13. előadás

Középértéktételek és a L'Hospital-szabály

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

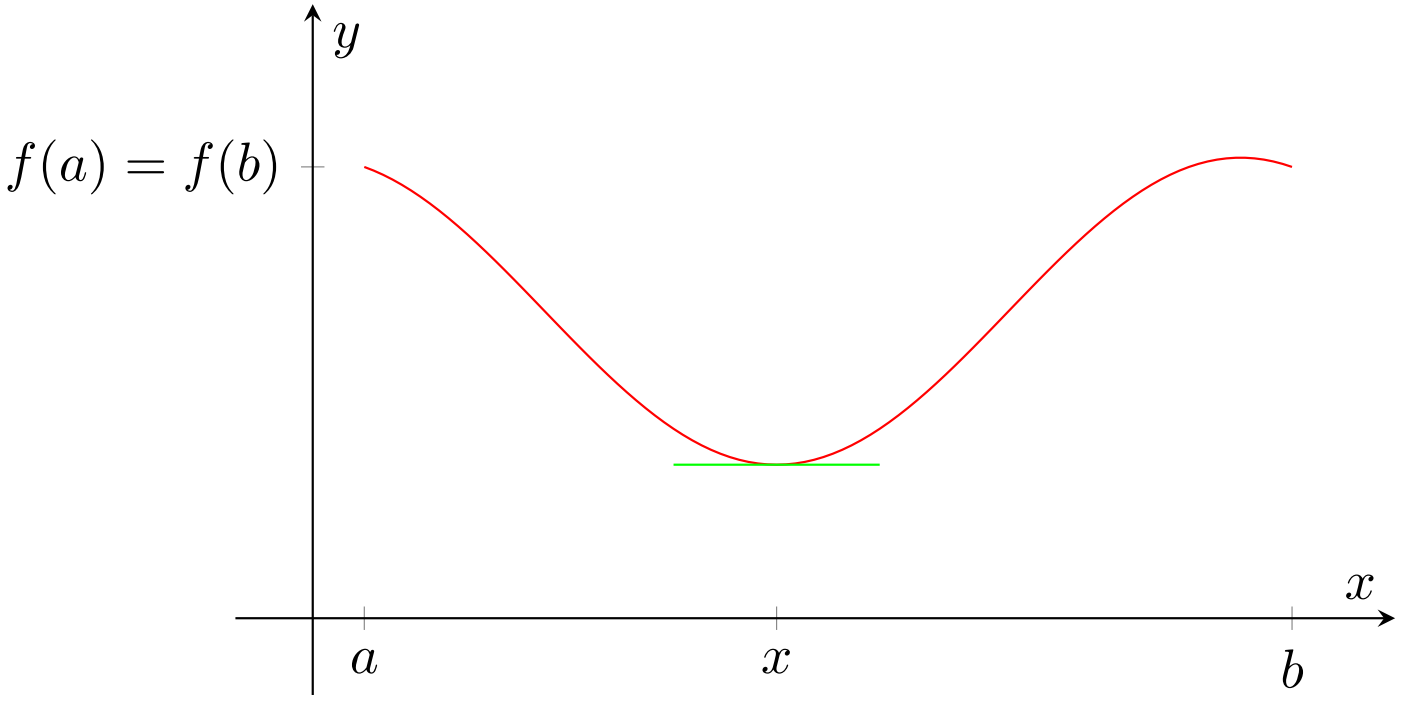
2026. október 28.

Rolle-tétel

Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon folytonos, az (a, b)-n differenciálható, és $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $x \in (a, b)$, hogy $f'(x) = 0$ (az érintő vízszintes).

Bizonyítás:

A Weierstrass-tétel szerint a függvény felveszi a minimumát és a maximumát, ezek közül legalább az egyik belső pont. Ez lokális szélsőérték, így a derivált nulla.



Lagrange-féle középértéktétel

Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumon folytonos, az (a,b)-n differenciálható, akkor van olyan $x \in (a,b)$, hogy

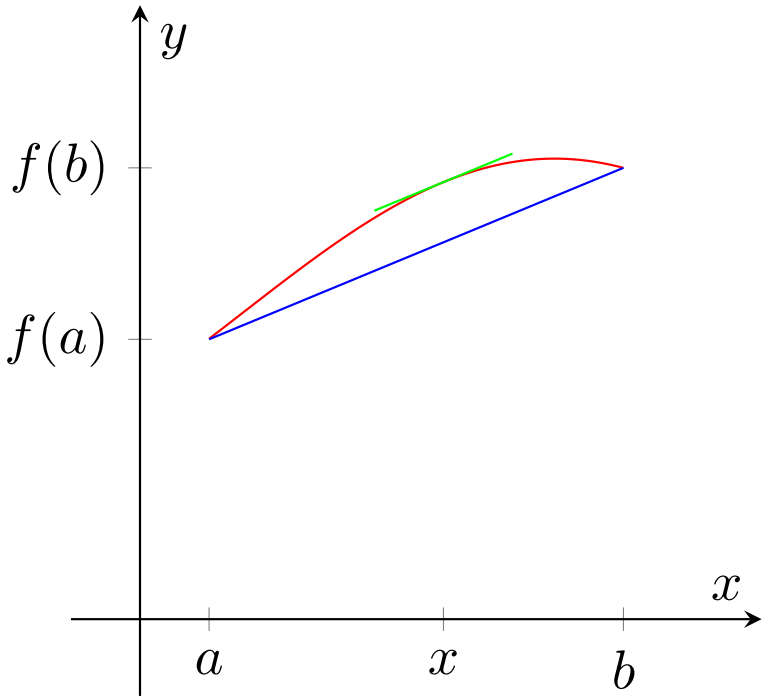
$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bizonyítás:

A Rolle-tételt alkalmazzuk az

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

függvényre.



$$0 = F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

és

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - (f(b)-f(a)) = f(a) = F(a)$$

Cauchy-féle középértéktétel

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az $[a,b]$ intervallumon folytonosak, az (a,b)-n differenciálhatóak és $g'(x) \neq 0$ $x \in (a,b)$ esetén, akkor van olyan $x \in (a,b)$, hogy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Bizonyítás:

A Rolle-tételt alkalmazzuk az

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$$

függvényre.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$$

$$F(b)-F(a) = \left(f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(b) \right) - \left(f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) \right) =$$

$$= f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \left(g(b)-g(a) \right) = 0$$

Akikről eddig szó volt

Michel Rolle (1652–1719) francia

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) olasz-francia

Augustin Louis Cauchy (1789–1857) francia

Guillaume de l'Hospital (1661–1704) francia

Brook Taylor (1685–1731) angol

Étienne Bézout (1730–1784) francia

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) német

Bernard Bolzano (1781–1848) szudétanémet

Karl Weierstrass (1815–1897) német

L'Hospital-szabály

Bernoulli–L'Hospital-szabály a $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ határérték kiszámítására

(szokásos írásmód a L'Hôpital is)

Az $f(x)$ és $g(x)$ függvények differenciálhatóak az α egy nyílt környezetében (esetleg α-ban nem).
Ebben a környezetben $g'(x) \neq 0$ ($x \neq \alpha$).
Továbbá

- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$, vagy
- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \pm\infty$ és $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \pm\infty$.

Ekkor ha létezik a $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, akkor $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$.

Az α, β valós szám vagy $\pm\infty$ lehet.

Az $x \to \alpha$ helyett mindenütt lehet venni jobb vagy bal oldali határértéket.

Példa

Mennyi a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ határérték?

$f(x) = e^x - 1$ és $g(x) = x$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Deriváltak: $f'(x) = e^x$ és $g'(x) = 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Feladat

Mennyi a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ határérték?

Feladat

Mennyi a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ határérték?

$f(x) = \sin x$ és $g(x) = x$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

Deriváltak: $f'(x) = \cos x$ és $g'(x) = 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Egy megjegyzés

Csak akkor működik a szabály, ha a $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik.

Ha nem létezik, attól még a $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ létezhet:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = ?$$

$$\lim_{x\to\infty} (x+\sin x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\infty} x = +\infty$$

$$f(x) = x+\sin x \qquad g(x) = x$$
$$f'(x) = 1+\cos x \qquad g'(x) = 1$$

Tehát:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} 1+\cos x,$$

ami nem létezik. De

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1+\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Többszöri alkalmazás

Többször is alkalmazhatjuk a tételt:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\alpha}\frac{f''(x)}{g''(x)} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \ldots = \beta$$

Példa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$$

Többszöri alkalmazás

Többször is alkalmazhatjuk a tételt:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\alpha}\frac{f''(x)}{g''(x)} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \ldots = \beta$$

Példa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$$

$$\lim_{x\to 0} e^x - x - 1 = e^0 - 0 - 1 = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - x - 1 & g(x) &= x^2 \\ f'(x) &= e^x - 1 & g'(x) &= 2x \\ f''(x) &= e^x & g''(x) &= 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Feladat

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$$

Feladat

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = ?$$

Ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték, tehát alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Ha nem törtről van szó

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani.

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow}$$

Ha nem törtről van szó

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani.

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}\cdot 2} = 0$$

De van, amikor ennyire nem látszik:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow}$$

Ha nem törtről van szó

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani.

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}\cdot 2} = 0$$

De van, amikor ennyire nem látszik:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{-1} = 0$$

Két tört különbsége a közös nevezőre való hozás után már egy tört:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} =$$

Ha nem törtről van szó

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani.

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}\cdot 2} = 0$$

De van, amikor ennyire nem látszik:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{-1} = 0$$

Két tört különbsége a közös nevezőre való hozás után már egy tört:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + x\frac{1}{x} + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}$$

Egy fontos különbség

A tört deriválása és a L'Hospital-szabály két különböző dolog!

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nem szabad összekeverni!

Egy régebbi példa

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3-2x}-1}$$

Egy régebbi példa

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3-2x}-1}\overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{\frac{1}{2\sqrt{3-2x}}(-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-\sqrt{3-2x}}{2\sqrt{x+3}}=\frac{-\sqrt{1}}{2\sqrt{4}}=-\frac{1}{4}$$

Vajon mennyi a következő határérték?

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{3-2x}-1}=?$$

Egy régebbi példa

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{3-2x}-1}\overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{\frac{1}{2\sqrt{3-2x}}(-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{-\sqrt{3-2x}}{2\sqrt{x+3}}=\frac{-\sqrt{1}}{2\sqrt{4}}=-\frac{1}{4}$$

Vajon mennyi a következő határérték?

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{3-2x}-1}=?$$

Itt nem alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt, mert nem $\frac{0}{0}$ alakú!

Egyébként nem létezik a határérték, mert $\frac{1}{0}$ alakú, és a nevező lehet negatív és pozitív is.