

Készülés a 2. zh-ra I.

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2026. május 5.

Feladatok

1. Számítsuk ki az $1 + \sqrt{3}i$ komplex szám négyzetgyökeit. Az eredményt algebrai alakban adjuk meg.
2. Számoljuk ki a $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és minden sajátértékhez adjunk meg egy-egy sajátvektort.
3. Számítsuk ki az $f(x, y) = ye^{xy}$ függvény iránymenti deriváltját a $P(0, 3)$ pontban a $\mathbf{v} = (2, 1)$ irányban.
4. Keressük meg az $f(x, y) = x^2 - 6xy + y^3 + 3y^2$ függvény lokális szélsőértékeit, és azok típusát.

1. feladat

Számítsuk ki az $1 + \sqrt{3}i$ komplex szám négyzetgyökeit. Az eredményt algebrai alakban adjuk meg.

Először áttérünk trigonometrikus alakra:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{1} \right) = \operatorname{arctg} (\sqrt{3}) = 60^\circ$$

Tehát:

$$1 + \sqrt{3}i = 2(\cos(60^\circ) + i \sin(60^\circ))$$

A két négyzetgyök:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{60^\circ}{2} \right) + i \sin \left(\frac{60^\circ}{2} \right) \right) = \sqrt{2}(\cos(30^\circ) + i \sin(30^\circ)) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{60^\circ + 360^\circ}{2} \right) + i \sin \left(\frac{60^\circ + 360^\circ}{2} \right) \right) = \\ &= \sqrt{2}(\cos(210^\circ) + i \sin(210^\circ)) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

2. feladat

Számoljuk ki a $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és minden sajátértékhez adjunk meg egy-egy sajátvektort.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) - 2 + 0 - 2\lambda - 0 - 2(-1-\lambda) = \\ = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2 - 2\lambda + 2 + 2\lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 2) = \\ = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

Tehát a sajátértékek $0, 2, -1$.

Sajátérték $\lambda = 0$ -hoz:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_1/(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_3-s_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_1-2s_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát $x_3 = 0$, x_2 szabad paraméter, és $x_1 = -2x_2$. Egy sajátvektor: $(-2, 1, 0)$.

2. feladat folytatása

Sajátérték $\lambda = 2$ -höz:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} &\stackrel{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \stackrel{s_3+3s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \stackrel{s_3+2s_2}{\sim} \\ &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{s_1+s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tehát x_3 szabad paraméter, és $x_1 = -x_3$ és $2x_2 = x_3$.

Egy sajátvektor: $(-2, 1, 2)$.

Sajátérték $\lambda = -1$ -hez:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} &\stackrel{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \stackrel{s_3+2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{s_1-2s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Megint x_3 szabad paraméter, és $x_1 = -x_3$ és $x_2 = -x_3$.

Egy sajátvektor: $(-1, -1, 1)$.

3. feladat

Számítsuk ki az $f(x, y) = ye^{xy}$ függvény iránymenti deriváltját a $P(0, 3)$ pontban a $\mathbf{v} = (2, 1)$ irányban.

Kiszámoljuk a parciális deriváltakat az adott pontban:

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= ye^{xy}y = y^2e^{xy} & f'_x(0, 3) &= 9 \\f'_y(x, y) &= 1 \cdot e^{xy} + ye^{xy}x = e^{xy} + xye^{xy} & f'_y(0, 3) &= 1\end{aligned}$$

Így a gradens a $(9, 1)$ vektor.

A $\mathbf{v}$ vektort normáljuk:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(2, 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{(2, 1)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

Az iránymenti derivált a két kiszámolt vektor skaláris szorzata:

$$f'_e(0, 3) = (9, 1) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{19}{\sqrt{5}} \approx 8,50$$

4. feladat

Keressük meg az $f(x, y) = x^2 - 6xy + y^3 + 3y^2$ függvény lokális szélsőértékeit, és azok típusát.

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 2x - 6y$$

$$f'_y(x, y) = -6x + 3y^2 + 6y$$

Az első eltűnéséből: $2x - 6y = 0 \Rightarrow x = 3y$.

Ezt a második egyenletbe helyettesítve:

$$-6 \cdot 3y + 3y^2 + 6y = 0 \Rightarrow 3y^2 - 12y = 0 \Rightarrow y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ vagy } y = 4$$

Két stacionárius pont van: $(0, 0)$ és a $(12, 4)$.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 2$$

$$f''_{xy}(x, y) = -6$$

$$f''_{yy}(x, y) = 6y + 6$$

$$\text{Hesse-determináns: } 2(6y + 6) - (-6)^2 = 12y - 24$$

$(0, 0)$ -ban -24 , ami negatív, így ez nyeregpont, nem lokális szélsőérték,

$(12, 4)$ -ban $48 - 24 = 24$, ami pozitív, így ez lokális szélsőérték,

$$f''_{xx}(12, 4) = 2 > 0, \text{ így lokális minimum,}$$

$$\text{értéke: } f(12, 4) = -32.$$