

# 5. gyakorlat

## Mátrixok rangja és determinánása

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,  
Algebra és Geometria Tanszék

2026. március 19.

## 1. feladat

Határozzuk meg a  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$  mátrix rangját.

# 1. feladat

Határozzuk meg a  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$  mátrix rangját.

Sor- és oszloptranszformációkkal alakíthatjuk a mátrixot, például így:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} &\stackrel{s_1 \cdot (-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \stackrel{s_2+2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{o_3+2o_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{s_2-2s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{o_4+o_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Az utolsó mátrixban csak 0 és 1 szerepel, és minden sorban és minden oszlopban legfeljebb egy darab egyes. Így a mátrix rangja az itt levő egyesek száma, ami 2.

## 2. feladat

Hány lineárisan független vektor választható ki a

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorok közül?

## 2. feladat

Hány lineárisan független vektor választható ki a

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorok közül?

A kiválasztható lineárisan független vektorok maximális számához az általuk alkotott mátrix rangját kell kiszámolni az előző feladathoz hasonlóan:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{s_1 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} s_2 - 2s_1 \\ s_3 - 3s_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 15 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} o_2 + 2o_1 \\ \sim \\ o_3 + 3o_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 15 & 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{s_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 15 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_3 - s_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} o_2 - 2o_4 \\ \sim \\ o_3 - 4o_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{o_2/5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 11 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{o_3 - 11o_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A mátrix rangja 3, így ennyi lineárisan független vektort választhatunk ki.

### 3. feladat (a)

Számítsuk ki a  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát.

### 3. feladat (a)

Számítsuk ki a  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát.

A  $2 \times 2$ -es determinánst az elemekből egyszerűen számolhatjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

### 3. feladat (b)

Számítsuk ki a  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát.

### 3. feladat (b)

Számítsuk ki a  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát.

A  $3 \times 3$ -as determinánst is számolhatjuk közvetlenül (Sarrus-szabály):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) \cdot 4 = \\ = 16 - 10 - 3 - 12 - 5 - 8 = -22$$

Kicsit egyszerűbb, ha sortranszformáció után kifejtjük az első oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_2 + s_1 \\ = \\ s_3 - s_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 8 \cdot 3) = -22$$

### 3. feladat (c)

Számítsuk ki a  $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát.

### 3. feladat (c)

Számítsuk ki a  $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  mátrix determinánsát.

Sortranszformációkat végzünk:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{s_1 \cdot (-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} s_2 - 3s_1 \\ = \\ s_3 - s_1 \\ s_4 - 2s_1 \end{array} \\ (-1) & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \end{vmatrix} \stackrel{s_2 \leftrightarrow s_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \end{vmatrix} \begin{array}{l} s_3 + s_2 \\ = \\ s_4 - s_2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\ & \stackrel{s_3/2}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{s_4 + 2s_3}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \end{vmatrix} = 2 \cdot 23 = 46 \end{aligned}$$

## 4. feladat

Milyen  $p$  valós paraméterek esetén invertálható az alábbi mátrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & p \end{bmatrix}$$

Egy alkalmas  $p$  esetére írjuk fel a mátrix inverzét is.

## 4. feladat

Milyen  $p$  valós paraméterek esetén invertálható az alábbi mátrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & p \end{bmatrix}$$

Egy alkalmas  $p$  esetére írjuk fel a mátrix inverzét is.

Mivel egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem 0, így számoljuk ki a determinánst a  $p$  függvényében:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 6p + 75 + 81 - 81 - 90 - 5p = p - 15$$

Tehát  $p \neq 15$  esetén invertálható ez a mátrix.

Az inverzet  $p = 17$  esetén számoljuk ki az aldeterminánsos módszerrel.

## 4. feladat – inverz kiszámítása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & 17 \end{bmatrix}$$

1. Determináns kiszámolása:

$$\det \mathbf{A} = p - 15 = 17 - 15 = 2$$

2. Aldeterminánsok kiszámolása:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -4 & 7 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. A kapott mátrixot transzponáljuk:

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

4. A kapott mátrixot sakkáblaszabály szerint szorozzuk:

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Végül leosztjuk a determinánssal:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & 17 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## 5. feladat

Oldjuk meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszert.

$$3x + 2y + z = 7$$

$$2x - y - 3z = -4$$

$$-x + 3y + 5z = 10$$

## 5. feladat

Oldjuk meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszert.

$$3x + 2y + z = 7$$

$$2x - y - 3z = -4$$

$$-x + 3y + 5z = 10$$

Az együtthatómátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 6 + 6 - 1 - 20 - (-27) = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \\ 10 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ -1 & 10 & 5 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-3}{3} = -1,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 10 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

## Házi feladatok

Hány lineárisan független vektor választható ki az alábbi vektorok közül?

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

2 lineárisan független vektor választható ki

1448