

3. gyakorlat

Lineáris összefüggőség és mátrixok

1. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok?

$$(a) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

2. Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét. Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix a_{ij} eleme jelentse az i -edik gyárban egy nap alatt előállított j -edik termék számát. A

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

vektor j -edik koordinátája a j -edik termék egységára. Mi a jelentése a következő szorzatoknak?

- (a) $\mathbf{A}\mathbf{p}$;
- (b) $\mathbf{A}\mathbf{e}_i$, ahol $\mathbf{e}_i$ a standard bázisvektor;
- (c) $\mathbf{1}^\top \mathbf{A}$, ahol $\mathbf{1}$ az az oszlopvektor, melynek minden koordinátája 1.

Hasonlóan írjuk fel mátrixszorzás segítségével azt a vektort, amelynek koordinátái megadják

- (d) az egyes gyárak által termelt termékek mennyiségeit;
- (e) az i -edik gyár által gyártott termékek számát.

Bónuszfeladatok

4. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ tér

$$\mathbf{a} = (1, 3, 4), \quad \mathbf{b} = (2, 7, 2), \quad \mathbf{c} = (-1, 2, 1)$$

vektorait. Döntsük el, hogy az $\mathbf{x} = (-3, 1, -2)$ vektor benne van-e a vektorok által generált $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ altérben.

5. Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}^4$ tér

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 = 5x_3 - x_4\}$$

részhalmaza egy altér $\mathbb{R}^4$ -ben. Hány dimenziós ez az altér? Adjuk meg egy bázisát.

6. Határozzuk meg mindazon $\mathbf{B}$ mátrixokat, amelyek az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixszal felcserélhetők (azaz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$).

Házi feladat

7. Egy kereskedelmi cég n féle terméket forgalmaz m boltjában. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse a j -edik termék i -edik boltban egy hónap alatt forgalmazott mennyiségét. A $\mathbf{p}$ vektor p_i koordinátája jelölje az i -edik termék egységárát. Az $\mathbf{A}$ mátrix, a $\mathbf{p}$ vektor, az $\mathbf{e}_i$ (a standard bázisvektor), valamint az $\mathbf{1}$ (az az oszlopvektor, melynek minden koordinátája 1) vektorok segítségével írjuk fel:

- (a) a havi bevételt boltonként;
- (b) az r -edik bolt havi bevételét;
- (c) az r -edik boltban a q -adik áruból eladott mennyiséget;
- (d) az egy hónap alatt eladott termékmennyiséget termékenként;
- (e) a havi összbevételt.