

3. vizsga megoldásvázlata

5. (d)

6. $\mathbf{v} = (-2, 2, -5)$, $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, így

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{-14}{14} \mathbf{a} = -\mathbf{a} = (-3, -1, -2),$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = (-2, 2, -5) - (-3, -1, -2) = (1, 3, -3).$$

$$7. \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -8 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -8 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

Tehát x_2 és x_4 szabad paraméter, és $x_1 = -3 - 3x_2 + 4x_4$ és $x_3 = 4 - 3x_4$.

8. Trigonometrikus alak: $-2+2i = \sqrt{8}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$, így a harmadik gyökök:

$$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \left(\cos \frac{135^\circ}{3} + i \sin \frac{135^\circ}{3} \right) = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 + i$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \left(\cos \frac{135^\circ+360^\circ}{3} + i \sin \frac{135^\circ+360^\circ}{3} \right) = \sqrt{2} (\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ)$$

$$z_3 = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \left(\cos \frac{135^\circ+2 \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{135^\circ+2 \cdot 360^\circ}{3} \right) = \sqrt{2} (\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ)$$

$$9. \quad \begin{aligned} f'_x(x, y) &= 3e^{2x-3y} + 3xe^{2x-3y} \cdot 2 & f'_x(3, 2) &= 21 \\ f'_y(x, y) &= 3xe^{2x-3y} \cdot (-3) & f'_y(3, 2) &= -27 \end{aligned}$$

Az érintősík egyenlete felhasználva, hogy $f(3, 2) = 9$:

$$z = 21(x - 3) - 27(y - 2) + 9 \quad \Leftrightarrow \quad z = 21x - 27y$$

$$10. \quad \begin{aligned} f'_x(x, y) &= 3x^2y - 3y & \Rightarrow 3y(x^2 - 1) &= 0 \\ f'_y(x, y) &= x^3 - 3x + 2y & \Rightarrow x^3 - 3x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Az első eltűnéséből két eset lehetséges: $y = 0$, akkor $x^3 - 3x = 0$, azaz $x = 0$ vagy $x = \pm\sqrt{3}$. Vagy $x = \pm 1$, és akkor $y = \pm 1$.

Stacionárius pontok: $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. Hesse determináns:

$$6xy \cdot 2 - (3x^2 - 3)^2 = 12xy - (3x^2 - 3)^2,$$

mely a $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ pontokban negatív, így ezek nyeregpontok,

Az $(1, 1)$, $(-1, -1)$ pontokban pozitív, így ezek lokális szélsőérték helyek, mind-

kettő lokális minimumhely ($f''_{yy} = 2 > 0$). Értékek: $f(1, 1) = f(-1, -1) = -1$.

$$11. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^{n+1} - 2^{2n-1}}{3^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{3^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{3^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7 \cdot 7^n}{(3^2)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^2)^n / 2}{(3^2)^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 7 \left(\frac{7}{9} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \right)^n = \frac{7}{1 - \frac{7}{9}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{63}{2} - \frac{9}{10} = \frac{153}{5} = 30,6$$