Feladatok az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 10. hét

1. Keressük meg a következő függvények lokális szélsőértékeit!

   a) $f(x,y) = (x-3y+3)^2 + (x-y-1)^2$ b) $f(x,y) = (x-y+1)^2 - (x^2-2)^2$

   c) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 - 4$ d) $f(x,y) = \dfrac{20}{x} + \dfrac{50}{y} + xy$

   e) $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

2. Keressük meg az $x^2 + y^2 + y - 1$ függvény maximumát és minimumát az $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ halmazon!

3. Legyen $f(x,y) = x^3y^5$. Keressük meg f lokális szélsőértékeit! Keressük meg f minimumát és maximumát a $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ csúcsok által meghatározott háromszöglapon!

4. Géza a pajtája falához egy $1\,\mathrm{m}^3$ térfogatú, felülről nyitott, téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta fala alkotja, csak a maradék 3 oldalát és az alját kell elkészítenie. Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia? Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

5. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

   a) $f(x,y) = x^3 - 9x + y^2 - 6y$ b) $f(x,y) = 2x + y + \dfrac{4}{xy}$

   c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^3} + y^3 - \dfrac{3y}{x}$ d) $f(x,y) = y^3 - 12y + 2(x+y)^2 - 8(x+y)$

   e) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy} + 8y - x$ f) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy + 9y$

6. Határozzuk meg a $z = 4 - x^2 - y^2$ egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak.

7. Egy téglatest egy pontban összefutó éleinek összege 60 cm. Mekkorák az élek, ha a téglatest térfogata maximális?

Emlékeztető

– Az $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kétszer folytonosan deriválható függvénynek lokális szélsőértéke az $\vec{x}_0 \in A$ pontban csak úgy lehet, ha $\vec{x}_0$-ban minden parciális deriváltja 0. Annak eldöntésére, hogy $\vec{x}_0$-ban tényleg szélsőértéke van-e, nézzük ezt a determinánst: $D(\vec{x}_0) = \det \begin{bmatrix} f''_{xx}(\vec{x}_0) & f''_{xy}(\vec{x}_0) \\ f''_{yx}(\vec{x}_0) & f''_{yy}(\vec{x}_0) \end{bmatrix}$. Ha $D(\vec{x}_0) > 0$, akkor $\vec{x}_0$-ban lokális szélsőérték van: ha $f''_{xx}(\vec{x}_0) > 0$ akkor minimum, ha $f''_{xx}(\vec{x}_0) < 0$ akkor maximum. Ha $D(\vec{x}_0) < 0$, akkor $\vec{x}_0$-ban nincs lokális szélsőérték, míg $D(\vec{x}_0) = 0$ esetén bármi előfordulhat.