5. előadás

Az n dimenziós valós tér vektorai

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2026. március 2.

Bevezetés

A 2 dimenziós síkon minden pontot két koordinátával jellemezhetünk: (x, y).
Ennek helyvektora: $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$, ahol $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ és $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

A 3 dimenziós térben minden pontot három koordinátával jellemezhetünk: (x, y, z).
Ennek helyvektora: $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$,
ahol $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ és $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Általánosítás: n dimenziós tér.

Itt n darab koordinátával jellemezhetünk egy pontot: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ennek helyvektora: $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$, ahol

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\
\mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\
&\vdots \\
\mathbf{e}_n &= (0, 0, \ldots, 0, 1)
\end{aligned}
$$

Az n dimenziós tér pontjait azonosíthatjuk a szám n-esekkel.

Jelölés: $\mathbb{R}^n$

Műveletek vektorokkal

A háromdimenziós vektorokhoz hasonlóan végezhetjük a vektorműveleteket az n dimenziós térben:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Összeadás:
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

Kivonás:
$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$

Skalárral való szorzás ($\lambda \in \mathbb{R}$):
$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$

Skaláris szorzás:
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$

Hossz:
$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

Vektoriális és vegyes szorzás csak három dimenzióban lehetséges!

Példa

Legyen

$$\mathbf{a} = (3, 2, 0, 1)$$
$$\mathbf{b} = (2, 4, 3, 1)$$

Számítsuk ki a következőket:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} =$$

$$3\mathbf{a} =$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$$

$$|\mathbf{a}| =$$

Példa

Legyen

$$\mathbf{a} = (3, 2, 0, 1)$$
$$\mathbf{b} = (2, 4, 3, 1)$$

Számítsuk ki a következőket:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (5, 6, 3, 2)$$

$$3\mathbf{a} = (9, 6, 0, 3)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6 + 8 + 0 + 1 = 15$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{9 + 4 + 0 + 1} = \sqrt{14}$$

Lineáris kombináció

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ n dimenziós vektorok lineáris kombinációja:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k,$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Példa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= (0,1,3) & \lambda_1 &= 1 \\
\mathbf{v}_2 &= (1,2,4) & \lambda_2 &= -1 \\
\mathbf{v}_3 &= (3,-1,2) & \lambda_3 &= 0 \\
\mathbf{v}_4 &= (4,0,0) & \lambda_4 &= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\lambda_3\mathbf{v}_3+\lambda_4\mathbf{v}_4 &= 1\cdot(0,1,3)+(-1)\cdot(1,2,4)+0\cdot(3,-1,2)+2\cdot(4,0,0)= \\
&= (0,1,3)+(-1,-2,-4)+(0,0,0)+(8,0,0)= \\
&= (7,-1,-1)
\end{aligned}$$

Lineáris függőség

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineárisan (össze)függenek, ha van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ nem mind 0, hogy

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Példa: Az $(1,2,0)$, $(2,4,0)$, $(3,5,1)$ vektorok lineárisan függenek:

$$(-2)\cdot(1,2,0) + 1\cdot(2,4,0) + 0\cdot(3,5,1) = (-2,-4,0) + (2,4,0) = (0,0,0) = \mathbf{0}$$

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

egyenlőségből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Példa: A $(0,5,0)$, $(4,2,3)$, $(2,3,0)$ vektorok lineárisan függetlenek:

$$(0,0,0) = \lambda_1(0,5,0) + \lambda_2(4,2,3) + \lambda_3(2,3,0) = (4\lambda_2 + 2\lambda_3, 5\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, 3\lambda_2)$$

Tehát:

$$\begin{aligned} 0 &= 4\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 0 &= 5\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 0 &= 3\lambda_2 \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Feladat

Lineárisan függetlenek-e a $(4, 2, 8)$, $(5, 2, 1)$, $(6, 3, 12)$ vektorok?

Feladat

Lineárisan függetlenek-e a $(4,2,8)$, $(5,2,1)$, $(6,3,12)$ vektorok?

$$\begin{aligned}(0,0,0) &= \lambda_1(4,2,8)+\lambda_2(5,2,1)+\lambda_3(6,3,12) = \\ &= (4\lambda_1+5\lambda_2+6\lambda_3,\ 2\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3,\ 8\lambda_1+\lambda_2+12\lambda_3)\end{aligned}$$

Tehát:

$$\begin{aligned}0 &= 4\lambda_1+5\lambda_2+6\lambda_3\\ 0 &= 2\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3\\ 0 &= 8\lambda_1+\lambda_2+12\lambda_3\end{aligned}$$

Az első két egyenletből: $\lambda_2 = 0$, így

$$\begin{aligned}0 &= 4\lambda_1+6\lambda_3\\ 0 &= 2\lambda_1+3\lambda_3\\ 0 &= 8\lambda_1+12\lambda_3\end{aligned}$$

Ezek az egyenletek ekvivalensek, így $\lambda_1 = 3$, $\lambda_3 = -2$ megoldás, tehát nem lineárisan függetlenek:

$$(0,0,0) = 3(4,2,8)+0(5,2,1)-2(6,3,12)$$

Generátorrendszer

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ n dimenziós vektorok az $\mathbb{R}^n$ tér generátorrendszere, ha minden $\mathbf{v}$ n dimenziós vektor előáll ezek lineáris kombinációjaként.
Azaz vannak olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, hogy

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

Példák:
$\mathbf{e}_1(1,0,\dots,0), \mathbf{e}_2(0,1,\dots,0), \dots, \mathbf{e}_n(0,\dots,0,1)$ generátorrendszer, mert minden $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor előáll lineáris kombinációként:

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$

$\mathbf{v}_1(1,1,0), \mathbf{v}_2(1,-1,0), \mathbf{v}_3(0,0,3)$ is generátorrendszer:

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,-1,0) + \lambda_3(0,0,3)$$
$$x = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$y = \lambda_1 - \lambda_2$$
$$z = 3\lambda_3$$

Tehát $\lambda_3 = \frac{z}{3}, \lambda_1 = \frac{x+y}{2}, \lambda_2 = \frac{x-y}{2}$. Így:

$$(x,y,z) = \frac{x+y}{2}(1,1,0) + \frac{x-y}{2}(1,-1,0) + \frac{z}{3}(0,0,3)$$

Bázis

Az n dimenziós térben n darab lineárisan független vektort bázisnak nevezünk.

Példa:

Standard bázis: $\mathbf{e}_1(1,0,\ldots,0), \mathbf{e}_2(0,1,\ldots,0), \ldots, \mathbf{e}_n(0,\ldots,0,1)$

De van sok más is, például: $(0,5,0)$, $(4,2,3)$, $(2,3,0)$.

Tétel:

Minden vektort fel tudunk írni egy bázis elemeinek lineáris kombinációjaként, vagyis minden bázis generátorrendszer.

Tétel:

Egy n dimenziós térben ha

- k darab lineárisan független vektor van, akkor $k \leq n$.
- k darab vektor generátorendszert alkot, akkor $k \geq n$.
- k darab vektor bázist alkot, akkor $k = n$.

Következmény:

Ha néhány lineárisan független vektor generátorrendszert alkot, akkor bázis.

Altér

Az $\mathbb{R}^n$ tér egy V (nemüres) részhalmazát altérnek nevezzük, ha

- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, akkor $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$
- $\mathbf{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda \mathbf{v} \in V$

Példák:
$\{\mathbf{0}\}$ és $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^3$-ben $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, azaz azon vektorok, melyeknek harmadik koordinátája 0 (xy koordinátasík).

$\mathbb{R}^3$-ben az $(x, 2x, z)$ alakú vektorok is alteret alkotnak. Úgy is írhatjuk, hogy $\{(x, y, z) \mid y = 2x\}$:

$$(x_1, 2x_1, z_1)+(x_2, 2x_2, z_2)=(x_1+x_2, 2x_1+2x_2, z_1+z_2)=(x_1+x_2, 2(x_1+x_2), z_1+z_2)$$
$$\lambda(x, 2x, z) = (\lambda x, \lambda \cdot 2x, \lambda z) = (\lambda x, 2\lambda x, \lambda z)$$

$\mathbb{R}^3$ alterei: $\{\mathbf{0}\}, \mathbb{R}^3$, bármilyen origón átmenő sík, origón átmenő egyenes.

Az $(x, y, 1)$ alakú vektorok nem alkotnak alteret, mert $2(x, y, 1) = (2x, 2y, 2)$ már nem ilyen alakú.

Generált altér

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok által generált altér azon vektorokból áll, melyek előállnak $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineáris kombinációjaként.
Jelölése: $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.

Példa:
Az $(1, 2, 0)$ és a $(0, 0, 1)$ vektorok által generált altér az $(x, 2x, z)$ alakú vektorok altere:

$$\lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(0, 0, 1) = (\lambda_1, 2\lambda_1, \lambda_2)$$

Feladat

Milyen alteret generálnak a $(2, 6, 4)$ és $(3, 9, 6)$ vektorok?

Feladat

Milyen alteret generálnak a $(2,6,4)$ és $(3,9,6)$ vektorok?

$$\begin{aligned}\lambda_1(2,6,4)+\lambda_2(3,9,6) &= (2\lambda_1+3\lambda_2,\ 6\lambda_1+9\lambda_2,\ 4\lambda_1+6\lambda_2) = \\ &= (2\lambda_1+3\lambda_2,\ 3(2\lambda_1+3\lambda_2),\ 2(2\lambda_1+3\lambda_2))\end{aligned}$$

Ez az $(x,3x,2x)$ alakú vektorok altere, azaz az $(1,3,2)$ vektor számszorosai, ami egy origón átmenő egyenes.