Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 5. hét

1. Oldjuk meg új változó bevezetésével az alábbi differenciálegyenleteket!

   a) $y' = \dfrac{2y^2 + x^2}{xy}$ b) $x^2y' + xy = x^2 + y^2, \quad y(1) = 2$

   c)$^{\text{hf}}$ $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ d) $y' = \dfrac{1}{x+y}$

   Megoldás a) A differenciálegyenlet az $y' = 2\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ alakra hozható, azaz felírható $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ alakban. Így az $u = \frac{y}{x}$ új ismeretlen függvény bevezetésével szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapunk. A helyettesítés elvégzéséhez számoljuk ki y' értékét: $y = ux$ és $y' = u'x + u$. Behelyettesítve:

$$u'x + u = 2u + \frac{1}{u},$$

ahol $u \neq 0$. A kapott differenciálegyenletet az

$$\frac{uu'}{u^2+1} = \frac{1}{x}$$

alakra hozhatjuk. Ebből

$$\int \frac{u}{u^2+1}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|u^2+1| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C|$$

és

$$u = \pm\sqrt{Cx^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad y = \pm x\sqrt{Cx^2-1},$$

ahol $C > 0$.

b) Átalakítva:

$$y' + \frac{y}{x} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

amiből az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítés elvégzésével

$$u'x + 2u = 1 + u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{(u-1)^2} = \frac{1}{x}, u \neq 1.$$

Integrálva:

$$\int \frac{1}{(u-1)^2}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx,$$

azaz

$$-\frac{1}{u-1} = \ln|x| + \frac{1}{C}.$$

Ebből

$$u = 1 - \frac{C}{C\ln|x| + 1},$$

ami a $C = 0$ választásnál magában foglalja az $u = 1$ partikuláris megoldást is. Az általános megoldás

$$y = x + \frac{Cx}{C\ln|x| + 1}.$$

Helyettesítsük be a megadott kezdeti feltételt. Ekkor $2 = 1 + \frac{C}{C\ln|1|+1} = 1 + C$, amiből $C = 1$. Tehát a keresett partikuláris megoldás $y_p = x + \frac{x}{\ln|x|+1}$.

c) Átrendezve

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x},$$

ahol $x, y > 0$. Alkalmazzuk az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítést. Ekkor

$$u'x + u = u + u \ln u \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{u \ln u} = \frac{1}{x},$$

ahol $u \neq 1$.

$$\int \frac{1}{u \ln u}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx \quad \ln|\ln u| = \ln|x| + \ln|\ln|C||,$$

amiből $u = Ce^x$ és $y = Cxe^x$, ahol $C > 0$. Ezen kívül az $u = 1$ feltételből adódik az $y = x$ partikuláris megoldás.

d) Most a differenciálegyenlet $y' = f(ax + by + c)$, alakú, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $b \neq 0$. Ekkor az $u = ax + by + c$ helyettesítést érdemes alkalmazni, tehát jelen esetben $u = y + x$. Így $y' = u' - 1$, és az egyenlet:

$$u' - 1 = \frac{1}{u},$$

ami egy x-hiányos elsőrendű differenciálegyenlet, azaz szétválasztható változójú. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\frac{uu'}{u+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{u}{u+1}\, du = \int 1\, dx,$$

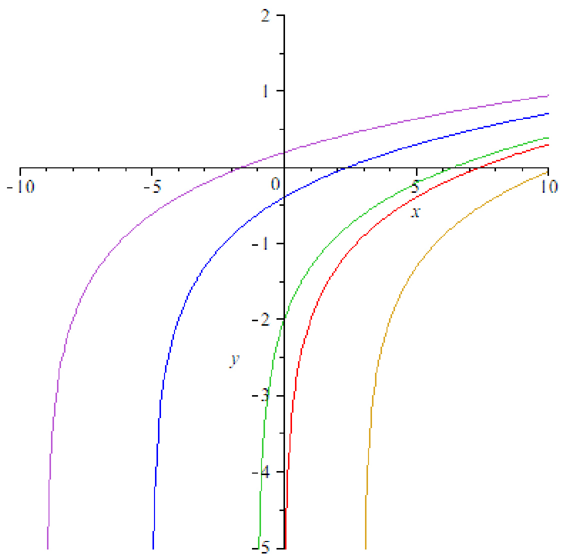
ha $u \neq -1$. Ebből

$$u - \ln|u + 1| = x + \ln|C| \quad \Rightarrow e^u = C(u + 1)e^x.$$

Mivel C-t nem tudjuk úgy választani, hogy megkapjuk az $u = -1$ megoldást, az összes megoldás $e^u = C(u + 1)e^x$, ahol $C \neq 0$, és $u = -1$. Visszaírva az eredeti függvényre: $e^{x+y} = C(x + y + 1)e^x$, és $y = -x - 1$.

2. Írjuk fel az $y' = e^{y+2} - x$ differenciálegyenlet izoklínáinak egyenletét, és rajzoljunk fel kettőt. Van-e lokális szélsőértéke az $P_0(e, -1)$ ponton áthaladó megoldásnak a P_0 pontban?

Megoldás Az izoklínák egyenlete $K = e^{y+2} - x$, ahol $K \in \mathbb{R}$ egy rögzített konstans. Ebből kifejezhetjük pl. y-t: $y = \ln(x + K) - 2$. A $K = -3; 0; 1, 5, 9$ értékekhez tartozó izoklínák láthatóak az ábrán. Ezek közül a P_0 ponton áthaladó izoklína egyenletére $-1 = \ln(e + K) - 2$,



amiből $K = 0$, azaz az izoklína a nulla meredekségű pontokat tartalmazza. Mivel a ponthoz tartozó megoldás meredeksége nulla, a megoldás grafikonja P_0-ban vízszintesen keresztezi az izoklínát. Ebből az is következik, hogy $x > e$ esetén a K meredekség negatív, azaz a megoldás grafikonja $x > e$ esetén nem metszi a $K = 0$ izoklínát. Meggondolható az is, hogy ezen észrevételből az is következik, hogy $x < e$ esetén sem metszi a grafikon a $K = 0$ izoklínát. Tehát a megoldás P_0 előtt szigorúan növő és utána szigorúan csökkenő, tehát P_0-ban lokális szélsőértéke (pontosabban globális maximuma) van.

3. Tekintsük a következő differenciálegyenletet: $y' = (y^2 - 4)x + x - 1$.
   a) A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = -x$ egyenessel? Vázoljuk ezeket a pontokat és jelöljünk be néhány vonalelemet!
   b) Van-e lokális szélsőértéke vagy inflexiós pontja az $(1, 2)$ ponton átmenő megoldásnak ebben a pontban? (Feltéve, hogy van ilyen megoldás.)

Megoldás a) Az $y = -x$ egyenes meredeksége $K = -1$, tehát az ezen értékhez tartozó izoklínát kell megkeresni: $-1 = (y^2 - 4)x + x - 1$. Ebből $x(y^2 - 3) = 0$, tehát $x = 0$ vagy $y = \pm\sqrt{3}$. Az ezen pontokhoz tartozó vonalelemek $K = -1$ meredekségű rövid szakaszok.
b) A ponthoz tartozó megoldás meredeksége $K = 1 \cdot (2^2 - 3) - 1 = 0$. A ponthoz tartozó izoklína egyenlete $x = \frac{1}{y^2-3}$. Az előző feladathoz hasonlóan végiggondolható, hogy a megoldás meredeksége $x < 1$ esetén negatív, $x > 1$ esetén pozitív. Tehát a megoldásnak van lokális szélsőértéke (pontosabban globális minimuma) a megadott pontban.

4. Oldjuk meg a következő homogén lineáris állandó együtthatós egyenleteket!

a) $y'' - 8y' + 15y = 0$	b)$^{\text{hf}}$ $y'' + 2y' = 0$	c) $y'' - 8y' + 16y = 0$
d) $y'' + 4y' + 13y = 0$	e)$^{\text{hf}}$ $y'' + 25y = 0$	f) $y''' + 2y'' + y' = 0$
g) $y''' + 4y'' + 13y' = 0$	h) $y^{(4)} - y = 0$	i)$^{\text{hf}}$ $y^{(4)} - y^{(3)} = 0$

Megoldás a) A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$, melynek gyökei $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 5$. Így az általános megoldás: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{5x}$.
b) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 2\lambda = 0$. Ennek gyökei $0; -2$, és az általános megoldás $y = C_1 + C_2e^{-2x}$.
c) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$. Ennek egyetlen gyökei $\lambda = 4$. Így (mivel belső rezonancia van) az általános megoldás $y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}$.
d) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$. A megoldóképlettel ennek megoldásai $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$. Azaz az általános megoldás $y = C_1e^{-2x}\cos(3x) + C_2e^{-2x}\sin(3x)$.
e) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 25 = 0$, melynek gyökei $\pm 5i$.Az általános megoldás: $y = C_1\cos(5x) + C_2\sin(5x)$.
f) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$. Ennek gyökei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Így az általános megoldás $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}$.
g) A d) feladat megoldása alapján az általános megoldás $y = C_1e^{-2x}\cos(3x) + C_2e^{-2x}\sin(3x) + C_3$.
h) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^4 - 1 = 0$. Ennek (komplex) gyökei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -1$ és $\lambda_4 = -i$. Azaz az általános megoldás $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$.
i) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^4 - \lambda^3 = 0$, melynek $\lambda = 0$ háromszoros és $\lambda = 1$ egyszeres gyöke. Így az általános megoldás: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x$.

5. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat!
   a) $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$
   b)$^{\text{hf}}$ $y'' + 3y' - 4y = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -4$
   c) $y'' + 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 7$

Megoldás a) A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, melynek gyökei $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Az általános megoldás így $y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x$. Ebből $y' = (C_2 - C_1)e^{-x} \cos x + (-C_2 - C_1)e^{-x} \sin x$. A kezdeti feltételek behelyettesítéséből $2 = C_1$ és $1 = C_2 - C_1$, amiből $C_2 = 3$, és a keresett partikuláris megoldás $y_p = 2e^{-x} \cos x + 3e^{-x} \sin x$.
b) Az előző feladatok módszerét alkalmazva az általános megoldás $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$. Ennek deriváltja $y' = C_1 e^x - 4C_2 e^{-4x}$, azaz a feltételek $3 = C_1 + C_2$ és $-4 = C_1 - 4C_2$. Az egyenletrendszer megoldása $C_2 = \frac{7}{5}$ és $C_1 = \frac{8}{5}$. Tehát a keresett partikuláris megoldás $y_p = \frac{8}{5} e^x + \frac{7}{5} e^{-4x}$.
c) Az általános megoldás most $y = (C_1 + C_2 x)e^{-5x}$. Ebből $y' = (C_2 - 5C_1 - 5C_2 x)e^{-5x}$. A feltéelekből $-1 = C_1$ és $7 = C_2 - 5C_1$, tehát $C_2 = 2$, és a keresett megoldás $y_p = (2x - 1)e^{-5x}$.