

4. vizsga megoldásvázlata

5. (e)

$$6. \quad \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{(8-x)^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 8^-} \int_0^b (8-x)^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{b \rightarrow 8^-} \left[(-1) \frac{(8-x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow 8^-} [-3\sqrt[3]{8-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow 8^-} -3\sqrt[3]{8-b} + 3\sqrt[3]{8-0} = 6$$

7. Az alábbi mátrix rangját kell kiszámolni:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -10 \\ 0 & -3 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & -10 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -10 & -10 \\ 0 & -3 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & -10 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így a rang 2, azaz két lineárisan független vektor választható ki.

$$8. \quad \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)((3-\lambda)(-1-\lambda)+5) = (5-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2),$$

így a sajátértékek 5, és $1 \pm i$. Az 5-höz egy sajátvektor: $(1, 0, 0)$.

$$9. \quad f'_x(x, y) = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+y}} \cdot 2 = \frac{y}{\sqrt{2x+y}} \quad f'_x(2, -3) = -3$$

$$f'_y(x, y) = \sqrt{2x+y} + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+y}} \cdot 1 \quad f'_y(2, -3) = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{e} = \frac{(1, -4)}{\sqrt{1^2+(-4)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}} \right), \text{ így az iránymenti derivált}$$

$$f'_\mathbf{e}(P) = \text{grad} f(P) \cdot \mathbf{e} = \left(-3, -\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \approx -0,2425$$

10. $F(x, y, \lambda) = 2x + 8y - 3 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$ Lagrange-függvénnyel:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2 + \lambda \cdot 2x \Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda}$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 8 + \lambda \cdot 4y \Rightarrow y = -\frac{2}{\lambda}$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 1 \Rightarrow 1 = \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 + 2\left(-\frac{2}{\lambda}\right)^2$$

$$\text{így } \lambda = \pm 3, \text{ és így } x = \mp \frac{1}{3} \text{ és } y = \mp \frac{2}{3}. \text{ Hesse-determináns: } \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 4\lambda & 4y \\ 2x & 4y & 0 \end{vmatrix} = -16\lambda(x^2 + 2y^2)$$

mely a $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 3)$ -ban negatív (felt. lok. minimum), értéke: $f(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = -9$,

és a $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -3)$ -ban pozitív (felt. lok. maximum), értéke: $f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = 3$.

$$11. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} - 3^{n+3}}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{5^{n+2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+3}}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^2)^n / 2}{25 \cdot 5^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{27 \cdot 3^n}{25 \cdot 5^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{50} \left(\frac{4}{5} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{27}{25} \left(\frac{3}{5} \right)^n = \frac{\frac{1}{50} \cdot \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} - \frac{\frac{27}{25} \cdot \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{2}{25} - \frac{81}{50} = -\frac{77}{50} = -1,54$$