14. előadás

Aszimptoták és konvexitás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2026. november 3.

Aszimptoták

Az aszimptota olyan egyenes, melyet a függvény grafikonja tetszőlegesen megközelít.

Ez háromféle lehet:

- függőleges aszimptota
- vízszintes aszimptota
- ferde aszimptota

Függőleges aszimptota

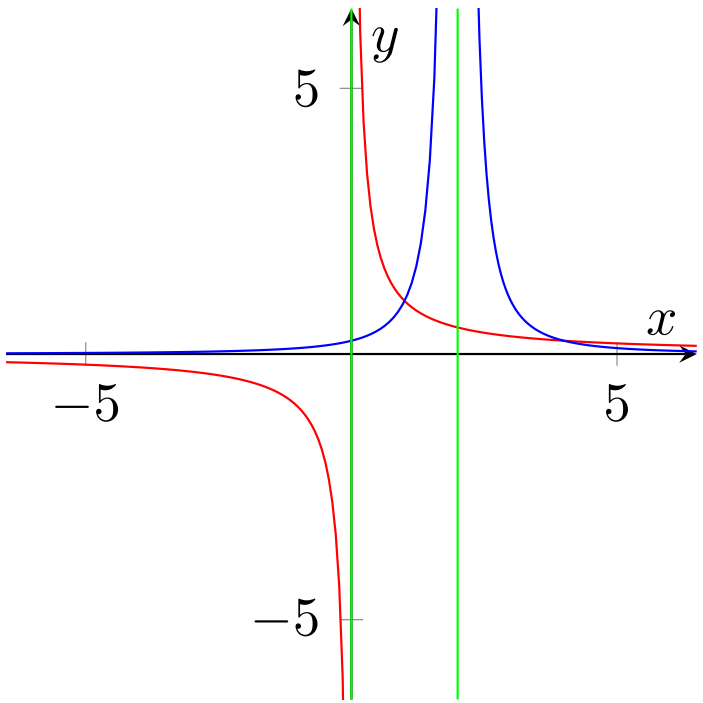
Az $f(x)$ függvénynek függőleges aszimptotája van az x_0 pontban, ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, esetleg csak az egyik oldali határérték.

Ekkor az $x = x_0$ egyenletű egyenes az aszimptota.

Példák:

Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban függőleges aszimptotája van.
Egyenlete: $x = 0$.

Az $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ függvénynek az $x_0 = 2$ pontban függőleges aszimptotája van.
Egyenlete: $x = 2$.



Vízszintes aszimptota

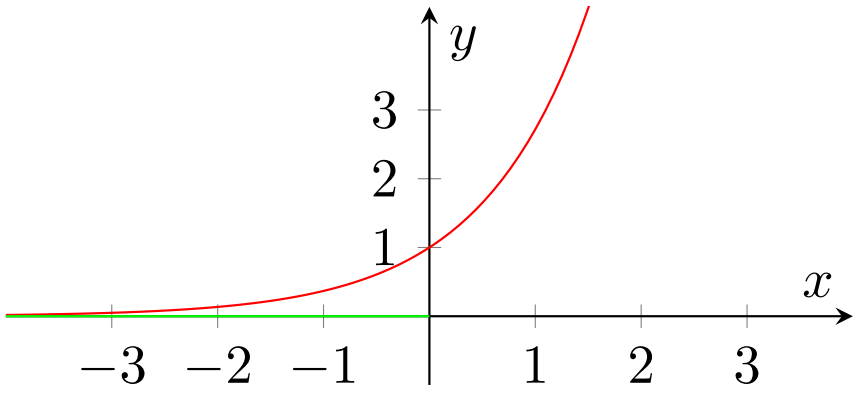
Az $f(x)$ függvénynek vízszintes aszimptotája van, ha $\pm\infty$-ben a határértéke egy véges szám.

Ha $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, akkor az $y = a$ egyenletű egyenes a vízszintes aszimptota a $+\infty$-ben.

A $-\infty$-ben hasonlóan definiáljuk.

Példák:

Az $f(x) = e^x$ függvénynek az $y = 0$ egyenes vízszintes aszimptotája a $-\infty$-ben.

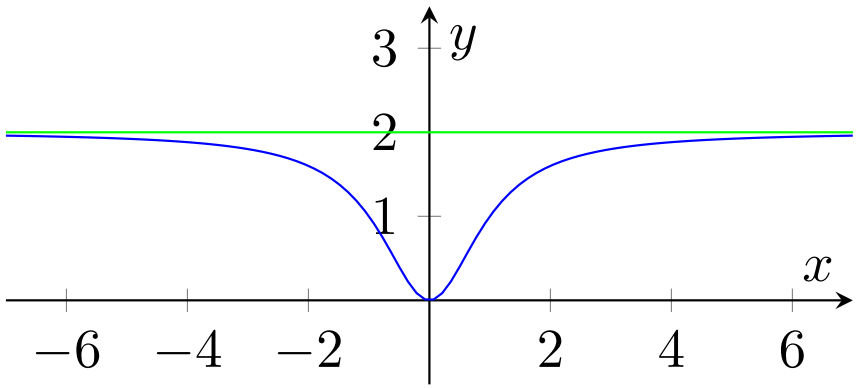


Az $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ függvénynek a határértéke a végtelenben:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = 2,$$

így az $y = 2$ egyenletű egyenes a vízszintes aszimptotája a $+\infty$-ben.

A $-\infty$-ben hasonlóan ugyanez az egyenes.



Ferde aszimptota

Az $f(x)$ függvénynek ferde aszimptotája van, ha a függvénygrafikon az $y = ax + b$ egyeneshez „simul” a végtelenben.

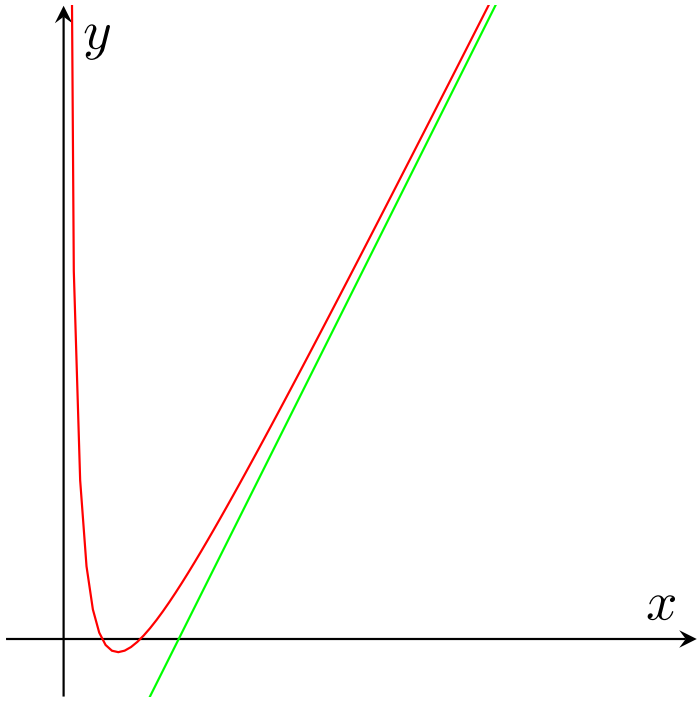
Az a és a b együtthatók kiszámítása:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax)$$

A $-\infty$-ben hasonlóan számítható.

Ha valamelyik határérték nem létezik vagy végtelen, akkor nincs ferde aszimptota.



Az a értékét gyakran a L'Hospital-szabály segítségével számolhatjuk ki:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to \infty} f'(x)$$

Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ függvény ferde aszimptotái

Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ függvény ferde aszimptotái

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-6x+4}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 - 6x + 4}{x} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 6x + 4 - 2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x + 4}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(-6 + \frac{4}{x}\right) = -6$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = 2x - 6$.
Hasonlóan a $-\infty$-ben is.

Az $f(x) = x^2$ függvény ferde aszimptotái

Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ függvény ferde aszimptotái

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-6x+4}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 - 6x + 4}{x} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 6x + 4 - 2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-6x + 4}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(-6 + \frac{4}{x}\right) = -6$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = 2x - 6$.
Hasonlóan a $-\infty$-ben is.

Az $f(x) = x^2$ függvény ferde aszimptotái

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty,$$

tehát ebben az esetben nem létezik ferde aszimptota.

Feladat

Milyen aszimptotái vannak az $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ függvénynek?

Feladat

Milyen aszimptotái vannak az $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ függvénynek?

Függőleges aszimptotája nincs (mindenütt értelmes és folytonos).

A határértéke:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty,$$

így csak ferde aszimptotája lehet.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x =$$

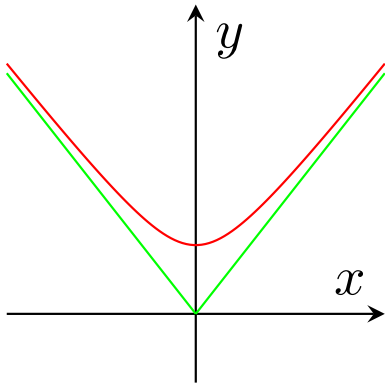
$$= \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

Így az aszimptota egyenlete a $+\infty$-ben $y = x$.

Feladat – folytatás

A $-\infty$-ben hasonlóan számolhatunk,
de figyelni kell az előjelekre:



$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{-|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-1} = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}+x)\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$$

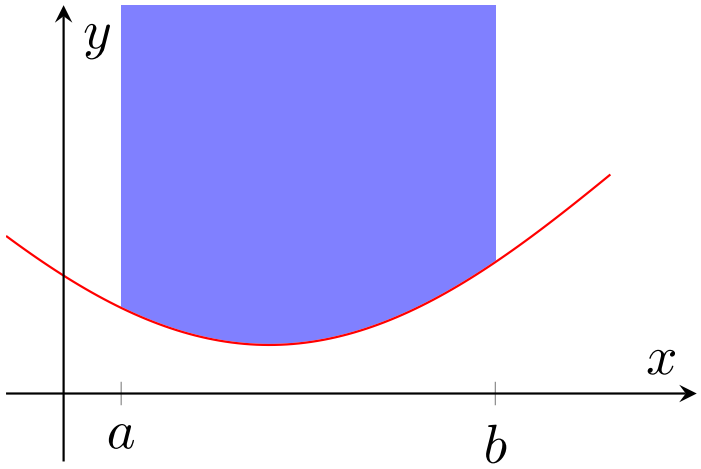
Így az aszimptota egyenlete a $-\infty$-ben $y = -x$.

Konvexitás

Egy $K \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz konvex, ha bármely $P, Q \in K$ pontra a PQ szakasz teljes egészében benne van a K-ban.

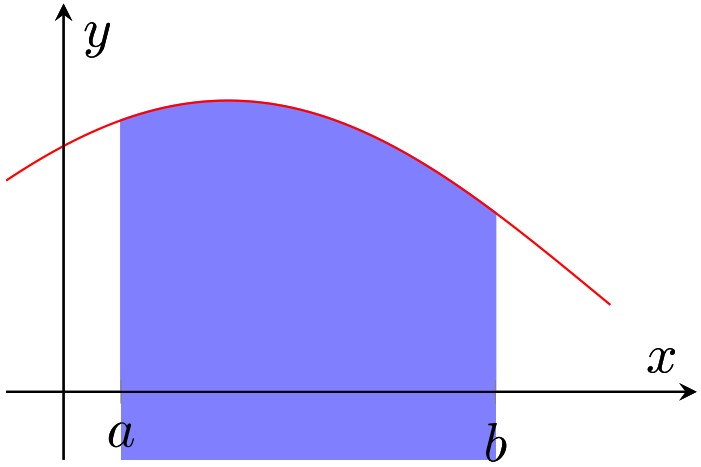
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon konvex, ha a grafikonja feletti tartomány konvex:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } y \geq f(x)\}$$



Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon konkáv, ha a grafikonja alatti tartomány konvex:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } y \leq f(x)\}$$



Ekvivalens tulajdonságok a konvexitásra

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a,b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konvex, ha

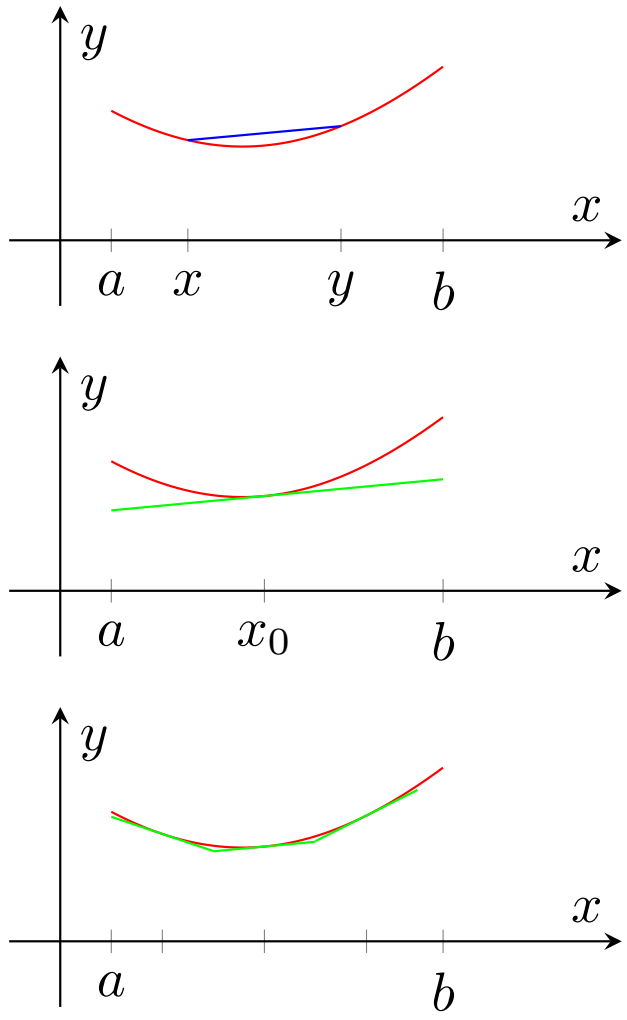
- minden $x, y \in [a,b]$-re az $(x, f(x))$ és az $(y, f(y))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon felett van, azaz

  $$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

  minden $\lambda \in [0,1]$-re.
- a függvénygrafikon az érintő felett halad, azaz

  $$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

  minden $x, x_0 \in [a,b]$ esetén.
- az érintő meredeksége, azaz $f'(x)$ monoton nő az $[a,b]$ intervallumon.
- $f''(x) \geq 0$ az $[a,b]$ intervallumon.



Ekvivalens tulajdonságok a konkávitásra

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a,b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konkáv, ha

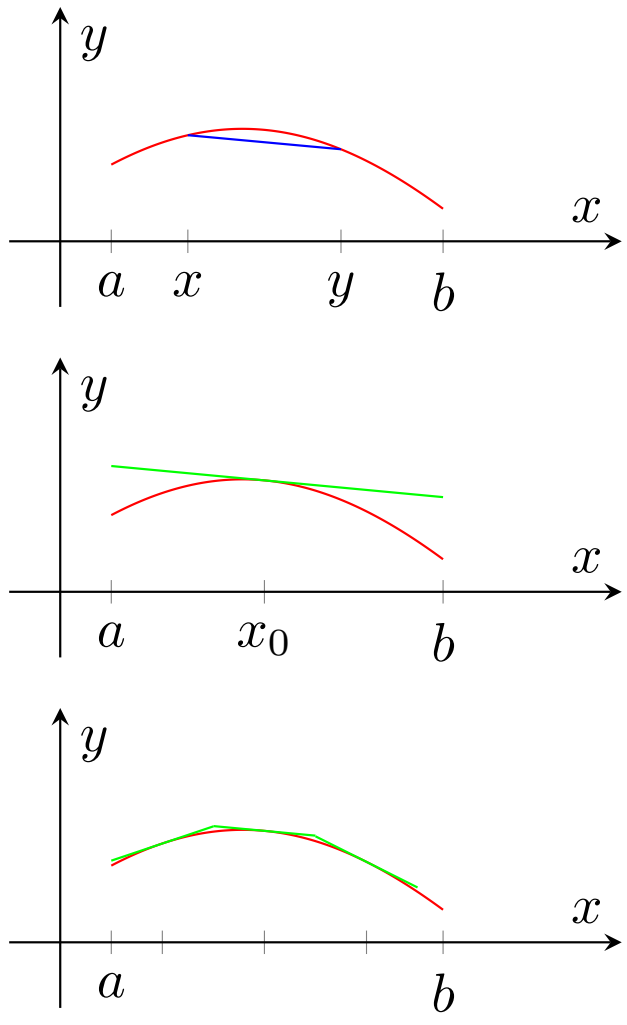
- minden $x, y \in [a,b]$-re az $(x, f(x))$ és az $(y, f(y))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon alatt van, azaz

  $$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \leq f(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

  minden $\lambda \in [0,1]$-re.
- a függvénygrafikon az érintő alatt halad, azaz

  $$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

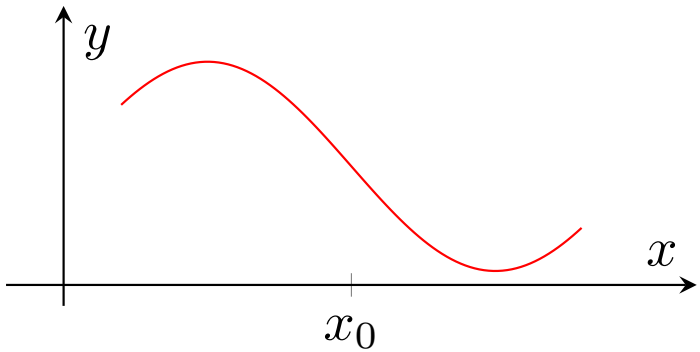
  minden $x, x_0 \in [a,b]$ esetén.
- az érintő meredeksége, azaz $f'(x)$ monoton csökken az $[a,b]$ intervallumon.
- $f''(x) \leq 0$ az $[a,b]$ intervallumon.



Inflexiós pont

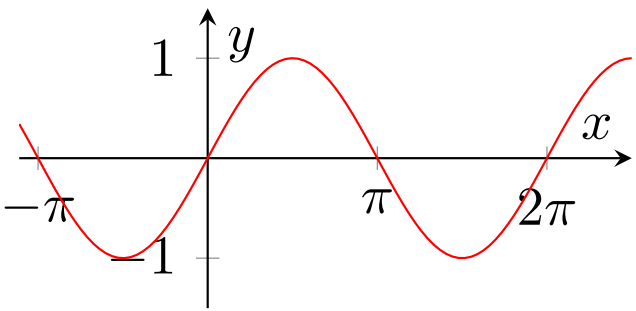
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) $x_0 \in D_f$ pontja inflexiós pont, ha a függvény x_0-ban differenciálható, és a függvény x_0-ban konvexitást vált, azaz előtte konkáv, utána konvex vagy fordítva.

Formálisan: van olyan $\delta > 0$, hogy
$[x_0 - \delta, x_0]$-ban konkáv és
$[x_0, x_0 + \delta]$-ban konvex vagy fordítva.



Példa:
A $\sin x$ függvénynek a π egész számú többszörösei az inflexiós pontjai.

Tétel:
Ha az x_0 inflexiós pont, akkor $f''(x_0) = 0$.



Ez visszafelé nem feltétlenül igaz:

$$f(x) = x^4$$
$$f'(x) = 4x^3$$
$$f''(x) = 12x^2 \text{ így } f''(0) = 0,$$

de a 0 nem inflexiós pont (a függvény mindenütt konvex).

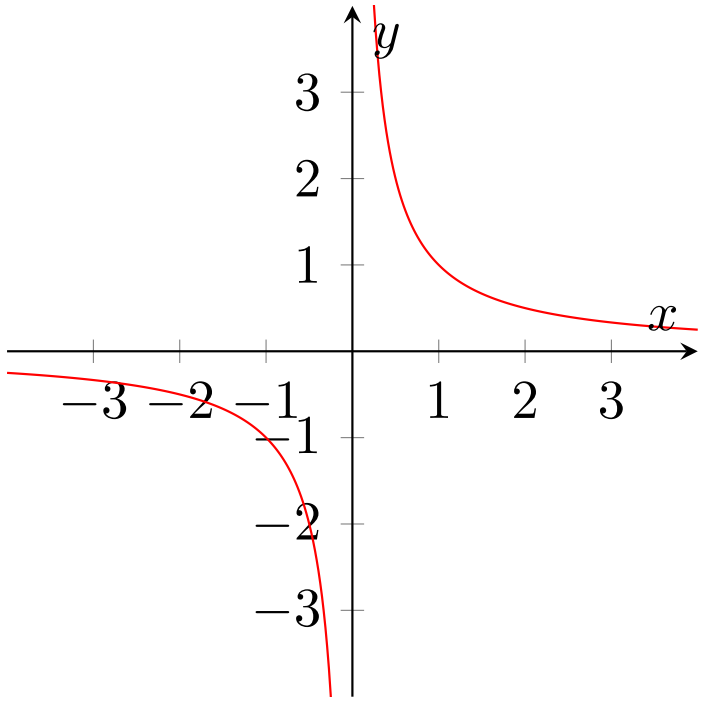
Példa

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény konvexitása.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$



A második deriváltsehol sem 0, így nincs inflexiós pont.

A második derivált előjeléből leolvashatjuk a konvexitást:

	$x < 0$	0	$0 < x$
f''	$-$	n. é.	$+$
f	konkáv	n. é.	konvex

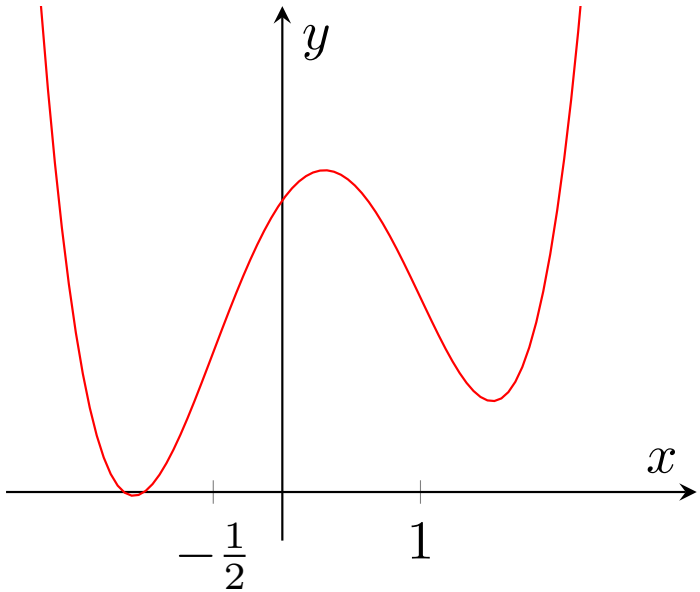
Feladat

Az $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ függvény konvexitása.

Feladat

Az $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ függvény konvexitása.
Kiszámoljuk a függvény második deriváltját:

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$$
$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 6x - 6$$



A második derivált nullhelyei:

$$f''(x) = 0$$
$$12x^2 - 6x - 6 = 0$$
$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

A második derivált előjeléből leolvashatjuk a konvexitást:

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	1	$1 < x$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	konvex	inf. pont	konkáv	inf. pont	konvex