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n -edfokú Taylor-polinomját.

Mivel $\cos x \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, így

$$\begin{aligned}\cos(5x) &\approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(5x)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{5^{2k}}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-25)^k}{(2k)!} x^{2k} = \\ &= 1 - \frac{25}{2}x^2 + \frac{625}{24}x^4 - \dots + \frac{(-25)^n}{(2n)!}x^{2n}\end{aligned}$$

Ez a $2n$ -edfokú (és $2n+1$ -edfokú) Taylor-polinom, ha n -edfokút szeretnénk, akkor k csak $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -ig megy:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-25)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

A harmadfokú Taylor-polinom:

$$1 - \frac{25}{2}x^2$$

3. feladat (b)

Határozzuk meg a e^{-x^2} függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n -edfokú Taylor-polinomját.

3. feladat (b)

Határozzuk meg a e^{-x^2} függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n -edfokú Taylor-polinomját.

Mivel $e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$, így

$$e^{-x^2} \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$$

Ez a $2n$ -edfokú (és $2n + 1$ -edfokú) Taylor-polinom, ha n -edfokút szeretnénk, akkor k csak $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -ig megy:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}$$

A harmadfokú Taylor-polinom:

$$1 - x^2$$

3. feladat (c)

Határozzuk meg a $\frac{x}{3+x}$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n -edfokú Taylor-polinomját.

3. feladat (c)

Határozzuk meg a $\frac{x}{3+x}$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n -edfokú Taylor-polinomját.

Itt azt használjuk fel, hogy $\frac{1}{1-x} \approx \sum_{k=0}^n x^k$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{3+x} &= \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} \approx \frac{x}{3} \sum_{k=0}^n \left(-\frac{x}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} x^{k+1} = \\ &= \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} - \frac{x^4}{81} + \cdots + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{n+1}\end{aligned}$$

Ez az $(n+1)$ -edfokú Taylor-polinom, az n -edfokú:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} x^{k+1} = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} - \frac{x^4}{81} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} x^n$$

A harmadfokú Taylor-polinom:

$$\frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27}$$

Házi feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

(a) $(1 + \sqrt[3]{x})^3$,

(b) $5^x \arctg(x)$,

(c) $\sqrt[3]{\sin(2x + 1)}$,

(d) $3xe^{3x}$,

(e) $\frac{\operatorname{tg}(5x)}{3 - 2x}$.

2. Határozzuk meg az $f(x) = x \sin(-2x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n -edfokú Taylor-polinomját.

Házi feladatok megoldásai

1. (a) $\frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}},$

(b) $5^x \arctg(x) \ln 5 + \frac{5^x}{1 + x^2},$

(c) $\frac{2 \cos(2x + 1)}{3 \sqrt[3]{\sin^2(2x + 1)}},$

(d) $(9x + 3)e^{3x},$

(e) $\frac{\frac{15-10x}{\cos^2(5x)} + 2\operatorname{tg}(5x)}{(3 - 2x)^2}.$

2. n -edfokú: $\sum_{k=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \frac{2^{2k+1}(-1)^{k+1}}{(2k + 1)!} x^{2k+2},$ harmadfokú: $-2x^2.$