Feladatok az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 2. hét

1. Számítsuk ki a megadott mátrixok rangját, valamint az A, B, C mátrixok inverzét, ha létezik. A tanult módszerek közül használjunk minél többet.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad C^{\text{hf}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad E^{\text{hf}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Legyen $\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ és $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Oldjuk meg az 1. feladatbeli A és B mátrixokkal az $A\vec{x} = \vec{a}$ és $B\vec{x} = \vec{b}$ egyenletrendszert (egyiket Gauss-eliminációval, másikat az inverz mátrix módszerével)

3. Hány független vektor választható ki közülük? Mennyi a generált altér dimenziója?

a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$ b)$^{\text{hf}}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Oldjuk meg az $A\vec{x} = \vec{b}$ egyenletrendszert Gauss-eliminációval! Mi A rangja?

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ c)$^{\text{hf}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$

5. Hogyan kell α, β-t megválasztani, hogy az egyenletrendszernek ne legyen megoldása? Hát hogy végtelen sok megoldása legyen?

$$\begin{aligned} -y + 2z &= 3 \\ x + 3y &= \beta \\ -2x + \alpha y + z &= 0 \end{aligned}$$

6.$^{\text{hf}}$ Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ \alpha & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ \beta \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Hogyan válasszuk meg az α és β paraméterek értékét úgy, hogy az $A\vec{x} = \vec{b}$ egyenletnek egyértelmű megoldása legyen; végtelen sok megoldása legyen; illetve ne legyen megoldása?

Emlékeztető

- Az A mátrix *rangja* az oszlopaiból képzett vektorrendszerből kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma. Ezzel ekvivalens megfogalmazásban: a soraiból képzett vektorrendszerből kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma, vagy: a legnagyobb méretű nem nulla aldeterminánsának mérete.

- *Elemi sortranszformációk:* 1) Egy mátrix sorának beszorzása egy $\lambda \neq 0$ skalárral. 2) Egy mátrix egyik sorához egy másik sor λ-szorosának hozzáadása. 3) Két sor felcserélése.
  Elemi oszloptranszformációk: mint fent, csak oszlopokkal.