

3. előadás

Vektorok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2026. február 23.

Bevezetés

Van két pontunk a síkon/térben: A, B .

Az általuk meghatározott vektor:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \text{ (kézírással: } \underline{v})$$

$$\text{a vektor hossza: } |\mathbf{v}| = \left| \overrightarrow{AB} \right|$$

ha ez pontosan 1, akkor egységvektor
0, akkor nullvektor ($\mathbf{0}$)

Összeadás (paralelogramma szabály):

- kommutatív: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
- asszociatív: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

kiszámolása koordinátákkal:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array} \right\} \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

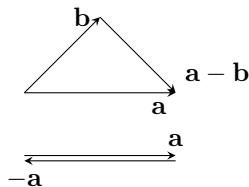
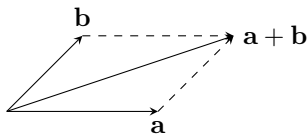
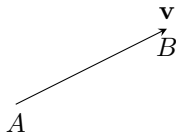
Különbség:

$\mathbf{a} - \mathbf{b}$ az $\mathbf{a}$ vektor, melyet $\mathbf{b}$ -hez adva az $\mathbf{a}$ -t kapjuk.

Ellentett:

$\mathbf{a}$ ellentettje: $-\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$



Vektorok számmal való szorzása

λ valós szám („skalár”) és $\mathbf{v}$ egy vektor

$\lambda \mathbf{v}$ az a vektor, melynek hossza $|\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$ és

- iránya $\mathbf{v}$ -vel megegyező, ha $\lambda > 0$
- iránya $\mathbf{v}$ -vel ellentétes, ha $\lambda < 0$
- nullvektor, ha $\lambda = 0$.

Tulajdonságai ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorok):

- $\mu(\lambda \mathbf{a}) = (\mu\lambda)\mathbf{a}$
- $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$
- $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$

Kiszámolása koordinátákkal:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

Az $\mathbf{a}$ irányú/irányába mutató egységvektor ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$):

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$$

Skaláris szorzás

Két vektorhoz rendel egy valós számot:

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi$, ahol φ az általuk bezárt szög.

További bevett jelölések: $\mathbf{a}\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0 \iff 0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0 \iff 90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \varphi = 90^\circ \text{ vagy } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ egyike nullvektor}$$

Tulajdonságai:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ kommutatív
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ disztributív
- $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$

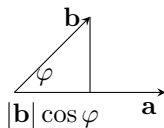
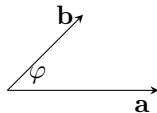
Kiszámolása koordinátákkal:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array} \right\} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\text{Speciális eset: } |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Két vektor szöge:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \Rightarrow \varphi = \arccos \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \right)$$



Példa

Legyen $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ és $\mathbf{b} = (3, -2, 0)$.

A hosszuk:

$$|\mathbf{a}| =$$

$$|\mathbf{b}| =$$

A skaláris szorzatuk:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$$

A két vektor szöge:

$$\varphi =$$

Példa

Legyen $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ és $\mathbf{b} = (3, -2, 0)$.

A hosszuk:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 4 + 0} = \sqrt{13}$$

A skaláris szorzatuk:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = 3 + (-4) + 0 = -1$$

A két vektor szöge:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \right) = \arccos \left(\frac{-1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}} \right) = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{182}} \right) \approx 94,25^\circ$$

Vektorok felbontása

Egy $\mathbf{v}$ vektort szeretnénk egy adott $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensre felbontani.

A párhuzamos komponens hossza $|\mathbf{v}| \cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{a}|}$.

Ennyiszer kell venni az $\mathbf{a}$ irányú egységvektort:

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{a}|} \left(\frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} \right) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}$$

A merőleges komponens a maradék
(a két komponens összege a $\mathbf{v}$ vektor):

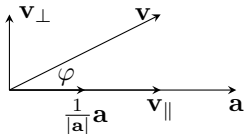
$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

Példa:

$\mathbf{v} = (1, -3, 4)$ és $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$

$$\mathbf{v}_{\parallel} =$$

$$\mathbf{v}_{\perp} =$$



Vektorok felbontása

Egy $\mathbf{v}$ vektort szeretnénk egy adott $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensre felbontani.

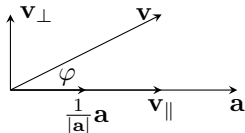
A párhuzamos komponens hossza $|\mathbf{v}| \cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{a}|}$.

Ennyiszer kell venni az $\mathbf{a}$ irányú egységvektort:

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{a}|} \left(\frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} \right) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}$$

A merőleges komponens a maradék
(a két komponens összege a $\mathbf{v}$ vektor):

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$



Példa:

$\mathbf{v} = (1, -3, 4)$ és $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{7}{14} (1, 2, 3) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right)$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = (1, -3, 4) - \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, -4, \frac{5}{2} \right)$$

Vektoriális szorzat

Csak 3 dimenzióban működik!

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ háromdimenziós vektorok, bezárt szögük φ
vektoriális/kereszt szorzatuk az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, melyre

- $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$
- $\mathbf{c}$ merőleges $\mathbf{a}$ -ra és $\mathbf{b}$ -re
- $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jobbrendszert alkot (ebben a sorrendben).

Jelölés: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

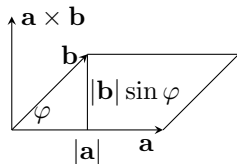
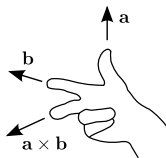
Tulajdonságai:

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ antikommutatív
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ disztributív
- $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ pontosan akkor, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ vagy $\sin \varphi = 0$, azaz $\varphi = 0^\circ$ vagy $\varphi = 180^\circ$: egyik a másiknak valósszám-szorosa.

A vektoriális szorzat hossza $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$ pontosan a vektorok által kifeszített paralelogramma területe.

Kiszámolása koordinátákkal:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array} \right\} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$



Vektoriális szorzat – példa

Kiszámolása koordinátákkal:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array} \right\} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} = (1, 2, 3) \\ \mathbf{b} = (3, -2, 0) \end{array} \right\} \mathbf{a} \times \mathbf{b} =$$

Vektoriális szorzat – példa

Kiszámolása koordinátákkal:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array} \right\} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} = (1, 2, 3) \\ \mathbf{b} = (3, -2, 0) \end{array} \right\} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2 \cdot 0 - 3 \cdot (-2), 3 \cdot 3 - 1 \cdot 0, 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) = \\ = (6, 9, -8)$$

Vegyes szorzat

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ háromdimenziós vektorok

Vegyes szorzatuk egy valós szám:

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.

$\mathbf{abc} > 0 \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jobbrendszert alkot

$\mathbf{abc} < 0 \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ balrendszert alkot

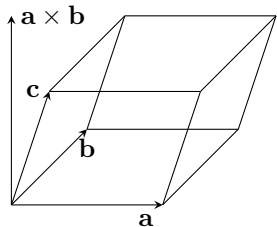
$\mathbf{abc} = 0 \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ egy síkba esik

Tulajdonságok:

- $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}$
- $\mathbf{abc} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{bac}$

Kiszámolása koordinátákkal:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \\ \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \end{array} \right\} \mathbf{abc} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$



Feladat

Számítsuk ki az $A(1, 0, 2)$, $B(3, 1, 0)$, $C(1, 2, 4)$, $D(0, 3, 5)$ csúcspontú tetraéder térfogatát.

Feladat

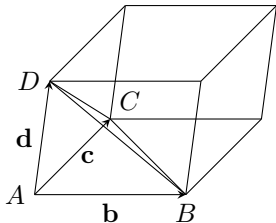
Számítsuk ki az $A(1, 0, 2)$, $B(3, 1, 0)$, $C(1, 2, 4)$, $D(0, 3, 5)$ csúcpontú tetraéder térfogatát.

Először felírjuk az A -ból induló élvektorokat:

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{AB} = (2, 1, -2)$$

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{AC} = (0, 2, 2)$$

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{AD} = (-1, 3, 3)$$



Az $ABCD$ tetraéder térfogata éppen a $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatának hatoda.

A paralelepipedon előjeles térfogatát a vektorok vegyes szorzata adja meg:

$$\begin{aligned}\mathbf{bcd} &= 2 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = \\ &= 12 + (-2) + 0 - 4 - 0 - 12 = -6\end{aligned}$$

Tehát a paralelepipedon térfogata 6, és így a tetraéderé 1.