

# 6. gyakorlat

## Komplex számok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,  
Algebra és Geometria Tanszék

2026. március 26.

# 1. feladat

Legyen  $z_1 = 3 + 2i$  és  $z_2 = 1 - 3i$ . Számoljuk ki az alábbiakat:

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 z_2, \quad \overline{z_1}, \quad |z_1|, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

# 1. feladat

Legyen  $z_1 = 3 + 2i$  és  $z_2 = 1 - 3i$ . Számoljuk ki az alábbiakat:

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 z_2, \quad \overline{z_1}, \quad |z_1|, \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

A szorzásnál használjuk, hogy  $i^2 = -1$ , míg az osztásnál a nevező konjugáltjával bővítjük a törtet:

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (1 - 3i) = (3 + 1) + (2 - 3)i = 4 - i$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (1 - 3i) = (3 - 1) + (2 - (-3))i = 2 + 5i$$

$$z_1 z_2 = (3 + 2i) \cdot (1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 9 - 7i$$

$$\overline{z_1} = 3 - 2i$$

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 2i}{1 - 3i} = \frac{(3 + 2i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{3 + 9i + 2i + 6i^2}{1 + 3i - 3i - 9i^2} = \frac{-3 + 11i}{10} = \\ &= -0,3 + 1,1i \end{aligned}$$

## 2. feladat (a)

Keressük meg a  $z^4 + z^2 - 6$  polinom gyökeit a komplex számok körében.

## 2. feladat (a)

Keressük meg a  $z^4 + z^2 - 6$  polinom gyökeit a komplex számok körében.

Vezessük be az  $y = z^2$  változót. Ebben a változóban ez egy másodfokú polinom:  $y^2 + y - 6$ , melynek gyökei 2 és  $-3$ .

$y = 2$  esetén  $z = \pm\sqrt{2}$ .

$y = -3$  esetén nincs megfelelő valós  $z$ , de a komplex számok körében van:

$$z = \pm\sqrt{3}i$$

általában negatív  $q$  valós szám esetén  $\sqrt{q} = \pm\sqrt{-qi}$ .

Tehát a polinom gyökei:  $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i$ .

## 2. feladat (b)

Keressük meg a  $z^3 - 6z^2 + 13z$  polinom gyökeit a komplex számok körében.

## 2. feladat (b)

Keressük meg a  $z^3 - 6z^2 + 13z$  polinom gyökeit a komplex számok körében.

Mivel nincs konstans tag, így  $z_1 = 0$  gyök. Ezt kiemelve:

$$z^3 - 6z^2 + 13z = z(z^2 - 6z + 13)$$

Bár a másodfokú polinomnak negatív a diszkriminánsa, és így nincsenek valós gyökei, a komplex számok körében van két gyök, melyet a szokásos megoldóképlettel számolhatunk:

$$z_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i,$$

ahol felhasználtuk, hogy negatív  $q$  valós szám esetén  $\sqrt{q} = \pm\sqrt{-q}i$ .

Tehát a polinom gyökei:  $0$ ,  $3 + 2i$  és  $3 - 2i$ .

### 3. feladat

Legyen  $z = -1 + i$ . Írjuk fel trigonometrikus alakban, majd számoljuk ki a negyedik hatványát és az ötödik gyökeit.

### 3. feladat

Legyen  $z = -1 + i$ . Írjuk fel trigonometrikus alakban, majd számoljuk ki a negyedik hatványát és az ötödik gyökeit.

A  $z = -1 + i$  komplex szám

abszolút értéke:  $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ,

argumentuma:  $\varphi = \arctg \frac{1}{-1} + \pi = \arctg(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4}$ , ahol a  $+\pi$  tag azért kell, mert  $\operatorname{Re} z = -1 < 0$ . Így a trigonometrikus alak:

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right).$$

Ennek segítségével:

$$\begin{aligned} z^4 &= \left( \sqrt{2} \right)^4 \left( \cos \left( 4 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( 4 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) \right) = 4 \left( \cos(3\pi) + i \sin(3\pi) \right) = \\ &= 4 \left( \cos \pi + i \sin \pi \right) = -4 \end{aligned}$$

### 3. feladat – folytatás

Legyen  $z = -1 + i$ . Írjuk fel trigonometrikus alakban, majd számoljuk ki a negyedik hatványát és az ötödik gyökeit.

A trigonometrikus alak:

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

A  $z$  komplex számnak öt  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  ötödik gyöke van:

$$z_1 = \sqrt[5]{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{5} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{5} \right) \right) = \sqrt[10]{2} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{20} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{20} \right) \right)$$

$$z_2 = \sqrt[5]{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{5} + 2\pi \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{5} + 2\pi \right) \right) = \sqrt[10]{2} \left( \cos \left( \frac{11\pi}{20} \right) + i \sin \left( \frac{11\pi}{20} \right) \right)$$

$$z_3 = \sqrt[5]{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{5} + 4\pi \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{5} + 4\pi \right) \right) = \sqrt[10]{2} \left( \cos \left( \frac{19\pi}{20} \right) + i \sin \left( \frac{19\pi}{20} \right) \right)$$

$$z_4 = \sqrt[5]{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{5} + 6\pi \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{5} + 6\pi \right) \right) = \sqrt[10]{2} \left( \cos \left( \frac{27\pi}{20} \right) + i \sin \left( \frac{27\pi}{20} \right) \right)$$

$$z_5 = \sqrt[5]{\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{5} + 8\pi \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{5} + 8\pi \right) \right) = \sqrt[10]{2} \left( \cos \left( \frac{35\pi}{20} \right) + i \sin \left( \frac{35\pi}{20} \right) \right)$$

## 4. feladat

Határozzuk meg a  $-8i$  komplex szám köbgyökeit.

## 4. feladat

Határozzuk meg a  $-8i$  komplex szám köbgyökeit.

Bár a feladat nem kérte, de most is érdemes áttérni trigonometrikus alakra:

$$r = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = 8$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \text{ mert } \operatorname{Re} z = 0 \text{ és } \operatorname{Im} z < 0$$

$$-8i = 8 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Így a köbgyökök:

$$z_1 = \sqrt[3]{8} \left( \cos \left( \frac{-\frac{\pi}{2}}{3} \right) + i \sin \left( \frac{-\frac{\pi}{2}}{3} \right) \right) = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) = \sqrt{3} - i$$

$$z_2 = \sqrt[3]{8} \left( \cos \left( \frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} \right) \right) = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) = 2i$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \sqrt[3]{8} \left( \cos \left( \frac{-\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{-\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} \right) \right) = 2 \left( \cos \left( \frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{6} \right) \right) = \\ &= -\sqrt{3} - i \end{aligned}$$

## 5. feladat (a)

Ábrázoljuk a komplex számsíkon a  $\text{Im}(z + i) \geq 2$  halmazt.

## 5. feladat (a)

Ábrázoljuk a komplex számsíkon a  $\text{Im}(z + i) \geq 2$  halmast.

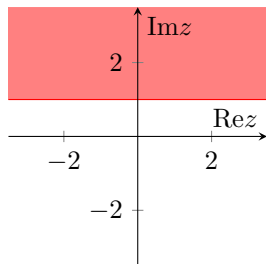
Ha  $z = a + bi$ , akkor

$$z + i = a + (b + 1)i$$

$$\text{Im}(z + i) = b + 1$$

$$2 \leq b + 1$$

$$1 \leq b$$



## 5. feladat (b)

Ábrázoljuk a komplex számsíkon a  $|2z + 3| > 4$  halmazt.

## 5. feladat (b)

Ábrázoljuk a komplex számsíkon a  $|2z + 3| > 4$  halmazt.

Ha  $z = a + bi$ , akkor

$$2z + 3 = 2a + 3 + 2bi$$

$$|2z + 3| = \sqrt{(2a + 3)^2 + (2b)^2}$$

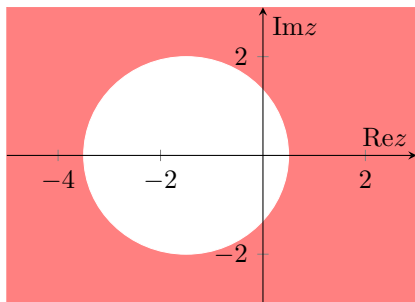
$$4 < \sqrt{(2a + 3)^2 + (2b)^2}$$

$$16 < (2a + 3)^2 + (2b)^2$$

$$4 < \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + b^2$$

Ami a  $(-\frac{3}{2}, 0)$  középpontú, 2 sugarú kör külseje.

Úgyis tekinthettük volna, hogy a feladat ekvivalens a  $|z - (-\frac{3}{2})| > 2$  egyenlőtlenséggel, ami azt fejezi ki, hogy a  $z$  komplex szám a  $-\frac{3}{2}$ -től nagyobb, mint 2 távolságra van.



# Házi feladatok

Legyen  $z_1 = 3 + 2i$  és  $z_2 = 7 - i$ . Mennyi  $\frac{z_1 - \overline{z_2}}{z_2}$ ?

Keressük meg a  $z^2 + 4z + 13$  polinom gyökeit a komplex számok körében.

Számoljuk ki a  $\sqrt{3} - i$  komplex szám tizenegyedik hatványát (az eredményt algebrai alakban adjuk meg).

## Házi feladatok végeredménye

$$-\frac{29}{50} + \frac{3}{50}i = -0,58 + 0,06i$$

$$-2 - \sqrt{3}i, -2 + \sqrt{3}i$$

$$2^{11} \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 1024\sqrt{3} + 1024i$$