

16. előadás

Vektorfüggvények és totális derivált

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2026. április 21.

Vektorértékű függvények

Vektorértékű vagy vektorfüggvény:

példa: vektor ellentettje: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$

Vektorfüggvény általában:

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vagy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}^n$).

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$

$f_1, f_2, \dots, f_m: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ komponens függvények

Példa:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$f(x, y) = (xy, x^2 + y^2, x^3 - 1)$

$f_1(x, y) = xy$

$f_2(x, y) = x^2 + y^2$

$f_3(x, y) = x^3 - 1$

Határérték

Emlékeztető (többváltozós eset):

Az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ esetén $|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$.

Az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvénynek az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pontban a határértéke $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ esetén $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Az f függvény folytonos az \mathbf{a} pontban, ha $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Eddigi többváltozós deriváltak

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény deriváltjai:

- ▶ parciális derivált
- ▶ gradiens
- ▶ iránymenti derivált

Totális derivált

Emlékeztető:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható x_0 -ban, akkor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0),$$

ahol $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban **totálisan differenciálható**, ha létezik $m \times n$ -es \mathbf{A} mátrix és $\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény, hogy

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \varepsilon(\mathbf{x}) \quad \text{és} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\varepsilon(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = \mathbf{0}.$$

Jelölés az \mathbf{A} mátrixra: $f'(\mathbf{x}_0)$ vagy $\partial f(\mathbf{x}_0)$ vagy $Df(\mathbf{x}_0)$, stb.

A totális deriválhatóságnak szükséges feltétele, hogy a függvény komponens függvényei parciálisan deriválhatóak minden változó szerint az \mathbf{x}_0 helyen.

Az \mathbf{A} mátrix a komponens függvények parciális deriváltjaiból áll (**Jacobi-mátrix**):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Totális deriválhatóság elégséges feltétele

Tétel:

Ha az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény komponens függvényeinek parciális deriváltjai az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pont környezetében léteznek, és ezek folytonosak az \mathbf{x}_0 -ban, akkor az f függvény az \mathbf{x}_0 -ban totálisan deriválható.

Jacobi-mátrix – példa

Számítsuk ki az $f(x, y, z) = (x^2y, xe^{yz}, x \ln(y))$ függvény Jacobi-mátrixát a $(3, 1, 0)$ pontban.

Jacobi-mátrix – példa

Számítsuk ki az $f(x, y, z) = (x^2y, xe^{yz}, x \ln(y))$ függvény Jacobi-mátrixát a $(3, 1, 0)$ pontban.

$$\begin{array}{lll} f_1(x, y, z) = x^2y & f_2(x, y, z) = xe^{yz} & f_3(x, y, z) = x \ln(y) \\ f'_{1x}(x, y, z) = 2xy & f'_{2x}(x, y, z) = e^{yz} & f'_{3x}(x, y, z) = \ln(y) \\ f'_{1y}(x, y, z) = x^2 & f'_{2y}(x, y, z) = xe^{yz}z & f'_{3y}(x, y, z) = \frac{x}{y} \\ f'_{1z}(x, y, z) = 0 & f'_{2z}(x, y, z) = xe^{yz}y & f'_{3z}(x, y, z) = 0 \end{array}$$

A parciális deriváltak értékei a $(3, 1, 0)$ pontban:

$$\begin{array}{lll} f'_{1x}(3, 1, 0) = 6 & f'_{2x}(3, 1, 0) = 1 & f'_{3x}(3, 1, 0) = 0 \\ f'_{1y}(3, 1, 0) = 9 & f'_{2y}(3, 1, 0) = 0 & f'_{3y}(3, 1, 0) = 3 \\ f'_{1z}(3, 1, 0) = 0 & f'_{2z}(3, 1, 0) = 3 & f'_{3z}(3, 1, 0) = 0 \end{array}$$

Így a Jacobi-mátrix a $(3, 1, 0)$ pontban:

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Íránymenti deriváltról szóló tétel

Tétel:

Ha az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható a P_0 pontban, akkor ott az iránymenti deriváltját kiszámolhatjuk a következő skaláris szorzat segítségével:

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = \text{grad}f(P_0) \cdot \mathbf{e}$$

Láncszabály

Emlékeztető:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

$g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

g differenciálható $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ -ban és

f differenciálható $g(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ -ben,

akkor $f \circ g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható \mathbf{x}_0 -ban, és

$$(f \circ g)'(\mathbf{x}_0) = f'(g(\mathbf{x}_0)) \cdot g'(\mathbf{x}_0).$$

típusok: $m \times k$ $m \times n$ $n \times k$

Speciális eset: $k = 1, n = 2, m = 1$

$g(t) = (x(t), y(t))$ és $f(x, y)$

$$(f \circ g)(t) = f(x(t), y(t))$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(t) &= [f'_x(x(t), y(t)) \quad f'_y(x(t), y(t))] \cdot \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \\ &= f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t)\end{aligned}$$

Láncszabály – példa

Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$ és $g(t) = (\cos t, \sin t)$.
Számítsuk ki az $(f \circ g)(t)$ függvény deriváltját.

Láncszabály – példa

Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$ és $g(t) = (\cos t, \sin t)$.

Számítsuk ki az $(f \circ g)(t)$ függvény deriváltját.

$$\begin{array}{lll} f(x, y) = x^2 + y^2 & x(t) = \cos t & y(t) = \sin t \\ f'_x(x, y) = 2x & x'(t) = -\sin t & y'(t) = \cos t \\ f'_y(x, y) = 2y & & \end{array}$$

Így

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(t) &= f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t) = \\ &= 2 \cos t \cdot (-\sin t) + 2 \sin t \cdot \cos t = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ami nem meglepő, mert

$$(f \circ g)(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$