10. előadás

Komplex számok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2026. március 17.

Bevezető mese: $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ a + b\sqrt{2} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{R}$$

Ha $a_1 + b_1\sqrt{2}, a_2 + b_2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, akkor

$$\begin{aligned}
\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) + \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2} \\
\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) - \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2} \\
\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \cdot \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) &= (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Még osztani is tudunk:

$$\frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}} = \frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}} \cdot \frac{a_2 - b_2\sqrt{2}}{a_2 - b_2\sqrt{2}} = \frac{(a_1a_2 - 2b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)\sqrt{2}}{a_2^2 - 2b_2^2} =$$
$$= \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2}\sqrt{2}$$

A racionális számok körében az $x^2 - 2 = 0$ egyenletnek nincs megoldása, de a $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$-ben már van.

A komplex számok

Az $x^2 + 1 = 0$, azaz az $x^2 = -1$ egyenletnek nincs valós megoldása.

Legyen $i = \sqrt{-1}$ egy szimbólum, amivel számolunk ($i^2 = -1$).

Ekkor minden szám $a + bi$ alakú ($a, b \in \mathbb{R}$), és úgy számolunk, mintha i egy változó lenne, de kihasználjuk, hogy $i^2 = -1$.

Összeadás:
$(2 + 3i) + (4 + 5i) =$

A komplex számok

Az $x^2 + 1 = 0$, azaz az $x^2 = -1$ egyenletnek nincs valós megoldása.

Legyen $i = \sqrt{-1}$ egy szimbólum, amivel számolunk ($i^2 = -1$).

Ekkor minden szám $a + bi$ alakú ($a, b \in \mathbb{R}$), és úgy számolunk, mintha i egy változó lenne, de kihasználjuk, hogy $i^2 = -1$.

Összeadás:
$(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$

Kivonás:
$(2 + 3i) - (4 + 5i) =$

A komplex számok

Az $x^2 + 1 = 0$, azaz az $x^2 = -1$ egyenletnek nincs valós megoldása.

Legyen $i = \sqrt{-1}$ egy szimbólum, amivel számolunk ($i^2 = -1$).

Ekkor minden szám $a + bi$ alakú ($a, b \in \mathbb{R}$), és úgy számolunk, mintha i egy változó lenne, de kihasználjuk, hogy $i^2 = -1$.

Összeadás:

$(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$

Kivonás:

$(2 + 3i) - (4 + 5i) = \; -2 + (-2)i = -2 - 2i$

Szorzás:

$(2 + 3i)(4 + 5i) =$

A komplex számok

Az $x^2 + 1 = 0$, azaz az $x^2 = -1$ egyenletnek nincs valós megoldása.

Legyen $i = \sqrt{-1}$ egy szimbólum, amivel számolunk ($i^2 = -1$).

Ekkor minden szám $a + bi$ alakú ($a, b \in \mathbb{R}$), és úgy számolunk, mintha i egy változó lenne, de kihasználjuk, hogy $i^2 = -1$.

Összeadás:

$(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$

Kivonás:

$(2 + 3i) - (4 + 5i) = \ -2 + (-2)i = -2 - 2i$

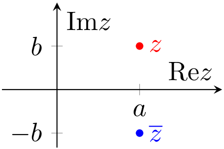
Szorzás:

$(2 + 3i)(4 + 5i) = 8 + 10i + 12i + 15i^2 = 8 + 22i - 15 = -7 + 22i$

A komplex számok $z = a + bi$ alakúak ($a, b \in \mathbb{R}$), ahol
a a valós rész, jelölés: $a = \mathrm{Re}\, z = \Re z$
b a képzetes rész, jelölés: $b = \mathrm{Im}\, z = \Im z$

Komplex számok halmazának jelölése: $\mathbb{C}$.

Osztás



A $z = a + bi$ komplex szám

konjugáltja: $\overline{z} = a - bi$

megjegyzés:

$z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2,$

ami mindig nemnegatív valós

abszolút értéke: $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Osztás:
bővítünk a nevező konjugáltjával:

$$\frac{2+3i}{4+5i} = \frac{2+3i}{4+5i} \cdot \frac{4-5i}{4-5i} =$$

Osztás

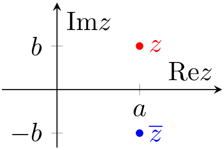
A $z = a + bi$ komplex szám

konjugáltja: $\overline{z} = a - bi$

megjegyzés:

$z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$,

ami mindig nemnegatív valós



abszolút értéke: $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Osztás:
bővítünk a nevező konjugáltjával:

$$\frac{2+3i}{4+5i} = \frac{2+3i}{4+5i} \cdot \frac{4-5i}{4-5i} = \frac{(2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{8-10i+12i-15i^2}{16-20i+20i-25i^2} =$$
$$= \frac{23+2i}{41} = \frac{23}{41} + \frac{2}{41} i$$

Feladat

$$\frac{8-i}{3-2i} = ?$$

Feladat

$$\frac{8-i}{3-2i} = ?$$

$$\frac{8-i}{3-2i} = \frac{8-i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{(8-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{24+16i-3i-2i^2}{3^2+2^2} =$$

$$= \frac{24+16i-3i+2}{9+4} = \frac{26+13i}{13} = 2+i$$

Polinomok gyöke

$i^2 = -1$, így $(2i)^2 = -4$ és $(-2i)^2 = -4$.

Egy negatív q szám négyzetgyöke: $\pm\sqrt{-q}i$.

Másodfokú egyenlet a komplex számok körében:

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Algebra alaptétele:
Egy (legalább elsőfokú) polinomnak mindig van gyöke a komplex számok körében.

Következmény:
Egy n-edfokú polinomot n darab gyöktényező szorzatára bonthatunk a komplex számok körében:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

A $z_1, z_2, \ldots z_n$ az n darab gyöke a polinomnak (nem feltétlenül különbözőek).

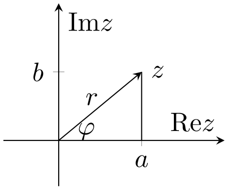
Trigonometrikus alak

Egy komplex szám $a + bi$ alakban való felírását algebrai alaknak nevezzük.

A komplex szám trigonometrikus alakja $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol
$r = |z|$ az abszolút érték és
φ az argumentum, azaz a komplex szám helyvektora és a valós tengely által bezárt szög a komplex síkon (jelölés: $\arg z$).

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, amiből

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & \text{ha } a > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi & \text{ha } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0 \end{cases}$$



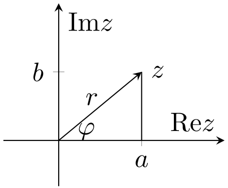
Példa áttérésre:
$z = 1 + \sqrt{3}i$

Trigonometrikus alak

Egy komplex szám $a + bi$ alakban való felírását algebrai alaknak nevezzük.

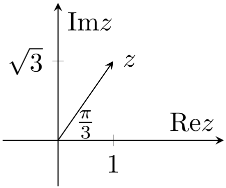
A komplex szám trigonometrikus alakja $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol
$r = |z|$ az abszolút érték és
φ az argumentum, azaz a komplex szám helyvektora és a valós tengely által bezárt szög a komplex síkon (jelölés: $\arg z$).

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, amiből



$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & \text{ha } a > 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi & \text{ha } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0 \end{cases}$$

Példa áttérésre:
$z = 1 + \sqrt{3}i \rightsquigarrow a = 1$ és $b = \sqrt{3}$
$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = 2$
$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$ $(a = 1 > 0)$
Így $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.



Műveletek a trigonometrikus alakkal

Összeadás, kivonás általában nehéz a trigonometrikus alakkal.

Szorzás:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Osztás:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Hatványozás (Moivre-képlet):

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Gyökvonás:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Példa

$\sqrt[3]{-1}$ komplex számok körében

Példa

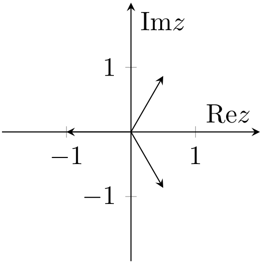
$\sqrt[3]{-1}$ komplex számok körében

Először át kell írni trigonometrikus alakba:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}(0) + \pi = \pi \quad (-1 < 0)$$

Tehát

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$



Gyökvonás:

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + k\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + k\cdot 2\pi}{3}\right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \qquad 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 1 \qquad 1\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$k = 2 \qquad 1\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Komplex számok ábrázolása

$|z| = 2$

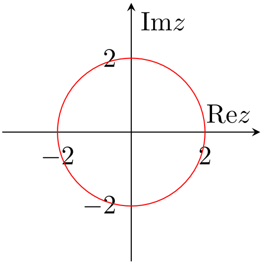
Komplex számok ábrázolása

$|z| = 2$

Ha $z = a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, így az egyenlet:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2$$
$$a^2 + b^2 = 4,$$

ami egy kör egyenlete (origó középpontú, 2 sugarú).



Komplex számok ábrázolása

$|z + 2i| \leq 2$

Komplex számok ábrázolása

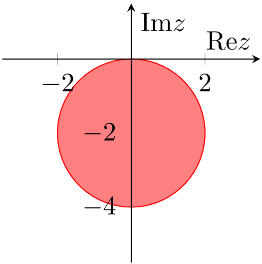
$|z + 2i| \leq 2$

Ha $z = a + bi$, akkor $z + 2i = a + (b + 2)i$, így az egyenlet:

$$\begin{aligned} |z + 2i| &\leq 2 \\ \sqrt{a^2 + (b+2)^2} &\leq 2 \\ a^2 + (b+2)^2 &\leq 4, \end{aligned}$$

ami egy kör belsejét határozza meg (középpontja: $(0, -2)$, sugara 2).

Úgy is tekinthetjük, hogy a z komplex szám legfeljebb 2 távolságra van a $-2i$ komplex számtól ($z + 2i = z - (-2i)$).



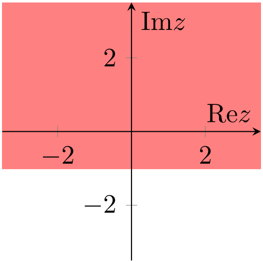
Komplex számok ábrázolása

$\operatorname{Im} z > -1$

Komplex számok ábrázolása

$\operatorname{Im} z > -1$

Ha $z = a + bi$, akkor $\operatorname{Im} z = b$, tehát $b > -1$, ami egy félsíkot határoz meg.



Komplex számok ábrázolása

$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$

Komplex számok ábrázolása

$\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 0$

Ha $z = a + bi$, akkor $\mathrm{Re}\, z = a$ és $\mathrm{Im}\, z = b$, így

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z &= 0 \\ a + b &= 0, \end{aligned}$$

ami egy egyenes egyenlete.