

15. előadás

Többváltozós függvények

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2026. április 20.

Bevezetés

Egyváltozós függvény: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vagy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$).

Többváltozós függvény: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vagy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}^n$).

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Példák:

- ▶ vektor hossza: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- ▶ $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_3 - x_4^3$

Szemléltetés

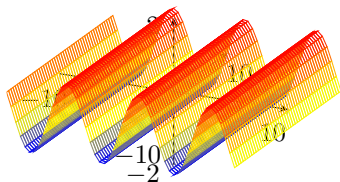
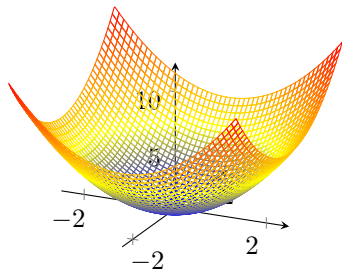
$n = 2$ esetén: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonja $z = f(x, y)$, azaz

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Példák:

$f(x, y) = x^2 + y^2$ forgási paraboloid

$f(x, y) = \sin x$ „hullámpala”



Határérték

Emlékeztető (egyváltozós eset):

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az x_0 pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ esetén $|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$.

Az f függvény folytonos az \mathbf{a} pontban, ha $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Példa:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

az x tengelyen: 0

az y tengelyen: 0

A függvényérték

az $x = y$ egyenesen $\frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$

Így nincs határértéke az origóban.

Parciális deriválás

Az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az x_i változó szerint **parciálisan deriválható** az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha az

$$x_i \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

függvény deriválható $x_i = a_i$ -ben.

A derivált értéke a **parciális derivált**.

Jelölés: $f'_{x_i}(\mathbf{a})$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ vagy $\partial_i f(\mathbf{a})$, stb.

Példa:

$$f(x, y) = 3x^2 + 2x^2y + y^4 - 7$$

$$f'_x(x, y) = 3 \cdot 2x + 2y \cdot 2x = 6x + 4xy$$

$$f'_y(x, y) = 0 + 2x^2 + 4y^3 = 2x^2 + 4y^3$$

Egy háromváltozós:

$$f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z - xyz - 6x + 7y - 8$$

Parciális deriválás

Az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az x_i változó szerint **parciálisan deriválható** az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha az

$$x_i \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

függvény deriválható $x_i = a_i$ -ben.

A derivált értéke a **parciális derivált**.

Jelölés: $f'_{x_i}(\mathbf{a})$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ vagy $\partial_i f(\mathbf{a})$, stb.

Példa:

$$f(x, y) = 3x^2 + 2x^2y + y^4 - 7$$

$$f'_x(x, y) = 3 \cdot 2x + 2y \cdot 2x = 6x + 4xy$$

$$f'_y(x, y) = 0 + 2x^2 + 4y^3 = 2x^2 + 4y^3$$

Egy háromváltozós:

$$f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z - xyz - 6x + 7y - 8$$

$$f'_x(x, y, z) = 6xy - yz - 6$$

$$f'_y(x, y, z) = 3x^2 - 3y^2z - xz + 7$$

$$f'_z(x, y, z) = -y^3 - xy$$

Magasabb rendű parciális deriváltak

Valamelyik parciális deriváltat még egyszer lederiváljuk:

$$f(x, y) = 3x^2 + 2x^2y + y^4 - 7$$

elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 6x + 4xy$$

$$f'_y(x, y) = 2x^2 + 4y^3$$

másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) =$$

$$f''_{xy}(x, y) =$$

$$f''_{yx}(x, y) =$$

$$f''_{yy}(x, y) =$$

Magasabb rendű parciális deriváltak

Valamelyik parciális deriváltat még egyszer lederiváljuk:

$$f(x, y) = 3x^2 + 2x^2y + y^4 - 7$$

elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 6x + 4xy$$

$$f'_y(x, y) = 2x^2 + 4y^3$$

másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 6 + 4y$$

$$f''_{xy}(x, y) = 4x$$

$$f''_{yx}(x, y) = 4x$$

$$f''_{yy}(x, y) = 12y^2$$

Young-tétel:

Ha a másodrendű parciális deriváltak léteznek és folytonosak, akkor

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Érintősík egyenlete

Egy változó esetén az érintőegyenés egyenlete az x_0 pontban:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Két változóban érintősík egyenlete az (x_0, y_0) pontban:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Ez egy sík egyenlete:

$$-f'_x(x_0, y_0)x - f'_y(x_0, y_0)y + z = -f'_x(x_0, y_0)x_0 - f'_y(x_0, y_0)y_0 + f(x_0, y_0)$$

Példa:

Az $f(x, y) = x^2y^3 - 3y + 4$ függvény $(2, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenlete:

Érintősík egyenlete

Egy változó esetén az érintőegyenest az x_0 pontban:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Két változóban érintősík egyenlete az (x_0, y_0) pontban:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Ez egy sík egyenlete:

$$-f'_x(x_0, y_0)x - f'_y(x_0, y_0)y + z = -f'_x(x_0, y_0)x_0 - f'_y(x_0, y_0)y_0 + f(x_0, y_0)$$

Példa:

Az $f(x, y) = x^2y^3 - 3y + 4$ függvény $(2, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenlete:

$$f(x, y) = x^2y^3 - 3y + 4 \qquad f(2, 1) = 5$$

$$f'_x(x, y) = 2xy^3 \qquad f'_x(2, 1) = 4$$

$$f'_y(x, y) = 3x^2y^2 - 3 \qquad f'_y(2, 1) = 9$$

Érintősík egyenlete:

$$z = 4(x - 2) + 9(y - 1) + 5$$

$$z = 4x + 9y - 12$$

Gradiens

Ha egy n változós $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban az összes parciális deriváltja létezik, akkor az f függvény P_0 -beli **gradiense** az az n dimenziós vektor, melynek koordinátái a P_0 -beli parciális deriváltak:

$$(f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \dots, f'_{x_n}(P_0))$$

Jelölés: $\text{grad}f(P_0)$ vagy $\nabla f(P_0)$ (nabla).

Példa:

$$f(x, y, z) = x^3y + 4z + 5$$

(2, 1, 3) pontban:

Gradiens

Ha egy n változós $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban az összes parciális deriváltja létezik, akkor az f függvény P_0 -beli **gradiense** az az n dimenziós vektor, melynek koordinátái a P_0 -beli parciális deriváltak:

$$(f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \dots, f'_{x_n}(P_0))$$

Jelölés: $\text{grad}f(P_0)$ vagy $\nabla f(P_0)$ (nabla).

Példa:

$$f(x, y, z) = x^3y + 4z + 5$$

(2, 1, 3) pontban:

$$f'_x(x, y, z) = 3x^2y$$

$$f'_x(2, 1, 3) = 12$$

$$f'_y(x, y, z) = x^3$$

$$f'_y(2, 1, 3) = 8$$

$$f'_z(x, y, z) = 4$$

$$f'_z(2, 1, 3) = 4$$

Tehát $\text{grad}f(2, 1, 3) = (12, 8, 4)$.

Íránymenti derivált

Az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontbeli és $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor ($|\mathbf{e}| = 1$) irányú deriváltja (iránymenti deriváltja) a

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|}$$

határérték, ahol a P pont úgy tart a P_0 -hoz, hogy a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor az \mathbf{e} -vel párhuzamos és egyállású.

Ezzel megegyező határérték:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(P_0 + t\mathbf{e}) - f(P_0)}{t}$$

Jelölés: $f'_e(P_0)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(P_0)$.

Tétel:

Az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltját általában kiszámolhatjuk a következő skaláris szorzat segítségével:

$$f'_e(P_0) = \text{grad} f(P_0) \cdot \mathbf{e}$$

Példa

Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2y - xy^3 + 6x - 3$ függvény $(3, 4)$ irányú deriváltját a $P_0(1, 2)$ pontban.

Példa

Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2y - xy^3 + 6x - 3$ függvény $(3, 4)$ irányú deriváltját a $P_0(1, 2)$ pontban.

$$f(x, y) = x^2y - xy^3 + 6x - 3$$

$P_0(1, 2)$ pontban:

$$f'_x(x, y) = 2xy - y^3 + 6$$

$$f'_x(1, 2) = 2$$

$$f'_y(x, y) = x^2 - 3xy^2$$

$$f'_y(1, 2) = -11$$

$$\text{grad}f(1, 2) = (2, -11)$$

A $(3, 4)$ irányú derivált esetén az egységvektor: $\mathbf{e} = \frac{(3, 4)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Az f függvény \mathbf{e} irányú deriváltja a $P_0(1, 2)$ pontban:

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = (2, -11) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{6}{5} - \frac{44}{5} = -\frac{38}{5}$$

Íránymenti derivált minimuma/maximuma

$$f'_e(P_0) = \text{grad}f(P_0) \cdot \mathbf{e}$$

Az iránymenti derivált maximális, ha $\mathbf{e} = \frac{\text{grad}f(P_0)}{|\text{grad}f(P_0)|}$. Ekkor az iránymenti derivált értéke:

$$f'_e(P_0) = \text{grad}f(P_0) \cdot \mathbf{e} = \text{grad}f(P_0) \cdot \frac{\text{grad}f(P_0)}{|\text{grad}f(P_0)|} = \frac{|\text{grad}f(P_0)|^2}{|\text{grad}f(P_0)|} = |\text{grad}f(P_0)|$$

Az iránymenti derivált minimális, ha $\mathbf{e} = -\frac{\text{grad}f(P_0)}{|\text{grad}f(P_0)|}$. Ekkor az iránymenti derivált értéke:

$$f'_e(P_0) = -|\text{grad}f(P_0)|$$

Ha \mathbf{e} merőleges $\text{grad}f(P_0)$ -re, akkor $f'_e(P_0) = 0$.