

1. előadás

Improprius integrál

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2026. február 16.

Bevezetés

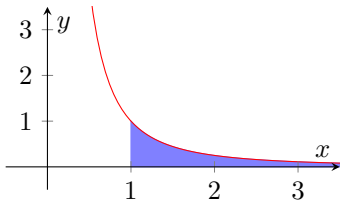
Az a -tól b -ig tartó integrál: $\int_a^b f(x) \, dx$.

Mi történik, ha a b -vel a végtelenbe tartunk?

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

Ez általában a végtelenhez tart, de van, amikor véges a határérték:

Példa: $f(x) = \frac{1}{x^2}$



$$\begin{aligned} \int_1^b \frac{1}{x^2} \, dx &= \int_1^b x^{-2} \, dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^b = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{1} \right) = 1 - \frac{1}{b} \\ \Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} \, dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1 \end{aligned}$$

Elsőfajú improprius integrál

Nem korlátos intervallumon integrálunk egy függvényt.

Az integrált véges intervallumokon vett integrálok határértékeként definiáljuk:

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) \, dx + \int_0^{+\infty} f(x) \, dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) \, dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) \, dx \end{aligned}$$

Ha ezek a határértékek léteznek és végesek, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál **konvergens**.

Ha nem léteznek, vagy végtelen a határérték, akkor az integrál **divergens**.

Példa: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ az $[1, +\infty)$ intervallumon:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} \, dx = 1$$

Egy másik példa

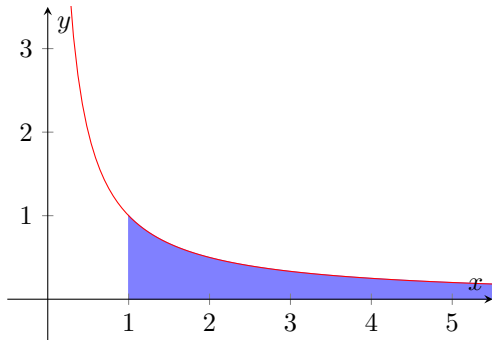
Integráljuk az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt az $[1, +\infty)$ intervallumon:

Egy másik példa

Integráljuk az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt az $[1, +\infty)$ intervallumon:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b - \ln 1 = +\infty$$

Így ez az improprius integrál divergens.



Az $\frac{1}{x^p}$ általában

Konvergens vagy divergens az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ improprius integrál ($p \in \mathbb{R}$)?

Az $\frac{1}{x^p}$ általában

Konvergens vagy divergens az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ improprius integrál ($p \in \mathbb{R}$)?

A $p = 1$ esetén divergens (előző dia), míg $p \neq 1$ esetén:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^q = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } q > 0 \\ 1, & \text{ha } q = 0 \\ 0, & \text{ha } q < 0 \end{cases}$$

Tehát $1 - p > 0$, azaz $1 > p$ esetén az improprius integrál divergens.
($p = 1$ esetén is divergens)

Ha $1 - p < 0$, azaz $1 < p$, akkor konvergens, és az értéke:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$

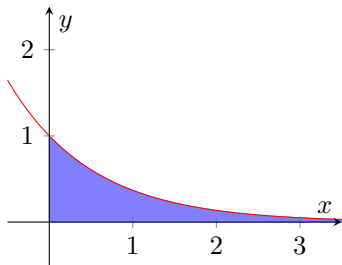
Az exponenciális függvény

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \, dx =$$

Az exponenciális függvény

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-b} - (-1) = 1$$

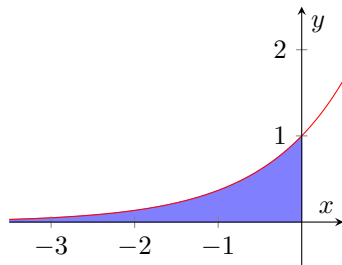
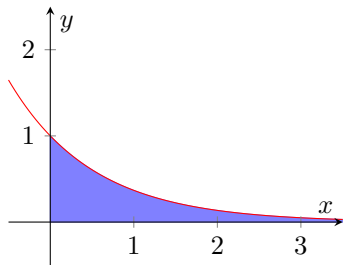
Felhasználtuk, hogy $(e^{-x})' = -e^{-x}$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.



Az exponenciális függvény

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-b} - (-1) = 1$$

Felhasználtuk, hogy $(e^{-x})' = -e^{-x}$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.



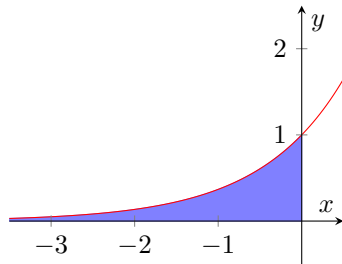
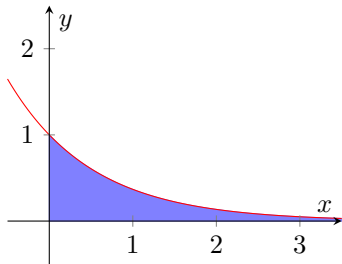
Ugyanez fordítva:

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx =$$

Az exponenciális függvény

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-b} - (-1) = 1$$

Felhasználtuk, hogy $(e^{-x})' = -e^{-x}$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.



Ugyanez fordítva:

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1$$

Teljes számegyenesen vett integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} \, dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

Teljes számegyenesen vett integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Kiszámoljuk a két integrált:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [\operatorname{arctg} x]_a^0 = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (0 - \operatorname{arctg} a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

A másik hasonló:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\operatorname{arctg} x]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b - 0 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

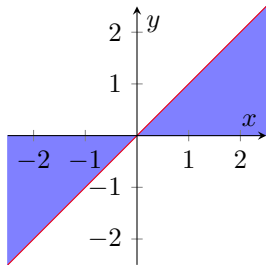
Tehát:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Egy veszély

Ha a teljes számegyenesen integrálunk, akkor muszáj szétszedni két integrálra, nem lehet egyetlen határértékkel felírni:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx \neq \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a x \, dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-a}^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{(-a)^2}{2} \right) = 0$$



Valójában ez az improprius integrál divergens:

$$\int_0^{+\infty} x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^2}{2} = +\infty$$

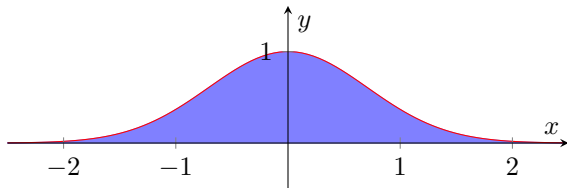
Gauss-görbe

Az $\int e^{-x^2} dx$ határozatlan integrált nem tudjuk felírni elemi függvényekkel.

De tudjuk, hogy

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



Ennek a valószínűségi számításban és a statisztikában van szerepe (normális eloszlás sűrűségfüggvénye).