7. előadás

Lineáris egyenletrendszerek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2026. március 9.

Bevezetés: egy példa

$$x + y + 5z = 3 \tag{1}$$

$$-x + 2y + 4z = 6 \tag{2}$$

$$2x + 3y + 12z = 8 \tag{3}$$

Bevezetés: egy példa

$$x + y + 5z = 3 \tag{1}$$
$$-x + 2y + 4z = 6 \tag{2}$$
$$2x + 3y + 12z = 8 \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{rl} \text{(1) + (2):} & 3y + 9z = 9 \Rightarrow y + 3z = 3 \\ \text{(3) − 2×(1):} & y + 2z = 2 \end{array}\right\} z = 1 \Rightarrow \begin{array}{c} y + 3 = 3 \\ y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x + 0 + 5 = 3 \\ x = -2 \end{array}$$

Ugyanez mátrix alakban:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 12 & 8 \end{array}\right] \underset{s_3-2s_1}{\overset{s_2+s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \overset{s_2/3}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \underset{s_3-s_2}{\sim}$$

$$\underset{s_3-s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \underset{s_3\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{s_2-3s_3}{\overset{s_1-5s_3}{\sim}}$$

$$\underset{s_2-3s_3}{\overset{s_1-5s_3}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1-s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}$$

Általánosan

Lineáris egyenletrendszer:
véges számú, elsőfokú egyenletből álló véges sok ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer.

Általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

Mátrixos alak:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Kibővített mátrix

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k
\end{aligned}
$$

egyenletrendszerhez tartozó kibővített mátrix:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k
\end{array}\right] = (\mathbf{A}|\mathbf{b})
$$

Még egy példa

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 7 \\ x_1 + 11x_2 + 14x_3 + 17x_4 &= 12 \end{aligned}$$

egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right]$$

Oldjuk meg:

Még egy példa

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 7 \\ x_1 + 11x_2 + 14x_3 + 17x_4 &= 12 \end{aligned}$$

egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right]$$

Oldjuk meg:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 11 & 14 & 17 & 12 \end{array}\right] \underset{s_3 - s_1}{\overset{s_2 - 2s_1}{\sim}}$$

$$\underset{s_3 - s_1}{\overset{s_2 - 2s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & -9 & -10 & -9 \\ 0 & 8 & 9 & 10 & 5 \end{array}\right] \underset{s_3 + s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & -9 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Az utolsó sor jelentése: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -4$.
Ez soha nem teljesülhet, így nincs megoldás.

És még egy

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29 \\ x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33 \end{aligned}$$

És még egy

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 29 \\
x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= 33
\end{aligned}
$$

$$
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 29 \\ 1 & -11 & 13 & 33 \end{array}\right]
\overset{s_2-3s_1}{\underset{s_3-s_1}{\sim}}
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 0 & -14 & 14 & 28 \end{array}\right]
\overset{s_2/(-7)}{\sim}
$$

$$
\overset{s_2/(-7)}{\sim}
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -14 & 14 & 28 \end{array}\right]
\underset{s_3+14s_2}{\sim}
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\sim
$$

$$
\sim
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]
\overset{s_1-3s_2}{\sim}
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]
$$

Ekkor végtelen sok megoldás van. Az x_3 szabad paraméter, a többi változót ennek függvényében tudjuk megadni:

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + 2x_3 = 11 & \Rightarrow & x_1 = 11 - 2x_3 \\
x_2 - x_3 = -2 & \Rightarrow & x_2 = x_3 - 2
\end{array}
\quad x_3 \in \mathbb{R}
$$

Gauss-elimináció

Megengedett műveletek: sorműveletek/sortranszformációk:

1. Egy sorhoz egy másik sor valahányszorosát hozzáadjuk vagy levonjuk.
2. Egy sor szorzása (vagy osztása) egy nemnulla számmal.
3. Sorok cseréje.

Megoldási módszer:

1. Elérjük, hogy a mátrix bal felső eleme 1-es legyen (vezéregyes).
2. Ez alatt az 1-es alatt kinullázunk: minden sorból kivonjuk az első sor megfelelő többszörösét.
3. Ugyanezt megcsináljuk az eggyel kisebb mátrixszal: innentől az első sorral és az első oszloppal nem foglalkozunk.
4. Ha végére értünk, akkor felfelé nullázunk ki.

Ha kapunk egy csupa 0 sort (bal oldalon):

- ha a jobb oldalon nem nulla szám áll: nincs megoldás
- ha a jobb oldalán nulla áll: elhagyjuk ezt a sort

Ha valamelyik oszlopban nincs sor eleji 1-es (vezéregyes), akkor a megfelelő változó szabad paraméter.

Homogén egyenletrendszerek

Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert homogénnek nevezzük, ha $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Ilyenkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (azaz minden ismeretlen nulla) mindig megoldás.

Továbbá, ha $\mathbf{x}$ megoldás, akkor $\lambda\mathbf{x}$ is ($\lambda \in \mathbb{R}$).

Példa:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 5x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Előző példa megoldása

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 5x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Előző példa megoldása

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 5x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2 - 2s_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/5}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3 - 5s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 + s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{14}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \end{array}\right]$$

Így x_3-at választjuk szabad paraméternek, ekkor a megoldás:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{14}{5} x_3 \\ x_2 &= \tfrac{1}{5} x_3 \end{aligned} \qquad x_3 \in \mathbb{R}$$

Mátrixok inverze

Ha $\mathbf{A}$ négyzetes $n \times n$-es mátrix, akkor az inverze az az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix, melyre

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n \quad \text{és} \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n.$$

Nem biztos, hogy létezik ilyen mátrix, de ha létezik, akkor egyértelmű.

Ha tudjuk az együtthatómátrix inverzét, akkor egyszerűen meg tudjuk oldani az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \qquad\qquad \mathbf{A}^{-1}\text{-zel balról beszorozva:} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{E}_n\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Az inverz mátrix első oszlopa az az $\mathbf{a}$ oszlopvektor, melyre $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$, amihez az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második oszlop az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$ egyenletrendszer megoldása, stb.

Ezeket az egyenletrendszereket szimultán is megoldhatjuk.

Példa

Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix inverze:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+6s_1}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+4s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3-2s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -7 & -2 \end{array}\right] \overset{s_3\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right] \overset{s_1+2s_3}{\underset{s_2-2s_3}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 25 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 7 & 2 \end{array}\right] \overset{s_1+s_2}{\sim} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{\text{egységmátrix}} & \underbrace{\begin{array}{rrr} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{array}}_{\text{inverz}} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Egyenletrendszer megoldása mátrixokkal

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= 6 \\ 2y + 3z &= 2 \\ -6x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Ugyanez mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Így az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -18 & -10 & -3 \\ 12 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 \\ -131 \\ 88 \end{bmatrix}$$

Azaz

$$\begin{aligned} x &= 51 \\ y &= -131 \\ z &= 88 \end{aligned}$$

Még egy inverz

Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverze:

Még egy inverz

Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverze:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2-2s_1}{\underset{s_3-3s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2/3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1-s_4}{\underset{s_3+4s_4}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_1+s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Szöveges feladat

Méricskélünk a konyhában egy kétkarú mérleggel, de a súlyt csak a végén találjuk meg. Így ezeket tudjuk:
Két darab csésze tömege megegyezik egy tányér, két bögre és két villa tömegével.
Egy darab bögre két villával annyi, mint egy tányér.
Egy bögre és egy villa pont négy villa tömegével egyezik meg.
Egy tányér és az 5 dkg-os súly pont két bögrét tesz ki.
Mennyi a felsorolt dolgok tömege külön-külön?

Szöveges feladat

Méricskélünk a konyhában egy kétkarú mérleggel, de a súlyt csak a végén találjuk meg. Így ezeket tudjuk:
Két darab csésze tömege megegyezik egy tányér, két bögre és két villa tömegével.
Egy darab bögre két villával annyi, mint egy tányér.
Egy bögre és egy villa pont négy villa tömegével egyezik meg.
Egy tányér és az 5 dkg-os súly pont két bögrét tesz ki.
Mennyi a felsorolt dolgok tömege külön-külön?

Mindent a megfelelő kezdőbetűvel jelölünk és dkg-ban számolunk:

$$
\begin{aligned}
2c &= 1t + 2b + 2v \\
1b + 2v &= 1t \\
1b + 1v &= 4v \\
1t + 5 &= 2b
\end{aligned}
$$

Átrendezve:

$$
\begin{aligned}
2c - 1t - 2b - 2v &= 0 \\
1b + 2v - 1t &= 0 \\
1b - 3v &= 0 \\
1t - 2b &= -5
\end{aligned}
$$

Szöveges feladat megoldása

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right] \overset{s_1/2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right] \overset{s_2\cdot(-1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right] \overset{s_4-s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -5 \end{array}\right] \overset{s_4+s_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] \overset{s_4\cdot(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1+s_4 \\ s_2+2s_4 \\ \sim \\ s_3+3s_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1+s_3 \\ s_2+s_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \overset{s_1+\frac{1}{2}s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 32{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Így a megoldás: $c = 32{,}5, t = 25, b = 15, v = 5$.

Egy csésze $32{,}5$ dkg, egy tányér 25 dkg, egy bögre 15 dkg, míg egy villa 5 dkg.