4. gyakorlat

Lineáris egyenletrendszerek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

202. március 12.

1. feladat

Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss-eliminációval, majd az együtthatómátrix invertálásával is.

1. feladat

Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss-eliminációval, majd az együtthatómátrix invertálásával is.

Gauss-eliminációs megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right] \underset{s_3-4s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right] \overset{s_2/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_3+3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \overset{s_3/(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{s_2-\frac{2}{3}s_3}{\overset{s_1-2s_3}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \overset{s_1-s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Tehát a megoldás: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2$.

1. feladat inverzmátrixszal

Az inverzmátrixot hasonló számolással kapjuk, csak kezdetben a jobb oldalon nem az egyenletek jobb oldala, hanem az egységmátrix áll:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{s_3-4s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2/(-3)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3+3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{s_3/(-2)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{s_2-\frac{2}{3}s_3}{\overset{s_1-2s_3}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \overset{s_1-s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1. feladat inverzmátrixszal folytatás

Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss-eliminációval, majd az együtthatómátrix invertálásával is.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

És ezzel a megoldás:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2$.

2. feladat (a)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 6 \\ -x - 3y + 2z &= 5 \\ 3x + 5y + 8z &= 7 \end{aligned}$$

2. feladat (a)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 6 \\ -x - 3y + 2z &= 5 \\ 3x + 5y + 8z &= 7 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \end{array}\right] \underset{s_3-3s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & 16 \\ 0 & -4 & 14 & 22 \end{array}\right] \overset{s_2/(-2)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -8 \\ 0 & -4 & 14 & 22 \end{array}\right] \underset{s_3+4s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right]$$

Az utolsó sor egyenlete soha nem teljesülthet, így nincs megoldás.

2. feladat (b)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 6 \\ -x - 3y + 2z &= 5 \\ 3x + 5y + 8z &= 17 \end{aligned}$$

2. feladat (b)

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$
\begin{aligned}
2x + 4y + 3z &= 6 \\
-x - 3y + 2z &= 5 \\
3x + 5y + 8z &= 17
\end{aligned}
$$

Hasonlóan az (a) feladathoz:

$$
\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 8 & 17 \end{array}\right]
\overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim}
\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \end{array}\right]
\overset{s_1/(-1)}{\sim}
$$

$$
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 17 \end{array}\right]
\underset{s_3 - 3s_1}{\overset{s_2 - 2s_1}{\sim}}
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & 16 \\ 0 & -4 & 14 & 32 \end{array}\right]
\overset{s_2/(-2)}{\sim}
$$

$$
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -8 \\ 0 & -4 & 14 & 32 \end{array}\right]
\underset{s_3 + 4s_2}{\sim}
\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

Az utolsó sor egyenlete semmit nem mond, így azt elhagyhatjuk.

2. feladat (b) folytatása

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 8 & 17 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -8 \end{array}\right] \overset{s_1-3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{17}{2} & 19 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -8 \end{array}\right]$$

Mivel csak az első és a második változó oszlopában van vezéregyes, így a harmadik z változó szabad paraméter, értékét tetszőlegesen megválaszthatjuk. A többi változó értékét ennek függvényében tudjuk felírni:

első egyenlet: $$x + \frac{17}{2}z = 19 \qquad \Rightarrow \qquad x = 19 - \frac{17}{2}z$$

második egyenlet: $$y - \frac{7}{2}z = -8 \qquad \Rightarrow \qquad y = -8 + \frac{7}{2}z$$

Tehát a megoldás:

$$\begin{array}{l} x = 19 - \frac{17}{2}z \\ y = -8 + \frac{7}{2}z \end{array} \qquad z \in \mathbb{R}$$

3. feladat

Oldjuk meg a valós számok körében a

$$
\begin{aligned}
-2x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= 10 \\
x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\
2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 &= 17 \\
3x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 &= 15
\end{aligned}
$$

egyenletrendszert.

3. feladat

Oldjuk meg a valós számok körében a

$$\begin{aligned} -2x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 &= 17 \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 &= 15 \end{aligned}$$

egyenletrendszert.

A kibővített mátrix:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -2 & -6 & -6 & -8 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -3 & -1 & 3 & 17 \\ 3 & 9 & 6 & 9 & 8 & 15 \end{array}\right]$$

3. feladat folytatása

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -2 & -6 & -6 & -8 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -3 & -1 & 3 & 17 \\ 3 & 9 & 6 & 9 & 8 & 15 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -6 & -6 & -8 & 0 & 10 \\ 2 & 6 & -3 & -1 & 3 & 17 \\ 3 & 9 & 6 & 9 & 8 & 15 \end{array}\right] \underset{\substack{s_3-2s_1 \\ s_4-3s_1}}{\overset{s_2+2s_1}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right] \overset{s_2-s_3}{\sim} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 5 & 9 \end{array}\right] \underset{s_4-3s_2}{\overset{s_3+5s_2}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \overset{s_3/6}{\sim} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \overset{s_4-2s_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{s_2-s_3}{\overset{s_1-s_3}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{s_1-s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

3. feladat folytatása

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -2 & -6 & -6 & -8 & 0 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -3 & -1 & 3 & 17 \\ 3 & 9 & 6 & 9 & 8 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|r} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Mivel a második és a negyedik oszlopban nincs vezéregyes, így x_2 és x_4 szabad változók.

A harmadik egyenlet: $x_5 = 3$.

$$\begin{array}{rccc} \text{második egyenlet:} & x_3 + x_4 = -2 & \Rightarrow & x_3 = -2 - x_4 \\ \text{első egyenlet:} & x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 & \Rightarrow & x_1 = 1 - 3x_2 - x_4 \end{array}$$

Tehát a megoldás:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 3x_2 - x_4 \\ x_3 &= -2 - x_4 \qquad\qquad x_2, x_4 \in \mathbb{R} \\ x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Házi feladatok

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

(a)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 3z &= 4 \\ 3x + 2y + z &= 1 \\ -x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5 \\ x + 5y - 2z &= 7 \\ -x + 2y - z &= 3 \end{aligned}$$

Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Bónuszfeladat

A Mini piskóta összetevői: liszt, tojás cukor. A csomagoláson ezek aránya nincs feltüntetve, viszont vannak tápértékadatok. 100 g termékben $11{,}62$ g fehérje, $4{,}99$ g zsír, $82{,}28$ g szénhidrát és $420{,}13$ kalória van. A tápérték adatbázisból kikerestük az összetevők adatait:

100 g	fehérje (g)	zsír (g)	szénhidrát (g)	energia (kalória)
cukor	0	0	100	385
liszt	10	1	76	364
tojás	13	10	1	143

Állapítsuk meg a 100 g kekszhez felhasznált összetevők tömegét.
(Gondoljunk arra is, hogy sütéskor a tészta víztartalma elpárolog.)

Házi feladatok megoldása

(a) $x = -1, y = 2, z = 0$;

(b) nincs megoldás.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 4 & -6 \\ 0 & -2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & -3 & 5 \end{bmatrix}$$