Feladatok az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 4. hét

1. Határozzuk meg a sajátértékeket, sajátvektorokat!

   a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d)$^{\text{hf}}$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Tudjuk, hogy az $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az a paraméter értékét, a sajátértékeket, és a másik sajátvektort!

3. Adjuk meg az $y'' = e^{-3x} + 2x$ differenciálegyenlet általános megoldását. Adjuk meg azt a partikuláris megoldást, amely eleget tesz az $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltételeknek.

4. Adjuk meg az $y' = \frac{x}{y} e^{2x-3y^2}$ $(y \neq 0)$ differenciálegyenlet általános megoldását.

5. Adjuk meg az $y' = \frac{y-2}{xy}$, $\quad (x \neq 0,\ y \neq 0)$ differenciálegyenlet általános megoldását. Oldjuk meg az $y(1) = 2$, $y(1) = 3$, illetve az $y(-1) = -3$ kezdetiérték-problémákat.

6. Oldjuk meg a következő szétválasztható változójú egyenleteket:

   a) $y' = \frac{y^2 + 4y + 9}{(x-1)(x+5)}$, $\quad (x \neq 1,\ x \neq -5)$ b) $y' = (3x-1)^5(y^2 - 4y)$

   c) $y' = \frac{2y^2 + 3}{y} 2xe^{-4x^2}$, $\quad (y \neq 0)$

7. A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádiummennyiséggel. Tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1600 év. A kiindulási anyag mennyiségének hány százaléka bomlik el 100 év alatt?

8. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát: $y' - \frac{x}{x^2+4} y = 6x$, $\quad y(0) = 4$.

9. Adjuk meg az $y' - \frac{2}{x} y = x$ differenciálegyenlet általános megoldását. Oldjuk meg az $y(1) = 3$, illetve az $y(-e) = 3e^2$ kezdetiérték-problémákat.

10. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű egyenleteket:

    a) $y' - 3x^2 y = 6x^2$ b) $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{1+x^2}$, $\quad (x \neq 0)$

    c) $y' + \frac{5}{x} y = e^x x^{-4}$, $\quad (x \neq 0)$ d) $y' + \frac{1}{x} y = \frac{2}{x} + \frac{3}{2}$, $\quad y(1) = 1$

Emlékeztető

- Egy A $n \times n$-es mátrixnak λ a *sajátértéke*, és $\vec{v} \neq \vec{0}$ a λ-hoz tartozó *sajátvektora*, ha $A(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.
- *Szétválasztható változójú* a differenciálegyenlet, ha $y' = f(x)g(y)$ alakú.
- *Inhomogén lineáris* a differenciálegyenlet, ha $y' + g(x)y = f(x)$ alakú. Ennek összes megoldása $y_h(x) + y_p(x)$ alakú, ahol y_h az $y' + g(x)y = 0$ homogén egyenlet általános megoldása, y_p pedig az inhomogén egyenletnek egy *partikuláris megoldása*. y_p-t az *állandó variálásával* $y_p = c(x)\varphi(x)$ alakban keressük, ahol φ az $y' + g(x)y = 0$ egyenlet egy sehol se nulla megoldása.