Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 14. hét

1. Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ és $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát! Adjuk meg elemi műveletekkel az x^4 együtthatóit!

Megoldás A tanultak alapján tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ és $|x| < 1$ esetén $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, ahol $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. Így $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(-\frac{x}{4}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{x}{4}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4^n} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n$. A sor konvergenciasugarát az $\left|-\frac{R_1}{4}\right| = 1$ egyenlőségből számolhatjuk ki, azaz $R_1 = 4$. Hasonlóan adódik, hogy $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4^n} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$, és a sor konvergenciasugara $R_2 = 2$. Az x^4 együtthatója f Taylor-sorában $a_4 = \frac{(-1)^4}{2 \cdot 4^4} \binom{-\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{2^9} \cdot \frac{(-1)^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \frac{7}{2}}{4!} = \frac{35}{65536}$. Hasonlóan x^4 együtthatója g Taylor-sorában $b_4 = \frac{3}{256}$.

2. Legyen $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{32-2x^2}}$ és $x_0 = 0$.
   a) Írjuk fel az f függvény x_0 bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát!
   b) x^8 együtthatója? (Elemi műveletekkel adjuk meg!)
   c) $f^{(26)}(0) =?$, $\quad f^{(25)}(0) =?$

Megoldás a) Most $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(-\frac{x^2}{16}\right)\right)^{-\frac{1}{5}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 16^n} \binom{-\frac{1}{5}}{n} x^{2n}$, és a sor konvergenciasugara $R = 4$.
b) x^8 együtthatója $\frac{(-1)^4}{2 \cdot 16^4} \binom{-\frac{1}{5}}{4} = \frac{11}{20480000}$.
c) x^{26} együtthatója $\frac{f^{(26)}(0)}{26!}$. Így $f^{(26)}(0) = \frac{(-1)^{13}}{2 \cdot 16^{13}} \binom{-\frac{1}{5}}{13} \cdot 26! = \frac{26! \cdot 848839088}{2^{53} \cdot 30517578125}$. Hasonlóan adódik, hogy $f^{(25)}(0) = 0$.

3. Írjuk fel a $g(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt[5]{32-2x^2}}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát! Számítsuk ki $g^{(102)}(0)$ és $g^{(103)}(0)$ értékét!

Megoldás Az előző feladathoz hasonlóan $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16^n} \binom{-\frac{1}{5}}{n} x^{2n+3}$, és a konvergenciasugár $R = 4$. A deriváltak: $g^{(102)}(0) = 0$ és $g^{(103)}(0) = \frac{(-1)^{50}}{16^{50}} \binom{-\frac{1}{5}}{50}$.

4. Adjuk meg az $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ integrál értékét az integrandus nyolcadfokú Taylor-polinomjának felhasználásával, és becsüljük meg a hibát!

Megoldás Mivel $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{4n}$ $|x| < 1$ esetén, az integrál $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{(4n+1) \cdot 2^{4n+1}}$. A numerikus sor n-edik eleme $a_n = \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{(4n+1) \cdot 2^{4n+1}} = (-1)^n \cdot \frac{1}{(4n+1) \cdot 2^{4n+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}$, azaz láthatóan $|a_n|$ egy monoton csökkenő, és 0-hoz konvergáló sorozat. Tehát a sor Leibniz típusú, így ha az integrált a $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ véges összeggel közelítjük, akkor a becslésnek az integráltól való eltérése legfeljebb $|a_{n+1}|$. Jelen esetben a nyolcadfokú Taylor-polinom használata esetén $n = 2$, tehát a közelítő összeg $a_0 + a_1 + a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{30533}{61440}$, és a becslése hibája legfeljebb $|a_3| = \frac{5}{1703936}$.

5. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt[4]{1+2x^3}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát! Számítsuk ki $f^{(9)}(0)$ és $f^{(10)}(0)$ értékét!

Megoldás A Taylor-sor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \binom{\frac{1}{4}}{n} x^{3n}$, és a sor konvergenciasugara, a $2R^3 = 1$ egyenlőséget felhasználva, $R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Így $f^{(9)}(0) = 2^3 \binom{\frac{1}{4}}{3} 9! = 158760$, és $f^{(10)}(0) = 0$.

6. Legyen $f(x) = 0$ ha $x \in (-\pi, 0]$, és $f(x) = 2$ ha $x \in (0, \pi]$. Írjuk fel f Fourier-sorát! Mely pontokban állítja elő f Fourier-sora a függvényt?

Megoldás A függvény és deriváltja szakaszonként folytonos, valamint a függvény korlátos és 2π szerint periodikus, így a Fourier-sora pontonként konvergens. A Fourier -sor határértéke x_0-ban $f(x_0)$, ha f folytonos x_0-ban, egyébként a két féloldai határérték átlaga. Tehát a Fourier-sor $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén állítja elő a függvényt. Számoljuk ki a Fourier-sor együtthatóit:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} 2\, dx = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} 2 \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}.$$

Így a Fourier-sor

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} \sin(nx) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)x).$$

Megjegyezzük, hogy észrevehető, hogy az intervallumon végpontjaitól eltekintve, az $f(x) - \pi$ függvény páratlan, amiből (számolás nélkül) következik, hogy $a_n = 0$, ha $n \geq 1$.

7. Legyen $f : (0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, és terjesszük ki ezt a függvényt periodikusan $\mathbb{R}$-re. Írjuk fel f Fourier-sorát! Mely pontokban állítja elő a Fourier-sor a függvényt?

Megoldás Hasonlóan az előző feladathoz, $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ esetén állítja elő a Fourier-sor a függvényt. Az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x\, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[x \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n}\, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n}\, dx \right) = -\frac{2}{n} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}.$$

Tehát a Fourier-sor

$$\pi - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nx).$$

8. Legyen $f(x) = 0$ ha $x \in (-\pi, 0]$, és $f(x) = x/2$ ha $x \in (0, \pi]$. Írjuk fel f Fourier-sorát! Mely pontokban állítja elő f Fourier-sora a függvényt?

Megoldás A Fourier-sor a függvényt $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ esetén állítja elő. Az együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{x}{2}\, dx = \frac{\pi}{8},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{x}{2} \cos(nx)\, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x \sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi = \frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{x}{2} \sin(nx)\, dx = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}.$$

A Fourier-sor:

$$\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \sin(nx) \right).$$

9. Jelöljük f-fel az abszolútérték-függvény periodikus kiterjesztését a $[-\pi, \pi)$ intervallumról a számegyenesre. Írjuk fel a Fourier-sorát!

Megoldás Mivel a függvény az $x \neq \pi + 2k\pi$ pontoktól eltekintve páros, így $b_n = 0$ minden $n \geq 1$ esetén. A Fourier-sor együtthatói:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi |x|\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}.$$

Így a Fourier-sor:

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi} \cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^\infty -\frac{4}{(2n-1)^2\pi} \cos((2n-1)x).$$