

10. gyakorlat

Feltételes szélsőértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2026. május 7.

1. feladat (a)

Határozzuk meg az $f(x, y) = x + y$ kétváltozós függvény $x^2 + y = 1$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

1. feladat (a)

Határozzuk meg az $f(x, y) = x + y$ kétváltozós függvény $x^2 + y = 1$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A $g(x, y) = x^2 + y - 1$ függvénnyel a Lagrange-függvény:

$$F(x, y, \lambda) = x + y + \lambda (x^2 + y - 1)$$

A parciális deriváltjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 1 + \lambda \cdot 2x$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 1 + \lambda$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y - 1$$

A második egyenlet eltűnéséből: $\lambda = -1$. Ekkor az elsőből $x = \frac{1}{2}$. Végül a harmadikból $y = \frac{3}{4}$. Tehát egyetlen stacionárius pont az $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -1)$.

A feltétel y szerinti parciális deriváltja ($g'_y(x, y) = 1$) soha nem tűnik el.

1. feladat (a) folytatás

Határozzuk meg az $f(x, y) = x + y$ kétváltozós függvény $x^2 + y = 1$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$F''_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda$$

$$F''_{xy}(x, y, \lambda) = 0$$

$$F''_{yy}(x, y, \lambda) = 0$$

$$g'_x(x, y) = 2x$$

$$g'_y(x, y) = 1$$

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\lambda,$$

ami az $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -1)$ stacionárius pontban pozitív, így az feltételes maximumhely.

A feltételes (lokális) maximum értéke: $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$.

1. feladat (a) másik megoldás

Határozzuk meg az $f(x, y) = x + y$ kétváltozós függvény $x^2 + y = 1$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A feltételből kifejezhetjük az y változót: $y = 1 - x^2$.

Ezt a függvénybe beírva egy egyváltozós függvényt kapunk:

$$g(x) = f(x, 1 - x^2) = x + 1 - x^2$$

Ennek a szélsőértékeit az egyváltozós analízis segítségével határozhatjuk meg:

$$g'(x) = 1 - 2x = 0 \quad \implies \quad x = \frac{1}{2}$$

lehetséges szélsőérték hely. Mivel

$$g''(x) = -2 \quad \implies \quad g''\left(\frac{1}{2}\right) = -2 < 0,$$

ez lokális maximum hely.

Ha $x = \frac{1}{2}$ akkor $y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

1. feladat (b)

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ kétváltozós függvény $x + y = 8$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

1. feladat (b)

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ kétváltozós függvény $x + y = 8$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A $g(x, y) = x + y - 8$ függvénnyel a Lagrange-függvény:

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + 3xy + y^2 + \lambda(x + y - 8)$$

A parciális deriváltjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 3y + \lambda$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 3x + 2y + \lambda$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 8$$

Ezek eltűnése egy lineáris egyenletrendszer ad x, y, λ -ra:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & 1 & | & -16 \\ 0 & -1 & 1 & | & -24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & 1 & | & -16 \\ 0 & 0 & 2 & | & -40 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & 1 & | & -16 \\ 0 & 0 & 1 & | & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -20 \end{bmatrix}$$

Tehát a $(4, 4, -20)$ az egyetlen stacionárius pont.

A feltétel mindkét változó szerinti parciális deriváltja 1, így az nem fog eltűnni.

1. feladat (b) folytatás

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ kétváltozós függvény $x + y = 8$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$F''_{xx}(x, y, \lambda) = 2$$

$$F''_{xy}(x, y, \lambda) = 3$$

$$F''_{yy}(x, y, \lambda) = 2$$

$$g'_x(x, y) = 1$$

$$g'_y(x, y) = 1$$

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 + 3 - 2 - 2 = 2 > 0,$$

így a $(4, 4)$ feltételes lokális maximumhely.

A feltételes lokális maximum értéke: $f(4, 4) = 80$.

1. feladat (c)

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ kétváltozós függvény $xy = 3$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

1. feladat (c)

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ kétváltozós függvény $xy = 3$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A $g(x, y) = xy - 3$ függvénnyel a Lagrange-függvény:

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 3)$$

A parciális deriváltjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2x + \lambda y$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2y + \lambda x$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = xy - 3$$

Az első eltűnéséből $x = -\frac{\lambda y}{2}$, amit a másodikba helyettesítve: $2y - \frac{\lambda^2 y}{2} = 0$, amiből $y = 0$ vagy $\lambda^2 = 4$, azaz $\lambda = \pm 2$.

Ha $y = 0$, akkor $x = 0$, és így nem teljesül a feltétel.

Ha $\lambda = +2$, akkor $x = -y$, de ekkor nem teljesülhet a feltétel.

Ha $\lambda = -2$, akkor $x = y$, és a feltételből $x = y = \pm\sqrt{3}$.

Tehát két stacionárius pont van: $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2)$ és $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2)$.

A feltétel mindkét változó szerinti parciális deriváltja csak az origóban tűnik el.

1. feladat (c) folytatás

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ kétváltozós függvény $xy = 3$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$F''_{xx}(x, y, \lambda) = 2$$

$$F''_{xy}(x, y, \lambda) = \lambda$$

$$F''_{yy}(x, y, \lambda) = 2$$

$$g'_x(x, y) = y$$

$$g'_y(x, y) = x$$

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & y \\ \lambda & 2 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda xy - 2y^2 - 2x^2,$$

ami mindkét stacionárius pontban $-24 < 0$, így mindkettő feltételes lokális minimumhely.

A feltételes lokális minimum értéke: $f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6$.

2. feladat

Ha két szám összege 10, akkor legfeljebb mennyi a szorzatuk?

2. feladat

Ha két szám összege 10, akkor legfeljebb mennyi a szorzatuk?

Az $f(x, y) = xy$ függvény maximumát keressük, ha $x + y = 10$, azaz a $g(x, y) = x + y - 10$ függvény nullhelyein.

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 10)$$

A parciális deriváltjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = y + \lambda$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = x + \lambda$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 10$$

Az első két egyenletből $y = -\lambda$, illetve $x = -\lambda$. Ezeket a harmadikba helyettesítve: $-2\lambda - 10 = 0$, azaz $\lambda = -5$, és így $x = y = 5$. Az egyetlen stacionárius pont $(5, 5, -10)$.

A feltétel mindkét változó szerinti parciális deriváltja 1, ami nem tűnik el.

2. feladat folytatás

Ha két szám összege 10, akkor legfeljebb mennyi a szorzatuk?

A másodrendű parciális deriváltak:

$$F''_{xx}(x, y, \lambda) = 0$$

$$F''_{xy}(x, y, \lambda) = 1$$

$$F''_{yy}(x, y, \lambda) = 0$$

$$g'_x(x, y) = 1$$

$$g'_y(x, y) = 1$$

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$

így az $(5, 5)$ pont feltételes lokális maximumhely. Meggondolható, hogy globális is.

A feltételes maximum értéke: $f(5, 5) = 25$.

2. feladat másik megoldás

Ha két szám összege 10, akkor legfeljebb mennyi a szorzatuk?

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = 5 \implies xy \leq 25,$$

ahol egyenlőség pontosan $x = y$ esetén van, amikor $x = y = 5$.

3. feladat

Az $y = 3x - 10$ egyenesnek mely pontja van legközelebb az origóhoz?

3. feladat

Az $y = 3x - 10$ egyenesnek mely pontja van legközelebb az origóhoz?

Az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény helyett kereshetjük az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény minimumát, ami kicsit egyszerűbb.

Az $y = 3x - 10$ egyenes pontjai pontosan a $g(x, y) = 3x - y - 10$ függvény nullhelyei.

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(3x - y - 10)$$

A parciális deriváltjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 3\lambda$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2y - \lambda$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = 3x - y - 10$$

Az első két egyenletből $x = -\frac{3}{2}\lambda$, illetve $y = \frac{\lambda}{2}$. Ezeket a harmadikba helyettesítve: $3 \cdot (-\frac{3}{2}\lambda) - \frac{\lambda}{2} - 10 = 0$, azaz $\lambda = -2$, és így $x = 3$ és $y = -1$. Az egyetlen stacionárius pont $(3, -1, -2)$.

A feltétel parciális deriváltjai nem tűnnek el.

3. feladat folytatás

Az $y = 3x - 10$ egyenesnek mely pontja van legközelebb az origóhoz?

A másodrendű parciális deriváltak:

$$F''_{xx}(x, y, \lambda) = 2$$

$$F''_{xy}(x, y, \lambda) = 0$$

$$F''_{yy}(x, y, \lambda) = 2$$

$$g'_x(x, y) = 3$$

$$g'_y(x, y) = -1$$

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -18 - 2 = -20 < 0,$$

így a $(3, -1)$ pont feltételes lokális minimumhely. Meggondolható, hogy globális is.

Tehát a kérdéses egyenesnek a $(3, -1)$ pontja van legközelebb az origóhoz.

Bónuszfeladat

Adott egy háromszög egyik szöge és a vele szemköztes oldala. Hogyan válasszuk meg a többi oldalát, hogy a területe maximális legyen?

Házi feladat

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény $x + y = 6$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

Házi feladat végeredménye

$(3, 3)$ pontban feltételes minimumhely ($\lambda = -6$), melynek értéke: 18.