

3. előadás

Polinomok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2026. szeptember 16.

Definíció

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

polinom **foka**: n (feltéve $a_n \neq 0$)

jelölése: $\deg p = n$

a_n **főegyüttható**

a_0 **konstans tag**

Speciális esetek:

$p(x) \equiv 0$ **nullpolinom** ($\deg = -\infty$ vagy -1)

$p(x) \equiv c$ **konstans polinom** ($\deg = 0$ feltéve, hogy $c \neq 0$)

$p(x) = ax + b$ **lineáris polinom** (feltéve $a \neq 0$) ($\deg = 1$)

Polinom **nullhelye** vagy **gyöke**: az az x_0 szám, melyre $p(x_0) = 0$.

Algebra alaptétele:

Minden legalább elsőfokú polinomnak van gyöke a komplex számok körében.

Azaz egy n -edfokú polinomnak n darab gyöke van a komplex számok körében multiplicitással számolva.

Polinomosztás

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \quad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az **osztó**, $r(x)$ a **maradék**.

Analógia: maradékos osztás: pl. 25-öt maradékosan osztjuk 3-mal:

$25 = 8 \cdot 3 + 1$: a maradék (1) mindig kisebb, mint az osztó (3).

Példa: $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$:

$$2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 7x - 10 = (2x^2 + 5x - 1)(x^2 - x + 2) + (-4x - 8)$$

Speciális eset: $g(x) = x - a$ elsőfokú polinom, akkor $r(x) = c$ konstans:

$$f(x) = q(x)(x - a) + c$$

Ha x helyébe a -t helyettesítünk, akkor $f(a) = q(a)(a - a) + c$, azaz $f(a) = c$. A $c = 0$ eset:

(kis) Bézout-tétel:

Ha egy polinomnak gyöke egy a szám, akkor az $(x - a)$ kiemelhető belőle.

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$x^3 + 3x^2 - 5x + 3 = (x - 2)($$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 5x + 3 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \end{array} = (x - 2)(x^2$$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 5x + 3 = (x - 2)(x^2 \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline 5x^2 - 5x \end{array}$$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 5x + 3 = (x - 2)(x^2 + 5x \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 5x^2 - 5x + 3 \\ \underline{5x^2 - 10x} \\ 15x + 3 \end{array}$$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 5x + 3 = (x - 2)(x^2 + 5x \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 5x^2 - 5x \\ \underline{5x^2 - 10x} \\ 5x + 3 \end{array}$$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 5x + 3 = (x - 2)(x^2 + 5x + 5) \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 5x^2 - 5x \\ \underline{5x^2 - 10x} \\ 5x + 3 \\ \underline{5x - 10} \\ 13 \end{array}$$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 5x + 3 = (x - 2)(x^2 + 5x + 5) \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline 5x^2 - 5x \\ 5x^2 - 10x \\ \hline 5x + 3 \\ 5x - 10 \\ \hline 13 \end{array}$$

Egy példa

Példa: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 5x + 3 = (x - 2)(x^2 + 5x + 5) + 13 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 5x^2 - 5x \\ \underline{5x^2 - 10x} \\ 5x + 3 \\ \underline{5x - 10} \\ 13 \end{array}$$

Tehát a maradék 13.

Feladat

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

Feladat

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1 = (x + 1)($$

Feladat

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1 \\ \underline{x^4 + - + - } \end{array} = (x + 1)(x^3$$

Feladat

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1 = (x + 1)(x^3 \\ \underline{x^4 + x^3} \\ x^3 - 7x^2 + 8x - 1 \end{array}$$

Feladat

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 \\ \underline{x^4 + x^3} \\ x^3 - 7x^2 + 8x - 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ - 6x^2 + 8x - 1 \end{array}$$

Feladat

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 \\ \underline{x^4 + x^3} \\ x^3 - 7x^2 + 8x - 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ - 8x^2 + 8x - 1 \end{array}$$

Feladat

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 - 8x \\ \underline{x^4 + x^3} \\ x^3 - 7x^2 + 8x - 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ - 8x^2 + 8x - 1 \\ \underline{+ 8x - 8x + 8x - 1} \end{array}$$

Feladat

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 - 8x \\ \underline{x^4 + x^3} \\ x^3 - 7x^2 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ - 8x^2 + 8x \\ \underline{- 8x^2 - 8x} \\ 16x - 1 \end{array}$$

Feladat

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 - 8x + 16) \\ \underline{x^4 + x^3} \\ x^3 - 7x^2 + 8x - 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ - 8x^2 + 8x - 1 \\ \underline{- 8x^2 - 8x} \\ 16x - 1 \\ \underline{16x + 16} \end{array}$$

Feladat

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 - 8x + 16) \\ \underline{x^4 + x^3} \\ x^3 - 7x^2 + 8x - 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ - 8x^2 + 8x - 1 \\ + 8x - 1 \\ - 1 \\ \underline{- 16x + 16} \\ 16x - 1 \\ \underline{16x + 16} \\ - 17 \end{array}$$

Feladat

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1$ és $g(x) = x + 1$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 - 8x + 16) - 17 \\ \hline x^4 + x^3 \\ \hline x^3 - 7x^2 \\ x^3 + x^2 \\ \hline -8x^2 + 8x \\ -8x^2 - 8x \\ \hline 16x - 1 \\ 16x + 16 \\ \hline -17 \end{array}$$

Még egy feladat

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

Még egy feladat

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10 = (x^2 - x + 2)($$

Még egy feladat

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10 \\ \underline{2x^4 - 2x^3 + 4x^2} \end{array} = (x^2 - x + 2)(2x^2$$

Még egy feladat

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{rcccccccc} 2x^4 & + & 3x^3 & - & 2x^2 & + & 7x & - & 10 & = & (x^2 - x + 2)(2x^2 \\ \hline 2x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & & \\ \hline & & 5x^3 & - & 6x^2 & + & 7x & & & & \end{array}$$

Még egy feladat

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{rcccccccc} 2x^4 & + & 3x^3 & - & 2x^2 & + & 7x & - & 10 & = & (x^2 - x + 2)(2x^2 + 5x \\ \hline 2x^4 & - & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & & \\ \hline & & 5x^3 & - & 6x^2 & + & 7x & & & & \\ & & 5x^3 & - & 5x^2 & + & 10x & & & & \end{array}$$

Még egy feladat

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10 \\ \underline{2x^4 - 2x^3 + 4x^2} \\ 5x^3 - 6x^2 + 7x \\ \underline{5x^3 - 5x^2 + 10x} \\ -x^2 - 3x - 10 \end{array} = (x^2 - x + 2)(2x^2 + 5x - 10)$$

Még egy feladat

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10 = (x^2 - x + 2)(2x^2 + 5x - 1) \\ \underline{2x^4 - 2x^3 + 4x^2} \\ 5x^3 - 6x^2 + 7x \\ \underline{5x^3 - 5x^2 + 10x} \\ -x^2 - 3x - 10 \\ \underline{-x^2 + x - 2} \\ 0 \end{array}$$

Még egy feladat

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10 = (x^2 - x + 2)(2x^2 + 5x - 1) \\ \underline{2x^4 - 2x^3 + 4x^2} \\ 5x^3 - 6x^2 + 7x \\ \underline{5x^3 - 5x^2 + 10x} \\ -x^2 - 3x - 10 \\ \underline{-x^2 + x + 2} \\ -4x - 8 \end{array}$$

Még egy feladat

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10$ és $g(x) = x^2 - x + 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 10 \\ \underline{2x^4 - 2x^3 + 4x^2} \\ 5x^3 - 6x^2 + 7x \\ \underline{5x^3 - 5x^2 + 10x} \\ -x^2 - 3x - 10 \\ \underline{-x^2 + x - 2} \\ -4x - 8 \end{array} = (x^2 - x + 2)(2x^2 + 5x - 1) + (-4x - 8)$$

Tehát a maradék $-4x - 8$.

Gyökök multiplicitása

A $p(x)$ polinom a gyökének **multiplicitása** m , ha $(x - a)^m$ kiemelhető p -ből, de $(x - a)^{m+1}$ már nem (m -szeres gyök).

Például: $p(x) = x^3 + 2x^2 + x$ polinomban a -1 hányiszoros gyök?

$$x^3 + 2x^2 + x = (x + 1)(x^2 + x) = (x + 1)(x + 1)x = (x + 1)^2 x,$$

azaz kétszeres gyök ($m = 2$).

Gyöktényezős alak:

Ha a $p(x)$ n -edfokú polinom főegyütthatója a_n és gyökei $x_1, x_2, \dots, x_k$, melyek multiplicitása $m_1, m_2, \dots, m_k$, és ezek összege n , akkor

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}$$

Tétel a racionális gyökökről

Az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinom $\frac{p}{q}$ racionális gyökeire (p, q egészek és relatív prímek) teljesül, hogy p osztja a_0 -t és q osztja a_n -et.

Bizonyítás: Ha $x = \frac{p}{q}$ gyök, akkor

$$\begin{aligned} a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 &= 0 \\ a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 &= 0 \\ a_n p^n + \underbrace{a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}_{\text{osztható } q\text{-val}} &= 0. \end{aligned}$$

Így $a_n p^n$ osztható q -val, így a_n is (p, q relatív prím).

Hasonlóan p osztja a_0 -t.

Speciális eset: $a_n = \pm 1$

Ekkor $q = \pm 1$, így az összes racionális gyök egész.

Az egész gyökök az a_0 konstanstag osztói közül kerülnek ki.

Gyökkeresés

Keressük meg az $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ polinom gyökeit!

Először keresünk egy racionális gyököt, amit kiemelve egy másodfokú polinomot kapunk, melynek a megoldóképlettel meghatározzuk a gyökeit.

Lehetséges gyökök a 3 osztói: $-3, -1, 1, 3$.

Ezeket behelyettesítgetve:

$$x = 1 : 1 + 6 + 10 + 3 = 20 \neq 0, \text{ így az } 1 \text{ nem gyök,}$$

$$x = -1 : -1 + 6 - 10 + 3 = -2 \neq 0, \text{ így a } -1 \text{ nem gyök,}$$

$$x = 3 : 27 + 54 + 30 + 3 = 114 \neq 0, \text{ így a } 3 \text{ nem gyök,}$$

$$x = -3 : -27 + 54 - 30 + 3 = 0, \text{ így a } -3 \text{ gyök.}$$

Ekkor az $(x + 3)$ -at kiemeljük:

$$x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = (x + 3)(x^2 + 3x + 1)$$

Végül az $x^2 + 3x + 1 = 0$ másodfokú egyenletet megoldjuk:

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Tehát a gyökök: $-3, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$.

Feladat

Keressük meg az $x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 7x + 10$ polinom gyökeit!

Feladat

Keressük meg az $x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 7x + 10$ polinom gyökeit!

Először racionális gyököt keresünk. Lehetséges gyökök a 10 osztói:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10.$$

Ezeket behelyettesítgetve ± 1 nem gyök, de $x_1 = 2$ gyök. Ekkor az $(x - 2)$ -t kiemeljük:

$$x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 7x + 10 = (x - 2)(x^3 + 4x^2 - 6x - 5)$$

Az $x^3 + 4x^2 - 6x - 5$ polinom lehetséges racionális gyökei az 5 osztói: $\pm 1, \pm 5$.

A ± 1 továbbra sem gyök, de $x_2 = -5$ igen, így $(x + 5)$ kiemelhető:

$$x^3 + 4x^2 - 6x - 5 = (x + 5)(x^2 - x - 1)$$

Végül az $x^2 - x - 1 = 0$ másodfokú egyenletet megoldjuk:

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Tehát a gyökök: $2, -5, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.