Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 11. hét

1. Számoljuk ki:

a) $\displaystyle\iint_A xy\,d(x,y) = ?\qquad A = \left\{(x,y)\,\middle|\,0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\right\}$

b) $\displaystyle\iint_A x\sin(xy)\,d(x,y) = ?\qquad A = \left\{(x,y)\,\middle|\,1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$

c) $\displaystyle\iint_T x\,d(x,y) = ?\qquad T = \left\{(x,y)\,\middle|\,x^2 \le y \le x+2\right\}$

d) $\displaystyle\iint_T \frac{x^2}{y^2}\,d(x,y) = ?\qquad T = \left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{1}{x} \le y \le x,\ 1 \le x \le 2\right\}$

e) $\displaystyle\iint_T y\sin x^2\,d(x,y) = ?\qquad T = \left\{(x,y)\,|\,0 \le y \le \sqrt{x},\ 0 \le x \le 1\right\}$

Megoldás a) Az integrálási határok $0 \le x \le 1$ és $0 \le y \le 1$, azaz az integrál

$$\iint_A xy\,d(x,y) = \int_0^1\int_0^1 xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

b) Most

$$\iint_A x\sin(xy)\,d(x,y) = \int_1^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(xy)\,dy\,dx = \int_1^3 \left[-\cos(xy)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\,dx = \int_1^3 1-\cos\frac{\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \left[x - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\right]_1^3 = 2 + \frac{4}{\pi}.$$

c) A határgörbék metszéspontjainak x-koordinátái az $x^2 = x+2$ egyenlet megoldásai, azaz $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. Tehát az integrálási határok $-1 \le x \le 2$ és $x^2 \le y \le x+2$.

$$\iint_T x\,d(x,y) = \int_{-1}^2\int_{x^2}^{x+2} x\,dx\,dy = \int_{-1}^2 [xy]_{x^2}^{x+2}\,dx = \int_{-1}^2 x^2+2x-x^3\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^2 = \frac{9}{4}.$$

d)

$$\iint_T \frac{x^2}{y^2}\,d(x,y) = \int_1^2\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy\,dx = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \int_1^2 -x+x^3\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{9}{4}.$$

e)

$$\iint_T y\sin x^2\,d(x,y) = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} y\sin x^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\sin x\right]_0^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\sin x^2\,dx =$$

$$= \left[-\frac{\cos x}{4}\right]_0^1 = \frac{1-\cos 1}{4}.$$

2. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és számoljuk ki az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^1 y\sin x^2\,dx\,dy = ?$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_{2y}^2 4\cos(x^2)\,dx\,dy = ?$

c) $\displaystyle\int_0^2\int_{y/2}^1 e^{x^2}\,dx\,dy = ?$

d) $\displaystyle\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,dy\,dx = ?$

Megoldás a) Felrajzolva a tartományt leolvashatóak az fordított sorrendű integrálás határai: $0 \le y \le \sqrt{x}$ és $0 \le x \le 1$. Azaz az integrál éppen az előző feladatban szereplő utolsó integrál, melynek értékét már kiszámoltuk.
b) A fordított határok: $0 \le y \le \frac{x}{2}$ és $0 \le x \le 2$. Így az integrál:

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 4\cos(x^2)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} 4\cos(x^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[4y\cos(x^2)\right]_0^{\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \int_0^2 2x\cos(x^2)\,dx = \left[\sin(x^2)\right]_0^2 = \sin 4.$$

c) A fordított határok: $0 \le y \le 2x$ és $0 \le x \le 1$. Így

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[ye^{x^2}\right]_0^{2x} dx = \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e-1$$

d) A fordított határok $0 \le x \le y^3$ és $0 \le y \le 2$. Tehát:

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\,dx\,dy = \int_0^2 \left[\frac{x}{y^4+1}\right]_0^{y^3} dy =$$

$$= \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\,dy = \left[\frac{1}{4}\ln|y^4+1|\right]_0^2 = \frac{\ln 17}{4}$$

3. Számoljuk ki:
   a) $\displaystyle\iint_A \frac{1}{1+x^2}\,d(x,y) = ?$ $\qquad A =$ a $(0,0)$, $(1,1)$ és $(1,0)$ csúcsú háromszög
   b) $\displaystyle\iint_A \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\,d(x,y) = ?$ $\qquad A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\ge 0, x^2 \le y \le 4\right\}$
   c) $\displaystyle\iint_T xy\,d(x,y) = ?$ $\qquad T$ határgörbéi: $y=0, y=6-x, y=\sqrt{x}$
   d) $\displaystyle\iint_T \sin^2 x - y^2\,d(x,y) = ?$ $\qquad T = \left\{(x,y) \,\middle|\, y^2 \le \sin^2 x, 0 \le x \le \pi\right\}$

Megoldás a) Az integrálás határai $0 \le y \le x$ és $0 \le x \le 1$. Tehát

$$\iint_A \frac{1}{1+x^2}\,d(x,y) = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y}{1+x^2}\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

b) Mivel az $y=x^2$ görbe és az $y=4$ egyenes metszéspontjai $x=\pm 2$, vázolva a tartományt leolvashatók az integrálási határok: $x^2 \le y \le 4$ és $0 \le x \le 2$. Így

$$\iint_A \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\,d(x,y) = \int_0^2 \int_{x^2}^4 \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\,dy\,dx = \int_0^2 \left[x \operatorname{arsh} y\right]_{x^2}^4 dx = \int_0^2 x\left(\operatorname{arsh} 4 - \operatorname{arsh} x^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\left(\operatorname{arsh} 4 - \operatorname{arsh} x^2\right)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{(x^4+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^2 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}.$$

c) Az $y=\sqrt{x}$ és az $y=6-x$ görbék egyetlen metszéspontja $P(4,2)$. Az integrálás sorrendjének megfelelően kétféle paraméterezés közt választhatunk. Az első esetben két normáltartomány uniójára bontjuk az eredeti tartományt, melyek határai: $0 \le y \le \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, valamint

$0 \leq y \leq 6-x$, $4 \leq x \leq 6$. A második esetben egy normáltartományként írjuk fel a határokat: $y^2 \leq x \leq 6-y$ és $0 \leq y \leq 2$. Mi az utóbbi utat követjük.

$$\iint_T xy\, d(x,y) = \int_0^2 \int_{y^2}^{6-y} xy\, dx\, dy = \int_0^2 \left[\frac{yx^2}{2}\right]_{y^2}^{6-y} dy = \int_0^2 \frac{y(6-y)^2}{2} - \frac{y^5}{2}\, dy =$$

$$= \int_0^2 \frac{y^3}{2} - 6y^2 + 18y - \frac{y^5}{2}\, dy = \left[\frac{y^4}{8} - 2y^3 + 9y^2 - \frac{y^6}{12}\right]_0^2 = \frac{50}{3}.$$

d) Mivel $\leq x \leq \pi$ esetén $\sin x \geq 0$, ezért az integrálás határai $-\sin x \leq y \leq \sin x$. Tehát:

$$\iint_T \sin^2 x - y^2\, d(x,y) = \int_0^\pi \int_{-\sin x}^{\sin x} \sin^2 x - y^2\, dy\, dx = \int_0^\pi \left[y \sin^2 x - \frac{y^3}{3}\right]_{-\sin x}^{\sin x} dx =$$

$$= \int_0^\pi \frac{4}{3} \sin^3 x\, dx = \frac{4}{3} \int_0^\pi \sin x - \sin x \cos^2 x\, dx = \frac{4}{3}\left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^\pi = \frac{16}{9}.$$

4. Számítsuk ki az $\iiint_V xy^2z^3\, dV$ integrál értékét, ha az első térnyolcadba eső V korlátos térrész határai a $z = xy$ egyenletű felület, valamint a $z = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = x$ egyenletű síkok.

Megoldás Az integrálás határai $0 \leq z \leq xy$, $0 \leq y \leq x$ és $0 \leq x \leq 1$. Tehát:

$$\iiint_V xy^2z^3\, dV = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xy^2z^3\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x \left[\frac{xy^2z^4}{4}\right]_0^{xy} dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x \frac{x^5y^6}{4}\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^5y^7}{28}\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^{12}}{28}\, dx = \left[\frac{x^{13}}{364}\right]_0^1 = \frac{1}{364}.$$

5. Számítsuk ki a megadott felületekkel határolt korlátos térrész térfogatát!
   a) $y = 0, y = 2, z = 0, z = 2 - 2x^2$
   b) $x^2 = y + z$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$

Megoldás a) A $z = 2 - x^2$ felület és a $z = 0$ koordinátasík metszete az $x = \pm 1$ egyenesek uniója. Így a térfogatot kettős integrállal kiszámolhatjuk, ahol a függvény $z = 2 - 2x^2$, és az integrálás határai $0 \leq y \leq 2$ és $-1 \leq x \leq 1$. Tehát:

$$V = \int_{-1}^1 \int_0^2 2 - 2x^2\, dy\, dx = \int_{-1}^1 \left[y(2-2x^2)\right]_0^2 dx = \int_{-1}^1 4 - 4x^2\, dx = \left[4x - \frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{16}{3}.$$

b) A térbeli tartományt vázolva a határok: $0 \leq z \leq x^2 - y$, $0 \leq y \leq x^2$ és $0 \leq x \leq 2$. Így akár kettős, akár hármasintegrállal meghatározható a térfogat. Most az utóbbit választjuk, ekkor az integrálandó függvény az $(x,y,z) \mapsto 1$. Tehát:

$$V = \int_0^2 \int_0^{x^2} \int_0^{x^2-y} 1\, dz\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{x^2} x^2 - y\, dy\, dx = \int_0^2 \frac{x^4}{2}\, dx = \frac{16}{5}.$$