Feladatmegoldások az A2 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/tavasz, 8. hét

1. Számoljuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+3}{x^2y+4}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x}{\cos y}$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2\cos y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\sin xy}{x}$ e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}(xy)\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{y}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{2x^2+2y^2}$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy^3}{2x^2+2y^2}$ i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{2x^2+3y^2}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2+5y^2}{2x^2+y^2}$ k) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+xy-y}{x+xy+y}$

Megoldás a) A megadott függvény folytonos $(0,0)$-ban, így $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+3}{x^2y+4} = \frac{0\cdot 0+3}{0^2\cdot 0+4} = \frac{3}{4}$.

b) Hasonlóan adódik, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{\cos y} = \frac{\sin 0}{\cos 0} = 0$.

c) Vegyük észre, hogy ha $(x,y)\to(0,0)$, akkor $(x^2y)\to 0$, tehát $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2y} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$. Másrészt, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\cos y^2} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\cos y^2} = 0$. Tehát $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2\cos y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\frac{y}{\cos y^2} = 0$.

d) Mivel $(x,y)\to(0,3)$ esetén $xy\to 0$, most $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$ alkalmazásával kapjuk, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin xy}{xy}\cdot y = 1\cdot 3 = 3$.

e) Vegyük észre, hogy tetszőleges $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén $\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le 1$. Másrészt, mivel az $\operatorname{arctg}(xy)$ függvény mindenhol folytonos, így $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}(xy) = 0$. Így az $\left|\operatorname{arctg}(xy)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le |\operatorname{arctg}(xy)|$ egyenlőtlenség és a rendőr-elv alkalmazásával az adódik, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}(xy)\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$.

f) Teszteljük, hogy ha különböző útvonalon közelítjük meg az (x,y) ponttal az origót, akkor a függvényértékek határértéke ugyanaz lesz-e.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

és

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x}{y} = \lim_{x\to 0} x \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}.$$

Vegyük észre, hogy $\lim\limits_{y\to 0+0}\frac{1}{y} = \infty$ és $\lim\limits_{y\to 0-0}\frac{1}{y} = -\infty$, tehát nem létezik a kétváltozós határérték.

g) Most

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{2x^2+2y^2} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{2x^2+2y^2} = 0,$$

tehát lehet, hogy létezik a határérték. Közelítsük meg az origót az $y = mx$ egyenes mentén. Ekkor

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(mx)}{2x^2+2(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{2+2m^2} = \frac{m}{2+2m^2}.$$

Mivel a végeredmény nem független m értékétől, a határérték nem létezik.

h) Az előző feladathoz hasonló módszert alkalmazunk:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{3xy^3}{2x^2+2y^2} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{3xy^3}{2x^2+2y^2} = 0,$$

azaz lehet, hogy létezik a határérték, melynek értéke 0. Az $y = mx$ megfeleltetésnél:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3m^3x^4}{2x^2+2m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3m^3x^2}{2+2m^2} = 0,$$

azaz továbbra is lehet, hogy létezik a határérték. Ellenőrizzük, hogy tényleg létezik-e a határérték. Minthogy

$$\left|\frac{3xy^3}{2x^2+2y^2}\right| = \left|\frac{3xy}{2} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{3xy}{2}\right|,$$

ami tart nullához, ha $(x,y) \to (0,0)$ (azaz ha $xy \to 0$). Tehát a rendőr-elv alapján a határérték létezik, és értéke 0.

i) Most az $\left|\frac{xy^2}{2x^2+3y^2}\right| \le |x|$ becslés alkalmazásával adódik, hogy a határérték létezik, és értéke 0.

j) Ebben az esetben:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{3x^2+5y^2}{2x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2},$$

és

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5y^2}{2x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{5y^2}{y^2} = 5,$$

tehát nem létezik a határérték.

k) Alkalmas átalakításokkal

$$\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{x+y}{x-y} = \frac{2-2}{2+2} = 0,$$

tehát a határérték létezik, és értéke 0.

l) A j) feladat megoldásához hasonlóan adódik, hogy a határérték nem létezik.

2. Legyen $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{4x^4+7y^4}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$. Mely pontokban folytonos f?

Megoldás Az origó kivételével f folytonos. Számoljuk ki a határértékét, az origóban. Ha $y = mx$, akkor

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2(mx)^2}{4x^4+7(mx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3m^2x^4}{x^4(4+7m^4)} = \frac{3m^2}{4+7m^4}.$$

Mivel a végeredmény függ m értékétől, f-nek nem létezik $(0,0)$-ban határértéke, tehát itt nem is folytonos.

3. Legyen $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ c, & \text{egyébként} \end{cases}$. Adjuk meg c értékét úgy, hogy f minden pontban folytonos legyen!

Megoldás A függvény az origó kivételével minden pontban folytonos. Az origóban pontosan akkor folytonos, ha itt van határértéke, és ez megegyezik c értékével. Számoljuk ki a függvény határértékét a $(0,0)$ pontban. Vegyük észre, hogy ha $(x,y) \to (0,0)$, akkor $x^2+y^2 \to 0$, így az $x^2+y^2 > 0$ egyenlőtlenség miatt ekkor $\frac{1}{x^2+y^2} \to \infty$. Mivel $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$, azt kapjuk, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{\pi}{2}$, és a függvény $c = \frac{\pi}{2}$ esetén lesz folytonos.

4. További gyakorló feladatok:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^3-y} = ?$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{y(x+y)} = ?$ c) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2} = ?$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{1}{x-y} = ?$ e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x+3y}{2x+8y} = ?$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2+4y^2)\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = ?$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin 2y}{x^2+y^2} = ?$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin 2y}{2x^2+5y^2} = ?$ i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5y^3}{2x^8+y^8} = ?$

Megoldás a) Először megvizsgáljuk, hogy létezhet-e a határérték.

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x-y}{x^3-y} = \lim_{y\to0}\frac{-y}{-y} = 1.$$

Másrészt

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x-y}{x^3-y} = \lim_{x\to0}\frac{x}{x^3} = \infty.$$

A kapott értékek különböznek, így nem létezik a határérték.
b) Az $y=mx$ egyenes mentén vizsgálva

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{mx(x+mx)} = \frac{1}{m(1+m)}.$$

A végeredmény m-től függ, így nem létezik a határérték.
c) A megadott függvény folytonos $(2,1)$-ben így $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2} = \frac{e^1}{12} = \frac{e}{12}$.
d) Most $\lim\limits_{x\to1}\lim\limits_{y\to1}\frac{1}{x-y} = \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}$. Minthogy ennek a függvénynek a baloldali határértéke ∞, jobboldali határértéke $-\infty$, a kétváltozós határérték nem létezik.
e) Az a) feladat megoldásához hasonlóan levezethető, hogy a határérték nem létezik.
f) Vegyük észre, hogy tetszőleges $t\in\mathbb{R}$ esetén $|\operatorname{arctg} t| \le \frac{\pi}{2}$. Tehát $\left|(3x^2+4y^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right| \le \frac{\pi}{2}\cdot|(3x^2+4y^2)|$. Minthogy $(x,y)\to(0,0)$ esetén $3x^2+4y^2\to0$, a rendőr-elv alapján a határérték létezik, és értéke 0.
g) Most alkalmazhatjuk a $\left|\frac{x^2\sin 2y}{x^2+y^2}\right| \le |\sin 2y|$ becslést. A rendőr-elv alapján a határérték létezik, és értéke 0.
h) A g) rész gondolatmenetével ugyanazt az eredményt kapjuk.
i) Az origót az $y=mx$ egyenes mentén közelítve

$$\lim_{x\to0}\frac{x^5\cdot m^3x^3}{2x^8+m^8x^8} = \frac{m^5}{2+m^8}.$$

A végeredmény függ m-től, így a határérték nem létezik.

5. Legyen $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+x^2y+y^2}{x^4+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$. Mutassuk meg, hogy az origón átmenő bármely egyenes mentén felvéve egy origóhoz tartó pontsorozatot, az ezekhez tartozó függvényértékek sorozatának mindig ugyanaz a határértéke. Vizsgáljuk meg a függvényértékek sorozatának határértékét akkor is, ha az $y=x^2$ egyenletű parabolán közelítünk az origóhoz. Van-e a függvénynek határértéke az origóban?

Megoldás Ha a pontsorozat elemei rajta vannak az $y=mx$, $m\in\mathbb{R}$ egyenesen, akkor

$$\lim_{x\to0}\frac{x^4+x^2\cdot mx+(mx)^2}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2+\cdot mx+m^2}{x^2+m^2} = 1,$$

ami független m-től. Másrészt, ha a pontok az egyetlen, a fenti formában fel nem írható $x = 0$ egyenesen vannak, akkor:

$$\lim_{y \to 0} \frac{0^4 + 0^2 \cdot y + y^2}{0^4 + y^2} = 1.$$

Ezzel igazoltuk az első állítást. Ha a pontsorozat elemei az $y = x^2$ parabolán vannak, akkor

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + x^2 \cdot x^2 + \left(x^2\right)^2}{x^4 + \left(x^2\right)^2} = \frac{3}{2} \neq 1.$$

Tehát az átviteli-elv alapján a függvénynek nincs határértéke $(0, 0)$-ban.