13. előadás

Mátrixok diagonalizálása

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2026. április 13.

Diagonalizálhatóság

Egy mátrix diagonális, ha a főátlón kívül minden eleme 0.
Példa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Egy $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix diagonalizálható, ha található hozzá olyan $\mathbf{C}$ invertálható négyzetes mátrix, hogy $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális.
Ez a sajátvektorok bázisában a megfelelő transzformáció mátrixa.

Tétel:
Az $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van n darab lineárisan független sajátvektora.

Ekkor $\mathbf{C}$ oszlopai a sajátvektorok, míg a diagonális mátrix főátlójában a sajátértékek állnak.

Először egy feladat

Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Először egy feladat

Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(4-\lambda)(-4-\lambda) + (-6)\cdot 2\cdot 3 + (-6)\cdot(-1)\cdot(-6) -$$

$$- (-6)\cdot(4-\lambda)\cdot 3 - (-6)\cdot(-1)\cdot(-4-\lambda) - (5-\lambda)\cdot 2\cdot(-6) =$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 16\lambda - 80 - 36 - 36 + 72 - 18\lambda + 24 + 6\lambda + 60 - 12\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 + 4\lambda - 4\right) = (\lambda - 1)\left(-(\lambda - 2)^2\right)$$

Tehát a sajátértékek: $1, 2, 2$.

Az első sajátvektor

Sajátvektor $\lambda_1 = 1$-hez:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -6 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 - s_3}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 + s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_2/3}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3 + 6s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az x_3 szabad paraméter, $x_1 = x_3$, és $x_2 = -\frac{1}{3}x_3$.

A sajátvektorok halmaza: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ -\frac{1}{3}x \\ x \end{bmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}$.

Egy sajátvektor: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

A második sajátvektor

$\lambda_2 = 2$-höz sajátvektor:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -6 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1/3 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 + s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az x_2 és x_3 szabad paraméter, és $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$, azaz $x_1 = 2x_2 + 2x_3$,

és így a sajátvektorok halmaza: $\left\{ \begin{bmatrix} 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \, x_2, x_3 \text{ nem mindkettő } 0 \right\}$

$\lambda_2 = 2$-höz két (lineárisan független) sajátvektor: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Összefoglalás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

sajátértékei: $1, 2, 2$

$\lambda_1 = 1$-hez sajátvektor: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 2$-höz két (lineárisan független) sajátvektor: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Legyen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az inverzét!

Az inverz mátrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Determináns kiszámolása:

   $$\det \mathbf{C} = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 0 = -1$$

2. Aldeterminánsok kiszámolása:

   $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -6 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

3. A kapott mátrixot transzponáljuk:

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

4. A kapott mátrixot sakktábla-szabály szerint szorozzuk:

   $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Végül leosztjuk a determinánssal:

   $$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

Diagonalizálás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} =$$

Diagonalizálás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{AC}$ első oszlopa: $\mathbf{Av}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1 = 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\mathbf{AC}$ második oszlopa: $\mathbf{Av}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{AC}$ harmadik oszlopa: $\mathbf{Av}_3 = \lambda_2 \mathbf{v}_3 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{AC})$ első oszlopa $=$ $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{E}_3$ első oszlopa,
$\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{AC})$ második oszlopa $=$ kétszer $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{E}_3$ második oszlopa,
$\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{AC})$ harmadik oszlopa $=$ kétszer $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{E}_3$ harmadik oszlopa.

Diagonalizálás általában

Ha az $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrixnak a sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, és ezekhez van n darab lineárisan független sajátvektor: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, akkor legyen

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = [\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2\, \dots\, \mathbf{v}_n]$$

Sajátvektorok lineárisan függetlenek, így a $\mathbf{C}$ mátrixnak létezik a $\mathbf{C}^{-1}$ inverze. Ekkor

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1}$$

Mátrixok hatványozása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^5 = ?$$

Mátrixok hatványozása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^5 = ?$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{CDC}^{-1}$, így

$$\mathbf{A}^5 = \left(\mathbf{CDC}^{-1}\right)^5 = \mathbf{CDC}^{-1}\mathbf{CDC}^{-1} \cdots \mathbf{CDC}^{-1} = \mathbf{CD}^5\mathbf{C}^{-1}$$

Másrészt

$$\mathbf{D}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

Ezzel:

$$\mathbf{A}^5 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 & -186 & -186 \\ -31 & 94 & 62 \\ 93 & -186 & -154 \end{bmatrix}$$