Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 13. hét

1. Határozzuk meg a következő sorok konvergenciatartományát!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}(x-1)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!}(x+7)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(n+3)}{n^2+3} x^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 \cdot 3^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{3n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n}(x-2)^{2n}$

Megoldás a) Kiszámoljuk a $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ határértéket az $a_n = \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$ sorozatra:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Ha a_n konvergens, akkor $\limsup a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, így a konvergenciasugár $r = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. A hatványsor középpontja $a = 1$, tehát a hatványsor konvergens az $(1-2, 1+2) = (-1, 3)$ intervallumon, és ennek külső pontjaiban nem. Megnézzük az intervallum határát. Ha $x = -1$, akkor a hatványsor értéke $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}(-2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, amiről ismert, hogy divergens. Ha $x = 3$-at helyettesítünk, a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ numerikus sort kapjuk. Ez a sor váltakozó előjelű, az elemei abszolút értékeinek sorozata nullához tart és monoton csökkenő, tehát a sor Leibniz típusú, így konvergens. A konvergenciatartomány: $(-1, 3]$.

b) Itt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{(2n+2)!}}{\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{(2n+1)(2n+2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{(2+\frac{1}{n})(2n+2)^2} = 0,$$

tehát a konvergenciasugár $r = \infty$. Tehát a hatványsor az egész $\mathbb{R}$ halmazon konvergens.

c) Hasonlóan levezethető, hogy a konvergenciasugár $r = \frac{1}{2}$. Vizsgáljuk meg a konvergenciát $x = \pm\frac{1}{2}$ esetén. Ha $x = -\frac{1}{2}$, akkor a kapott numerikus sor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+3}$. Minthogy minden $n \geq 1$ esetén $\frac{n+3}{n^2+3} \geq \frac{n}{n^2+3n^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}$, és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens, a minoráns-elv miatt ez a sor is divergens. Legyen most $x = \frac{1}{2}$. Ekkor a kapott sor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+3}{n^2+3}$. Levezethető, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+3} = 0$, és a $\left\{\frac{n+3}{n^2+3}\right\}$ sorozat monoton csökkenő $n \geq 7$ esetén, a vizsgált sor Leibniz-típusú, tehát konvergens. A konvergenciatartomány: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

d) Alkalmazzuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 \cdot 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 \cdot 3^n}(x+2)^n$ átalakítást. Erre a hatványsorra az előzőekhez hasonlóan adódik, hogy a konvergenciasugara $r = \frac{3}{2}$, azaz, mivel a középpontja $a = -2$, a $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ intervallumon konvergens. A két végpontban külön megvizsgálva a konvergenciát láthatjuk, hogy mindegyikben konvergens a hatványsor. Tehát a konvergenciaintervallum: $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

e) Végezzük el az $x^3 = y$ helyettesítést. Az előző módszerekkel levezethető, hogy az így kapott $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} y^n$ hatványsor konvergenciaintervalluma $(-2, 2)$. Így az eredeti hatványsor $-2 < x^3 < 2$ esetén konvergens, amiből a konvergenciaintervalluma $\left(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$.

f) Hasonlóan adódik, hogy a hatványsor $-9 < (x-2)^2 < 9$ esetén konvergens, amiből a hatványsor konvergenciaintervalluma $(-1, 5)$.

2. Határozzuk meg a következő sorok konvergenciasugarát!

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}} x^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$

Megoldás a) Vizsgáljuk az $a_n = \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}$ sorozatra a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ határértéket. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^n}{(n+6)^n \cdot \sqrt[n]{n+6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{6}{n}\right)^n \cdot \sqrt[n]{n+6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{e^6 \cdot 1} = e^{-4},$$

felhasználva azt, hogy $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+6} \leq \sqrt[n]{7n} \leq (\sqrt[n]{n})^2$, ha $n \geq 7$, így a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ nevezetes határérték felhasználásával a rendőr-elv alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+6} = 1$. A kiszámolt határértékből azt kapjuk, hogy a vizsgált hatványsor konvergenciasugara $r = \frac{1}{e^{-4}} = e^4$.
b) Most

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e.$$

Tehát a konvergenciasugár $r = \frac{1}{e}$.

3. Adjuk meg az alábbi függvények x_0 bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciatartományát!

a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $x_0 = 0$; $x_0 = 5$ b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $x_0 = 2$; $x_0 = -5$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$, $g(x) = \frac{x^5}{x^2+3}$, $x_0 = 0$ d) $f(x) = \frac{1}{x+7}$, $g(x) = \frac{3x^4}{x+7}$, $x_0 = 0$

Megoldás Idézzük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ mértani sor pontosan $|q| < 1$ esetén konvergens, és ekkor összege $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

a) Az előző nevezetes sorösszeget alkalmazva $\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x}{3}\right)} = -\frac{1}{3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{3^{n+1}}$, és a kapott sor $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$ esetén, azaz a $(-3, 3)$ tartományon konvergens. Másrészt, $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{(x-5)+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x-5}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-5}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-5)^n$, és a kapott sor $\left|-\frac{x-5}{2}\right| < 1$ esetén, azaz a $(3, 7)$ tartományon konvergens.
b) Az előző feladat módszerével $\frac{1}{x+2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-2)^n$, és a sor $-2 < x < 6$ esetén konvergens. Másrészt $\frac{1}{x+2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}}(x+5)^n$, és a sor $-8 < x < -2$ esetén konvergens.
c) Itt $\frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{3}\right)} = \frac{1}{3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{2n}$, és a sor $\left|-\frac{x^2}{3}\right| < 1$, azaz a $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ intervallumon konvergens. Így $\frac{x^5}{x^2+3} = x^5 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{2n+5}$, és a sor ugyanezen az intervallumon konvergens.
d) $\frac{1}{x+7} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}} x^n$, és a sor a $(-7, 7)$ intervallumon konvergens. Emellett $\frac{3x^4}{x+7} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot (-1)^n}{7^{n+1}} x^{n+4}$, és a sor ugyanitt konvergens.

4. Írjuk fel az alábbi függvények x_0 pontbeli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát!

a) $f_1(x) = \sin 3x^2 \quad x_0 = 0$

b) $f_2(x) = e^{4x} \quad x_0 = 0; \quad x_0 = 3$

c) $f_3(x) = \operatorname{sh} 2x^4, \quad x_0 = 0$

d) $f_4(x) = e^{-2x} \operatorname{ch} 5x, \quad x_0 = 0$

Megoldás a) A segédleten szereplő nevezetes hatványsorok közt szerepel a $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$ egyenlőség. Így $\sin 3x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3x^2)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{4n+2}$, és az egyenlőség tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll. Tehát a sor konvergenciatartománya $\mathbb{R}$.
b) Hasonlóan $e^{4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} x^n$, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.
c) Ugyanígy $\operatorname{sh} 2x^4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(2x^4)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{8n+4}$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
d) Mivel $\operatorname{ch} 5x = \frac{e^{5x}+e^{-5x}}{2}$, így $f_4(x) = \frac{e^{3x}+e^{-7x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+(-7)^n}{2\cdot(n!)} x^n$, és a sor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.

5. Adjuk meg az $f(x) = 5x^3 e^{-3x^2}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciatartományát! Számítsuk ki $f^{(100)}(0)$ és $f^{(101)}(0)$ értékét!

Megoldás Hasonlóan az előzőekhez: $f(x) = 5x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5\cdot(-3)^n}{n!} x^{2n+3}$, és a konvergenciaintervallum $\mathbb{R}$. Minthogy f x_0 körüli Taylor-sora $\sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, a fenti sorral való összehasonlításból $f^{(100)}(0) = 0$, mivel f Taylor-sorában csak páratlan kitevős tagok szerepelnek. Ugyanígy adódik az $f^{(101)}(0) = 101! \cdot \frac{5\cdot(-3)^{49}}{49!}$ egyenlőség.

6. Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését, és határozzuk meg a konvergenciasugarat (R_1-et)! Az f függvény sorfejtésére támaszkodva írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú sorfejtését!

a) $g(x) = \ln(x+3), \quad R_2 =?$

b) $h(x) = \dfrac{1}{(x+3)^3}, \quad R_3 =?$

Megoldás Az eredeti függvény Taylor-sora: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n$, és ennek konvergenciasugara $R_1 = 3$.
a) Vegyük észre, hogy

$$g(x) = g(0) + \int_0^x f(t)\,dt = \ln 3 + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n\,dt = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n\,dt = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}} x^{n+1}$$

felhasználva a hatványsorok tagonkénti integrálására vonatkozó tételt. A g függvény Taylor-sorának konvergenciasugara megegyezik az f függvényével, azaz $R_2 = R_1 = 3$.
b) Vegyük észre, hogy $f''(x) = \frac{2}{(x+3)^3}$, tehát $h(x) = \frac{1}{2} f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\cdot 3^{n+1}} n(n-1)x^{n-2}$, mivel hatványsorok tagonként deriválhatóak. A konvergenciasugár $R_3 = R_1 = 3$.

7. Tudjuk, hogy $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots, \quad R = 1.$

a) Írjuk fel az $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{3}\right)$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát, és adjuk meg a konvergenciasugarat!

b) Az f függvény sorfejtését felhasználva adjuk meg az $\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right)\,dx$ integrál értékét az f függvény negyedfokú Taylor-polinomjának felhasználásával, és becsüljük meg a hibát!

Megoldás a) Mivel $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, így $\ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n} x^{2n}$, és a sor konvergenciasugara $R_2 = \sqrt{3}$.

b) Az integrál végtelen-sor alakban is megadható tagonkénti integrálással:

$$\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n} \int_0^1 x^{2n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)\cdot 3^n} = \frac{1}{9} - \frac{1}{90} + \frac{1}{567} - \dots.$$

Ha f negyedfokú Taylor polinomját használjuk az integrál becslésére, akkor f Taylor-sorát használva látható, hogy az $n = 1, 2$ tagokat kell figyelembe venni. Tehát az integrál közelítő értéke: $I = \frac{1}{9} - \frac{1}{90} = \frac{1}{10}$. Mivel a kapott numerikus sor váltakozó előjelű, és az elemek sorozata monoton csökkenve tart nullához, a sor Leibniz-típusú, így tetszőleges részletösszegnek a teljes sorösszegtől vett eltérése felülről becsülhető a soron következő tag abszolút értékével. Más szóval, I értékétől az integrál legfeljebb $\frac{1}{567}$-tel tér el.